ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 4, 1976 Механика

М. В. БЕЛУБЕКЯН, К. Б. КАЗАРЯН

О ПРИМЕНИМОСТИ ГИПОТЕЗЫ МАГНИТОУПРУГОСТИ ТОНКИХ ТЕЛ К ЗАДАЧАМ КОЛЕБАНИЙ ТОКОНЕСУЩИХ ПЛАСТИН

В работах [1, 2] были предложены гипотезы магнитоупругости тонких тел, упрощающие исследования задач магнитоупругих колебаний пластин и оболочек при наличии магнитного поля. При этом сравнение некоторых задач, полученных как на основе гипотез, так и без использования гипотез, показало, что применимость гипотез магнитоупругости не зависит от величины напряженности внешнего магнитного поля.

В настоящей работе задача колебаний токонесущей пластинки решается как в точной постановке, так и на основе гипотез магнитоупругости. Сравнение результатов показывает, что применимость гипотезы магнитоупругости ограничена величиной плотности электрического тока в пластинке и, следовательно, величиной напряженности собственного магнитного поля.

§ 1. Пусть бесконечная изотропная пластинка постоянной толщины $2h$ служит проводником равномерно распределенного стороннего электрического тока плотностью $j_0 = \text{const}$.

Прямоугольная декартова система координат (x, y, z) выбрана так, что плоскость xoy совпадает со срединной плоскостью пластинки, а направление оси x—с направлением электрического тока.

Электромагнитные и упругие свойства материала пластинки характеризуются модулем упругости E, коэффициентом Пуассона μ, плотностью ρ, электропроводностью σ. Для простоты принимается, что диэлектрическая и магнитная проницаемости материала пластинки равны единице.

В отношении пластинки принимается гипотеза Кирхгофа.

Невозмущенная пластинка обладает собственным магнитным полем $\overline{H}_0$, определяемым из задач магнитостатики

$$\operatorname{rot}\overline{H}_0 = \frac{4\pi}{c}\overline{j}_0 \qquad \operatorname{div}\overline{H}_0 = 0 \qquad |z| < h$$

$$\operatorname{rot}\overline{H}^{(e)} = 0 \qquad \operatorname{div}\overline{H}^{(e)} = 0 \qquad |z| > h \tag{1.1}$$

$$\overline{H}_0 = \overline{H}^{(e)} \quad \text{при} \quad z = \pm h$$

(Индекс e принимает значения 1, 2: $e = 1$ относится к области $z > h$, $e = 2$ — к области $z < -h$).

$\bar H_0$ имеет следующий вид:

$$H_{x0} = H_{z0} = H_{x0}^{(1)} = H_{z0}^{(2)} = 0$$
$$H_{y0}^{(1)} = -\frac{4\pi j_0 h}{c}, \quad H_{y0}^{(2)} = \frac{4\pi j_0 h}{c}, \quad H_{y0} = -\frac{4\pi j_0 z}{c} \tag{1.2}$$

Начальное напряженное состояние пластинки считается нулевым.

Уравнения электродинамики в области, занимаемой колеблющейс[я] пластинкой, имеют вид [3]

$$\mathrm{rot}\,\bar H = \frac{4\pi}{c}\left[\bar j + \sigma\bar E + \frac{\sigma}{c}\left(\frac{\partial \bar u}{\partial t}\times\bar H\right)\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar E}{\partial t}$$
$$\mathrm{rot}\,\bar E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar H}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\,\bar H = 0, \quad \mathrm{div}\,\bar E = 4\pi\rho_e \tag{1.3}$$

В (1.3) $\bar E$ и $\bar H$ — векторы напряженностей электрического и магнитно[го] полей соответственно, $\bar j$ — плотность стороннего электрического тока, ρ_e — плотность электрических зарядов, c — электродинамическая постоян[-] ная, $\bar u$ — перемещение произвольной точки пластинки.

