## 

**Շեխանիկա** 

### XXVII, Nº 5, 1974

Mexanetter

### С. П. КУКУДЖАНОВ.

# СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ИИЛИНДРИЧЕСКОП ОБОЛОЧКИ. НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕПСТВИЕМ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ, РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ВСЕП ПОВЕРХНОСТИ

Неследуется влияние предзарительно денствующей изгибающей поперечной нагрузки, равномерно распределенной по всей новерхности консольной цилиндрической оболочки, на собственные частоты и формы собственных колебаний. Предполагается, что своболный край полкреилен жестким кольцом, причем соедянение кольца с оболочкой шарикрное. Основное внимание уделяется наименьники частотам, практически наяболее важным и плаболее чувствительным к внешани воздействиям.

При решении задачи для метода Бубнова-Галеркина вспользовалепредложенный нами нуть определения оптимальных начальных приближения собственного числа [2], с помощью которого можно избежать значательных грудностей, сиязанных с учетом большого числя членов нскомого вядя. Начальные приближения были получены в виде формул. При учете же более высоких приближений использовалась ЭВМ. Получены кравые изменения низших частот в зависимости от геометрических лараметров, Проведено сравнение с влюстным случаем колебания, когда на оболючку действует раднальное внешнее дазление. Сравнениепоказало, что расхождение между низшими настотами для тух случае : будет существенным по мере позрастания интенсивности внешней нагрузки. Кроме того, необходимо отметить, что налячие зоны растяжения окружного напряжения финет на некоторые частоты в сторону их увелачения при возрастании интенсивности предварительно действующей нагрузка. Высшие частоты практически не зависят от внешней изгрузки для приемлемого интерзала 110 ссть когда нагрузка ис превосходит своего критического значения).

Путь отыскания оптитенных начальных приближений собственного числа и главных гармоник рица соя метолов Бубнова-Галеркина и Ратца заключается в следующем. В отличие от обычно используемого приема, инжсы коорлинатных функций заранее не фиксируются и представляют собой некоторую наперед и известную последовательность  $(n_k)$ . Поэтому для искомой функции у березся следующее презставляют:

$$\varphi = 1 + \cdots + n_n \varphi_n$$
 (\*)

Тогда определение оптимальных начальных приближении собствезного числа и главных гармоник ряда сводится к отысканию пидексов (*n<sub>k</sub>*), реализующих минамум соотаетствующего приближения собственного C. H. Kyley Leadings

числа при фиксированном числе гармоник: пначе товоря, наименьшее расхождение б между точным значением собственного числа P и фиксированным k-ым приближением  $l^{k-1}$  будет для тех индексов  $\{n_k\}$ , при которых  $P^{(k)}$  принимальное значение

$$b = |P - P^{(k)}|, \qquad P^{(k)} - \min P^{(k)} |a_k\rangle$$

так, есля в ряде () ограничиться двумя членами, то наплучшим вторым приближением булет

$$\min P \cdot (n_1, n_2) = P_{ij}^{(1)}(n_{ij}^n, n_j^n)$$

а индексам  $n_1^i$ ,  $n_2^0$ , реализующам этот минимум, соответствует нари главных гармовик, яанлучним образом приближающаяся к точному решению по сравнению со эсеми возможными парами.

Перехоля к решению задачи, как обычно, преднолагаем, что предварительно-нипряженное состояние безмомению, тогда

$$T_{\gamma}^{0} = \rho R^{2} \cos \varphi, \qquad T_{\gamma}^{0} = -\rho R \cos \varphi, \qquad S_{\gamma}^{0} = -2\rho R^{2} \sin \varphi \qquad (1)$$

 $R_{2}$ ,  $R_{2}$  — координаты в осевом и окружном направлениях; R — раднус оболочки, p интенсавность эненивей нагрузки;  $T_{1}^{0}$ ,  $T_{2}^{0}$ , осеван, окружная и слингающее усилия безмом итного состояния.

Уравнение колебания предварительно-напряженной оболочки в форме Батдорфа [1] имеет вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi^2} = \frac{1}{Eh} \left( T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - 2\Sigma \frac{\partial \omega}{\partial (\partial z)} \right) = \frac{R}{Eg} \frac{\partial \omega}{\partial t^2} = 1$$

$$\frac{h^2}{12R^2 (1 - z^2)} + - \nabla^{-1} \nabla^{1} = 1$$
(2)

\[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]
 \[
 \]

Полставляя (1) в (2), получком уравление с переменными коэффиинентами.