В уравнениях (1.3) участвуют неизвестные перемещения, которы[е] должны удовлетворять уравнениям движения упругой пластинки [4]

$$L_1 u + L_2 v - 2\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p_x = 0$$
$$L_1 v + L_2 u - 2\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + p_y = 0$$
$$L_3 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p_z - \frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_y}{\partial y} = 0 \tag{1.4}$$
$$L_1 = 2Eh\left(\frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right), \quad L_2 = \frac{Eh}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$$
$$L_3 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)$$

В (1.4) $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$ — перемещения средин[-] ной поверхности пластинки, а p_x, p_y, p_z, m_x, m_y — компоненты объем[-] ной силы и момента электромагнитного происхождения, обусловлен[-] ные деформацией пластинки и наличием начального стороннего ток[а]

$$\text{где} \quad \bar p = \int_{w-h}^{w+h} \bar K dz, \quad m_x = \int_{w-h}^{w+h} R_x z dz, \quad m_y = \int_{w-h}^{w+h} R_y z dz$$

$$\bar K = \frac{1}{c}(\bar j\times\bar H) + \frac{\sigma}{c}\left(\bar E + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar u}{\partial t}\times\bar H\right)\times\bar H + (\bar j_0 + \bar E)\rho_e - \frac{1}{c}(\bar j_0\times\bar H_0) \tag{1.5}$$

Отметим, что предположение о нулевом начальном напряженном состоянии можно считать, вообще говоря, верным, так как

$$\overline{p}_0 = \int_{-h}^{h} \frac{1}{c} (\overline{j}_0 \times \overline{H}_0)\, dz = 0.$$

Уравнения (1.3) и (1.4) взаимосвязаны также посредством p_x, p_y, p_z, m_x, m_y.

К приведенным уравнениям необходимо присоединить уравнения электродинамики для среды (вакуум), окружающей токонесущую пластинку, и соответствующие граничные условия на поверхностях раздела двух сред

$$\operatorname{rot} \overline{H}^{(e)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \overline{E}^{(e)}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \overline{E}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \overline{H}^{(e)}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \overline{H}^{(e)} = 0, \qquad \operatorname{div} \overline{E}^{(e)} = 0 \tag{1.6}$$

$$\overline{H} = \overline{H}^{(e)}, \qquad \overline{E} = \overline{E}^{(e)} \quad \text{при} \quad z = w \pm h$$

(Индекс $e = 1$, как и прежде, относится к области $z > w + h$, $e = 2$ — к области $z < w - h$).

В дальнейшем принимается, что электромагнитные и упругие возмущения настолько малы, что можно пользоваться линейными уравнениями.

В возмущенном состоянии компоненты электромагнитного поля и стороннего электрического тока представим в виде

$$\begin{gathered} \overline{H} = \overline{H}_* + \overline{h}, \quad \overline{j} = \overline{j}_0 + \overline{j}_*, \quad \overline{E} = \overline{e} \\ \overline{H}^{(e)} = \overline{H}_*^{(e)} + \overline{h}^{(e)}, \quad \overline{E}^{(e)} = \overline{e}^{(e)} \end{gathered} \tag{1.7}$$

где $\overline{h}$ и $\overline{e}$ — индуцированное электромагнитное поле, возникающее вследствие колебания пластинки; $\overline{H}_*$ и $\overline{j}_*$ — напряженность собственного магнитного поля и плотность стороннего электрического тока соответственно, обусловленные изгибом пластинки.

Величина $\overline{j}_*$ определяется из условия равенства нулю нормальной к поверхности пластинки составляющей плотности стороннего тока

$$\overline{j} \cdot \overline{n} = 0 \quad \text{при} \quad z = w \pm h \tag{1.8}$$

$\overline{n} = -\operatorname{grad}(w - z)$ — единичный вектор нормали к пластинке.

Из условия малости упругих и электрических возмущений, а также, учитывая тонкость пластинки и равномерное распределение по толщине пластинки начального электрического тока, из второго условия (1.7) и из (1.8) получим следующее линеаризированное выражение, определяющее $\overline{j}_*$:

$$\overline{j}_* = \left(0,\ 0,\ j_0 \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{1.9}$$

Собственное магнитное поле пластинки в изгибном состоянии (пластинки, имеющей прогиб, равный w) определяется из следующей краевой задачи магнитостатики:

$$\operatorname{rot} \overline{H}_* = \frac{4\pi}{c}(\overline{j}_0 + \overline{j}_*), \quad \operatorname{div} \overline{H}_* = 0$$

$$\operatorname{rot} \overline{H}_*^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} \overline{H}_*^{(e)} = 0 \tag{1.10}$$

$$\overline{H}_* = \overline{H}_*^{(e)} \quad \text{при} \quad z = w \pm h$$

Из сравнения (1.10) и (1.1) видно, что изменение собственного магнитного поля вследствие изгиба является величиной порядка w, что учитывается при линеаризации уравнений электродинамики (1.3).

Учитывая малость упругих и электромагнитных возмущений и используя (1.9) и (1.10), получим линеаризированные уравнения электродинамики в следующем виде:

для области, занятой пластинкой $|z| < h$

$$\operatorname{rot} \overline{h} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\overline{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} \times \overline{H}_0\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{e}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \overline{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{h}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \overline{h} = 0, \quad \operatorname{div} \overline{e} = 4\pi\rho_e \tag{1.11}$$

для областей, окружающих пластинку $|z| > h$

$$\operatorname{rot} \overline{e}^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{h}^{(e)}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \overline{h}^{(e)} = \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{e}^{(e)}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \overline{e}^{(e)} = 0, \qquad \operatorname{div} \overline{h}^{(e)} = 0 \tag{1.12}$$

Линеаризированные граничные условия для компонент индуцированного электромагнитного поля на поверхностях раздела сред запишутся в виде

$$\overline{h} = \overline{h}^{(e)}, \quad \overline{e} = \overline{e}^{(e)} \quad \text{при} \quad z = \pm h \tag{1.13}$$

Линеаризованные выражения для $\overline{p}$ и m_x, m_y имеют вид

$$\overline{p} = \int_{-h}^{h} \overline{f} dz, \quad m_x = \int_{-h}^{h} f_x z dz, \quad m_y = \int_{-h}^{h} f_y z dz$$

$$\overline{f} = \frac{1}{c}(\overline{j}_* \times \overline{H}_0) + \frac{1}{c}(\overline{j}_0 \times \overline{h}) + \frac{\sigma}{c}(\overline{e} \times \overline{H}_0) + \tag{1.14}$$

$$+ \frac{\sigma}{c^2}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} \times \overline{H}_0 \times \overline{H}_0\right) + \frac{\overline{j}_0}{4\pi\sigma} \operatorname{div} \overline{e}$$

При получении (1.14) было использовано соотношение

$$\int_{w-h}^{w+h}(\bar{j}_0\times\bar{H}_0)\,dz\approx\int_{-h}^{h}(\bar{j}_0\times\bar{H}_0)\,dz \tag{1.15}$$

которое верно с точностью до линейных членов относительно перемещения w.

Таким образом, линейная система уравнений (1.4), (1.11), (1.12) вместе с соотношениями (1.14) и граничными условиями (1.13) является полной и замкнутой для поставленной выше задачи малых магнитоупругих колебаний токонесущей пластинки.

Уравнения электродинамики (1.11) и (1.12) целесообразно привести к удобному для решения виду

$$\Box\bar{h}-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial\bar{h}}{\partial t}=-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\,\mathrm{rot}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\times\bar{H}_0\right)$$

$$\mathrm{div}\,\bar{h}=0,\qquad \mathrm{rot}\,\bar{h}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\bar{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\times\bar{H}_0\right)+\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{e}}{\partial t} \tag{1.16}$$

$$\mathrm{div}\,\bar{e}=-\frac{1}{c}\,\mathrm{div}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\times\bar{H}_0\right)$$

$$\Box\bar{h}^{(e)}=0,\qquad \mathrm{rot}\,\bar{h}^{(e)}=\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{e}^{(e)}}{\partial t},\qquad \mathrm{div}\,\bar{h}^{(e)}=0$$

$$\left(\Box=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$$

§ 2. Решение искомой задачи магнитоупругих колебаний токонесущей пластинки приводится в случае, когда упругие и электромагнитные возмущения не зависят от координаты x и компоненты тангенциального перемещения $u\equiv0$. Существование подобных решений будет доказано в дальнейшем, то есть должно быть доказано, что $p_1\equiv0$.

Решение уравнений (1.4) и (1.16), а также граничные условия (1.13) представим в виде плоских монохроматических волн

$$w=w_0\exp i(\omega t-ky),\qquad v=v_0\exp i(\omega t-ky) \tag{2.1}$$

$$\bar{Q}=\bar{Q}_0(z)\exp i(\omega t-ky)$$

где под Q подразумевается любая из компонент векторов внешнего и внутреннего электромагнитного полей

(ω — частота колебаний, k — волновое число)

Определим сначала компоненты векторов $\bar{h}$, $\bar{e}$ и далее с их помощью выражения для пондеромоторных сил и моментов.