Будем искать решение в виде следующего двойного ряда:

$$= \cos w t \sum_{m_k \in \mathcal{L}} A_{rop_k} \sin \frac{m - R}{l} \cos n_k \neq (3)$$

который удовлетворяет условням своболного опирания. И плексы *т.* как обычно, принимают значения 1, 2, 3.... а инлексы (*n*<sub>s</sub>) представляют собой некоторую намеред неизвестную последовательность целых чисел. Отметим, что общность при этом не вирушается, так как каждое  $n_k$  (для фиксированного *m*) может пробегать все значения натурального ряда чисел. Используя метод Бубнова-Галеркина в сочетании с данным подходом, получаем следующую однородную систему линейных алгебранческих уравнении относительно коэффициентов А<sub>тик</sub>:

$$\begin{split} A_{mn_{k}}(M_{mk} = i) + \frac{p_{a}}{2} \Big[ -A_{mn_{k}-1}(A_{mn_{k}-1}) - A_{mn_{k}-1}(d_{m(n_{k}-1)}) + \\ &+ \sum_{i} \left( \Delta_{n_{k}-1}^{i} A_{nn_{k}-1} \right) - A_{nn_{k}-1}(A_{mn_{k}-1}) \Big] \Big]^{-1} \\ (4) \\ M_{mk} = \frac{m^{2}}{7^{2}} \left( z \theta_{mk} + \delta \theta_{mk}^{-1} \right), \quad \theta_{mk} = \frac{(m^{2} - m^{2})^{2}}{\gamma^{2} m^{2}}, \quad \gamma = \frac{l}{\pi k^{2}} \\ z - \left[ 12 \left( 1 - \gamma^{2} \right)^{-1}, \quad d_{m(n_{k}-1)} - \left( n_{k} - 1 \right) \left( n_{k} - 1 \right) - r \right] \\ r_{m} = \frac{m^{2} \pi^{2}}{3} - \frac{1}{2}, \quad \delta = \left( \frac{R}{h} \right)^{2}, \quad p_{0} = \frac{p}{E} \left( \frac{R}{h} \right)^{3} \end{split}$$

 $\Delta_{n_k\pm 1}^{lm} = (-1)^{m-1} \frac{8im}{i^2 - m^2} \left[ \frac{i^2}{i^2 - m^2} \mp (n_k \pm 1) \right], \quad i = \Omega_{0^{m^2}}, \quad \Omega_0 = \frac{\gamma R^2}{Eg} \delta$ 

Эта система имеет нетривнальное решение тогда и голько тогда, когда се определитель А=0.

Ограничиваясь в начальном приближении шестью членами ряда (3), получаем систему шести уравнении относительно коэффициентов  $A_{mn_k}$ . Последовательность  $(n_k)$  сразу выявляется на основании вида системы (4), а именно ири m = 1 ( $n_1$   $n_2 = n - 1$ , n = n - 1), аналогично и для m = 2. Это иструдно усмотреть из следующего рассуждения, например, если в ряде (3) ограничиться двуми членами с неизвестными индексами  $n_1$  и (причем  $u_2 = n_1 \pm 1$ ), то получим систему двух несвизанных уравлении

 $A_{mn}\left(M_{mn}-i\right)=0, \quad \bullet \quad A_{mn}\left(M_{mn}-i\right)=0.$ 

Поэтому, чтобы получить связанную систему. необходимо взять  $n_2 = n_1 - 1$  (чтобы учесть коэффициент . либо  $n_2 - n_1 - 1$  (для учета коэффициента  $A_{xn_1-1}$ ).

Таким образом, определение оптимального приближения х для запион задачь сволится к нахождению наименьшего значения 2 только по одному индексу и.

Ограничнися в первом приближения лаумя членами m = 1 ( $n_1 = n - n_2 = n - 1$ ). После раскрытия соответствующего определителя для квадратного уравнения относительно  $\lambda$  получаем следующее выражение для меньшего корня:

$$\lambda = - \left( F_{v}^{*} = 1 \right) \left( \overline{F_{v}^{*}} + p_{v}^{*} x^{*} \right)$$
 (6)

$$F_{2} = M_{1n} \pm M_{1(n+1)}, \qquad z_{1} = (n^{2} - 3.8) (n^{2} - 2n - 2.8)$$
(7)

Определам сталаонарную гочку для функция М<sub>10</sub>, при этом и будем чигать тепрерывным аргументом. Получаем единственную стационарную точку

$$\label{eq:M0} \mathcal{M}_0 = \left[\frac{\pi R}{l} \left(\mathbf{z}^{-\tau_l} - \frac{\pi R}{l}\right)\right]^{\tau_l},$$

Петко показать, что это почка миномума Далее, учитывал интервалы возрастания к убывания составляющих функций, иструдно получить, тто минимум выражения (б) реализуется ≥ интервале

$$n_0 - \gamma_1 < n_0 < (n_0 - 1) - \gamma_2$$

7 , Y2 допол тення до целого числа.