Подставляя (2.1) в (1.16), получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения для определения $\bar{h}_{0z}$ и $\bar{h}_{0z}^{(e)}$:

$$\frac{d^2h_{y0}}{dz^2}-\nu^2h_{y0}=-\frac{16\pi^2\sigma j_0 i\omega w_0}{c^3}$$

$$\frac{d^2h_{z0}}{dz^2}-\nu^2h_{z0}=-\frac{16\pi^2\sigma j_0\omega k w_0 z}{c^3}$$

$$\frac{d^2h_{x0}}{dz^2}-\nu^2h_{x0}=0$$

$$\frac{dh_{z0}}{dz}+ikh_{y0}=0,\qquad \frac{dh_{z0}^{(e)}}{dz}+ikh_{y0}^{(e)}=0$$

$$\frac{d^2h_{z0}^{(e)}}{dz^2}-\nu_1^2h_{z0}^{(e)}=0,\qquad \frac{d^2h_{x0}^{(e)}}{dz^2}-\nu_1^2h_{x0}^{(e)}=0$$

$$\frac{d^2h_{y0}^{(e)}}{dz^2}-\nu_1^2h_{y0}^{(e)}=0$$

$$\left(\nu^2=k^2+\frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}-\frac{\omega^2}{c^2},\qquad \nu_1^2=k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)$$

Решив эти дифференциальные уравнения, используя граничные условия на поверхностях $z=\pm h$, $\overline{h}_0=\overline{h}_0^{(e)}$ и условия затуханий решений внешней задачи на бесконечности, получим следующие значения для векторов $\overline{h}_0$ и $\overline{h}_0^{(e)}$

$$h_{x0}=h_{x0}^{(e)}=0,\qquad h_{y0}=-\frac{A_0}{\nu^2}\left[\nu\delta\,\mathrm{ch}\,\nu z-1\right]$$

$$h_{z0}=-\frac{A_0ik}{\nu^2}\left[\delta\,\mathrm{sh}\,\nu z-z\right]$$

$$h_{y0}^{(1)}=-\frac{A_0}{\nu^2}\left[\nu\delta\,\mathrm{ch}\,\nu h-1\right]\exp\left[-\nu_1(z-h)\right]$$

$$h_{y0}^{(2)}=-\frac{A_0}{\nu^2}\left[\nu\delta\,\mathrm{ch}\,\nu h-1\right]\exp\left[\nu_1(z+h)\right] \tag{2.2}$$

$$h_{z0}^{(1)}=-\frac{A_0ik}{\nu^2}\left[\delta\,\mathrm{sh}\,\nu h-h\right]\exp\left[-\nu_1(z-h)\right]$$

$$h_{z0}=\frac{A_0ik}{\nu^2}\left[\delta\,\mathrm{sh}\,\nu h-h\right]\exp\left[\nu_1(z+h)\right]$$

В (2.2) приняты следующие сокращения:

$$A_0=\frac{16\pi^2\sigma j_0 i\omega w_0}{c^3},\qquad \delta=(1+\nu_1h)\left(\nu\,\mathrm{ch}\,\nu h+\nu_1\,\mathrm{sh}\,\nu h\right)^{-1}$$

Зная значения векторов индуцированного магнитного поля, легко получить значения векторов индуцированного электрического поля

$$e_y = e_z = e_y^{(e)} - e_z^{(e)} = 0$$

$$e_{x0} = -\frac{A_0 i\omega}{\nu^2 c}\left[\delta \operatorname{sh} \nu z - z\right]$$

$$e_{x0}^{(1)} = -\frac{A_0 i\omega}{\nu^2 c}\left[\delta \operatorname{sh} \nu h - h\right] \exp\left[-\nu_1 (z - h)\right] \tag{2.3}$$

$$e_{x0}^{(2)} = \frac{A_0 i\omega}{\nu^2 c}\left[\delta \operatorname{sh} \nu h - h\right] \exp\left[\nu_1 (z + h)\right]$$

Определим теперь значения пондеромоторных сил и моментов (1.14) при помощи (2.2) и (2.3)

$$f_x = 0, \qquad f_y = -\frac{1}{c} j_0 h_z = -\frac{A_0 i k j_0}{\nu^2 c}\left[\delta \operatorname{sh} \nu z - z\right] \exp(i\omega t - ky)$$

$$f_z = -\frac{4\pi\sigma j_0 z}{c^2} e_x - \frac{16\pi^2 \sigma j_0^2 i\omega z^2}{c^4} - \frac{1}{c} j_0 h_y =$$

$$= -\left\{\frac{4\pi\sigma j_0 A_0 i\omega}{\nu^2 c^3}(\delta \operatorname{sh} \nu z - z) z + \frac{A_0 j_0 z^2}{c} - \right.$$

$$\left. - \frac{A_0 j_0}{c\nu^2}(\delta\nu \operatorname{ch} \nu z - 1)\right\} \exp(i\omega t - ky) \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) и (2.1) в уравнения движения (1.4) и выполняя соответствующие интегрирования, получим характеристическое уравнение, определяющее частоты поперечных колебаний пластинки

$$Dk^4 - 2\rho h\omega^2 = \frac{32\pi^2 \sigma j_0^2 i\omega}{\nu^2 c^4}\left\{\left(h - \delta \operatorname{sh} \nu h - \frac{\nu^2 h^3}{3}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(k^2 - \frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}\right)\left[\frac{(\nu h \operatorname{ch} \nu h - \operatorname{sh} \nu h)\delta}{\nu^2} - \frac{1}{3}h^3\right]\right\} \tag{2.5}$$

$$\left(D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\right)$$

Для частот продольных колебаний получим независимое характеристическое уравнение, определяющее частоты собственных продольных колебаний, так как $p_z = 0$

$$\omega^2_{\text{пр}} = \frac{Ek^2}{(1-\nu^2)\rho}$$

Уравнение (2.5) является трансцендентным и поэтому нахождение его корней связано со значительными трудностями. Исследование корней уравнения (2.5) существенно упрощается при предположении

$$|\nu^2| h^2 \ll 1 \tag{2.6}$$

Принимая $k^2h^2 \ll 1$, что соответствует точности, принятой в теории пластин, из выражения ν^2 при пренебрежении величиной $\frac{\omega^2}{c^2}$ по сравнению с $\left|\frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}\right|$ получим, что для выполнения условия (2.6) достаточно выполнение следующих условий:

$$(\mathrm{Re}\,\omega)^2 \ll \alpha^2, \qquad (\mathrm{Jm}\,\omega)^2 \ll \alpha^2, \qquad \alpha = \frac{c^2}{4\pi\sigma h^2} \tag{2.7}$$

Для подтверждения реальности условий (2.7) и, следовательно, условия (2.6) приведем некоторые характерные для данной задачи значения α^2 и частоты собственных колебаний пластинки ω_0^2.

В случае медной пластинки толщиной $2h=2$ см и при волновом числе $k = 0.01\ см^{-1}$ имеем

$$\omega_0^2 = 4.19\cdot 10^2\ сек^{-2}; \qquad \alpha^2 = 1.8\cdot 10^4\ сек^{-2}$$

то есть ω_0^2 и α^2 отличаются более, чем на порядок.

Отметим также, что медь является наиболее хорошо проводящим материалом. Для металлов, проводимость которых меньше проводимости меди, указанное отличие будет больше.

При справедливости условия (2.6) характеристическое уравнение (2.5) можно привести к следующему виду:

$$Dk^4 - 2\rho h\omega^2 = -\frac{32\pi^2\sigma j_0^2 i\omega k h^4}{3c^4} \tag{2.8}$$

Асимптотические значения векторов электромагнитного поля (2.2) и (2.3) при $|\nu^2|\,h^2 \ll 1$ будут иметь вид

$$h_{y0} = \frac{8\pi^2\sigma j_0 i\omega w_0}{c^3}\left[(h^2 - z^2) + kh\left(\frac{h^2}{3} - z^2\right)\right]$$

$$h_{z0} = \frac{8\pi^2\sigma j_0 \omega k w_0 z}{3c^3}\left[(1 + kh)\,z^2 - 3h^2\left(1 + \frac{kh}{3}\right)\right]$$

$$e_{x0} = -\frac{8\pi^2\sigma j_0 \omega^2 w_0 z}{3c^3}\left[(1 + kh)\,z^2 - 3h^2\left(1 + \frac{kh}{3}\right)\right]$$

§ 3. Рассмотрим данную задачу на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел, сформулированной и обоснованной в работах [1, 2]. Эта гипотеза наряду с предположениями Кирхгофа-Лява о тонкой пластинке (оболочке) предполагает, что тангенциальные компоненты вектора индуцированного электрического поля и нормальная компонента вектора индуцированного поля постоянны вдоль толщины пластинки (оболочки).

Для данной задачи эта гипотеза аналитически запишется следующим образом:

$$v_y = v(y, t) - z\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad w = w(y, t)$$

$$e_x = \varphi(y, t), \qquad e_y = \psi(y, t), \qquad h_z = f(y, t) \tag{3.1}$$

С помощью принятой гипотезы магнитоупругости по методу, изложенному в [1, 2], представляется возможным выразить остальные компоненты электромагнитного поля и, следовательно, компоненты векторов $\bar{P}$ и $\bar{m}$ с помощью функций (φ, ψ, f, v, w), а также привести разрешающие уравнения относительно функций (φ, ψ, f).

Из уравнений электродинамики для внутренней области (1.11) при пренебрежении токами смещения по сравнению с токами проводимости компоненты электромагнитного поля h_x, h_y, h_z определятся следующим образом:

$$h_x = \frac{4\pi\sigma}{c}\psi z + \frac{h_x^+ + h_x^-}{2}$$

$$h_y = \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c}\varphi\right)z - \frac{8\pi^2\sigma H_0 (h^2 - z^2)}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{h_y^+ + h_y^-}{2} \tag{3.2}$$

$$e_z = -\frac{c}{4\pi\sigma}\frac{\partial h_x}{\partial y}$$

Осредняя (1.11) по толщине пластинки, получим следующие уравнения относительно неизвестных функций φ, f, ψ:

$$\frac{4\pi\sigma}{c}\psi = \frac{h_x^+ - h_x^-}{2h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c}\varphi = \frac{h_y^+ - h_y^-}{2h} \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

В (3.2) и (3.3) $h_x^\pm$, $h_y^\pm$ — значения компонент h_x и h_y при $z = \pm h$, соответственно.

Система уравнений (3.3) должна решаться совместно с уравнениями электродинамики вне областей, занимаемых пластинкой (1.12), и с граничными условиями (1.13).

В силу непрерывности значений компонент электромагнитного поля на поверхностях пластинки и однородности уравнений электродинамики для внутренней области (3.3) и внешних областей (1.12) получим

$$\psi = \varphi = f \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (3.2), определим значения остальных компонент векторов электромагнитного поля в области, занимаемой пластинкой

$$h_x = e_z = 0, \quad h_y = \frac{8\pi^2\sigma j_0 (h^2 - z^2)}{c^3}\frac{\partial w}{\partial t} \tag{3.5}$$

Индуцированное электромагнитное поле во внешних областях будет равно

$$\bar{h}^{(e)} = \bar{e}^{(e)} = 0$$

Компоненты сил и моментов выражаются следующим образом:

$$p_x = -\frac{j_0}{c}\int_{-h}^{h}\frac{\partial h_z}{\partial y} z\,dz = 0, \qquad m_x = 0$$

$$p_y = -\frac{j_0}{c}\int_{-h}^{h} f\,dz = 0$$

$$p_z = \int_{-h}^{h}\left(-\frac{4\pi\sigma j_0}{c^2}\varphi z - \frac{16\pi^2\sigma j_0^2 z^2}{c^3}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{c} j_0 h_y\right)dz = 0$$

Таким образом, характеристическое уравнение для определения частот продольных колебаний пластинки, полученное с помощью гипотезы магнитоупругости тонких тел, совпадает с уравнением собственных колебаний

$$Dk^4 - 2\rho h\omega_0^2 = 0 \tag{3.6}$$

то есть с точностью принятой гипотезы наличие стороннего тока не оказывает влияния на частоту колебаний.

Сопоставление уравнений (3.6) и (2.8) может, в данном частном случае колебаний, привести к критерию применимости гипотезы магнитоупругости в задачах токонесущих тонких тел.

Для этого запишем решение уравнения (2.8) в виде

$$\frac{\operatorname{Re}\omega}{\omega_0} = \pm\sqrt{1-\beta^2}, \quad \frac{\operatorname{Im}\omega}{\omega_0} = \beta \quad \text{при} \quad \beta < 1$$

$$\frac{\operatorname{Re}\omega}{\omega_0} = 0, \quad \frac{\operatorname{Im}\omega}{\omega_0} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1} \quad \text{при} \quad \beta > 1 \tag{3.7}$$

$$\beta = \frac{8\pi^2\sigma j_0^2 k h^3}{3\rho c^4}$$

Наименьшее расхождение частот ω и ω_0 будет, очевидно, при $\beta \ll 1$. В этом случае частоту магнитоупругих колебаний, полученную на основе точного решения, можно представить посредством частоты собственных колебаний следующим образом:

$$\omega \approx \omega_0(1 + i\beta), \qquad \beta \ll 1$$

Если пренебречь малым затуханием, обусловленным мнимой частью частоты ω, аналогично тому, как при рассмотрении задач свободных колебаний пренебрегается малым конструктивным демпфированием, то из условия $\beta \ll 1$ получим соотношение для j_0^2, при несоблюдении которого возможно большое различие между частотами магнитоупругих колебаний токонесущей пластинки, полученными на основе точного решения и с помощью гипотезы

$$j_0^2 \ll \gamma^2 = \frac{3c^4\eta}{8\pi^2\sigma k h^3} \tag{3.8}$$

В табл. 1 приведены для наглядности численные значения плотности электрического тока γ для пластинок ($h = 1$ *см*, $k = 0.01$ *см*$^{-1}$) из различных проводящих материалов, а также значения удельной теплоты нагрева Q_1, обусловленной выделением джоулева тепла $Q_1 = \gamma^2\sigma^{-1}$.

Таблица 1

Материал пластинки	$\gamma \cdot 10^3$ *ампер·см*$^{-2}$	$Q_1 \cdot 10^3$ *ватт·см*$^{-3}$
Алюминий	9.217	0.238
Медь	10.76	0.198
Латунь	16.55	1.229

Условие (3.8) является необходимым условием в задачах, решаемых на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел и оно ограничивает применимость этой гипотезы при наличии стороннего электрического тока, то есть при значениях начального тока $j_0 \approx \gamma$, результаты, полученные на основе гипотезы, могут быть, вообще говоря, неверными.

Отметим однако, что численные значения, полученные для Q_1, являются очень большими. При значениях плотности j_0, соизмеримых с γ, необходимо также учитывать довольно большой температурный нагрев, обусловленный выделением в токонесущих пластинках джоулева тепла, и, следовательно, зависимость физико-механических характеристик материала пластинок от температуры.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 26 IV 1976

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ, Կ. Բ. ԿԱԶԱՐՅԱՆ

ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ՍԱԼԵՐԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ԲԱՐԱԿ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԻՊՈԹԵԶԻ ԿԻՐԱՌԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրվում է հոսանքատար սալի տատանումների խնդիրը ինչպես ճշգրիտ դրվածքով, այնպես էլ մագնիսաառաձգականության հիպոթեզի հիման վրա։

Հաճախականությունների համար ստացված արդյունքների համեմատությունը ցույց է տալիս, որ մագնիսաառաձգականության հիպոթեզի կիրառելիությունը սահմանափակվում է սալի մեջ էլեկտրական հոսանքի խտության մեծությամբ և հետևաբար սեփական մագնիսական դաշտի լարվածության մեծությամբ։

ON APPLICABILITY OF THE MAGNETOELASTICITY HYPOTHESIS OF THIN BODIES TO CURRENT-CARRYING PLATE VIBRATION PROBLEMS

M. V. BELUBEKIAN, K. B. KAZARIAN

Summary

The current-carrying plate vibration problem is solved both on the basis of the magnetoelasticity hypothesis of thin bodies and in exact statement.

The comparison of the results concerning vibration frequency shows that the applicability of the magnetoelasticity hypothesis is restricted by the density of electric current in the plate and therefore by the strength of its magnetic field.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
3. *Белубекян М. В.* К уравнениям магнитоупругости токонесущих пластин. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 2.
4. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. М.—Л., ГИТТЛ, 1949.