Отметим следующее: если мы обычным способом бузем брать и тексы п. 0  $n_2 = 1,...$  и просчитаем частоту, учитывая два члена, то полу чим значение  $\lambda$ , которое отличается от  $\lambda$ , просчитанного но формуле (6) (например, для случая R/h 170,  $l R = 1, p = 0.25p_n$ ) более, чем в 25 раз.

Это обусловлено тем, что обычным снособом, ограничиваясь небольниим числом членов ряда, мы не в состояния уловить главные гармоники, расположенные здали от мало существенных начяльных гармоних, гогла как при рекомендуемом полходе берутся главные гармоники, за счет чего достигаются хорошие начальные вриближения.

В данном примере пара главных гармоник *m<sup>0</sup>* – 8, *m<sup>0</sup>* – 9; в случае же более тонкой оболочки такой же дляны, например, *R h* – 500 *n*<sub>1</sub><sup>0</sup> – 11, *n<sup>0</sup>* – 12 по мере уменьшения толщины значения главных гармоник будут увеличиваться.

Еще более отдалены главные гармоннки для второй частоты (m=2) и тем более для третьей (m=3) и т. д.

Первое приближение для второй частоты, аналогично предылущему, получаем при m = 2  $(n_1 - n, n_2 = n - 1)$ , а для третьей частоты при m = 3  $(n_1 - n, n_2 = n + 1)$ . тогда

$$i_{1} = \frac{1}{2} \left( F_{14}^{2} + F_{14}^{2} + p_{14}^{2} \right) \quad (i = 2, 3)$$

$$F_{14} = M_{14} - M_{i_{1}(n-1)}, \quad z_{i}^{2} = (n^{2} - \gamma_{i}) \left[ (n + 1)^{2} - \gamma_{i} \right]$$

$$p_{n} = 13.8, \quad \gamma_{n} = 39.2$$

Аналогично преды и нему получаем, что тін 🦾 реализуется при

$$n^{0} - \gamma_{0} = n_{0} = (n_{0} - 1) + \gamma_{1} = n^{0} = \left(\frac{2\pi R}{l} \left(e^{-l_{0}} - \frac{\pi R}{l}\right)\right)^{l_{0}}$$

эля гретьего собственного значения & в интервале

$$n^{00} - \gamma_{\mathfrak{s}} = n_{\mathfrak{s}} \leq (n^{00} + 1) + \gamma_{\mathfrak{s}}, \qquad n^{00} = \left[\frac{3\pi R}{l} \left(\varepsilon^{-1} - \frac{\pi R}{l}\right)\right]^{1}$$

где ть - соответствующие дополнения по целого.

Далее учитывая три члена ряла (3), после раскрытия соответствуюшего определителя получаем кубическое уравнение относительно λ.

Для получения зальнейших приблажений с учетом данного подхола на ЭВМ система алгебранческих уравнений записыяалась и матричном виде

$$(B - iE) A = 0, \qquad A = \{a, b, c\}, \qquad B = \{B_{nk}^{iq}\}, \qquad E = \{1\}$$

$$B_{mk}^{iq} = \{a, b, c\}, \qquad \left[(q - k)\left[(n - \Delta n) - q\right]\left((q - k)\left[(n - \Delta n) + q\right] - 2\right) - \left(\frac{m^2 \pi^2}{3} - \frac{1}{2}\right)\right] 0.1 p_0 \Delta r \qquad (m = i)$$

$$B_{mk} = (-1)^{m+1} \delta_{[q-k], -1} \frac{Sim}{i^2 - m^2} \left\{\frac{i}{i^2 - m^2} - (q - k)\left[(n - \Delta n) - q\right]\right\} 0.1 p_0 \Delta r \qquad (m = i)$$

 $\Delta i_{i} = 1$  (i = j),  $\Delta i_{i} = 0$  (i = j),  $\Delta r = 0, 1, 2, ...$ 

При этом и и и, представляются в виде

$$\begin{vmatrix} n_{h} \\ n_{q} \end{vmatrix} = (n - \Delta n) + \begin{vmatrix} k \\ q \end{vmatrix}, \quad \Delta n = 0, \ 1, \ 2, \dots, \\ \begin{vmatrix} k \\ q \end{vmatrix} = 0, \ -1, \ +1, \ -2, \dots.$$

В данном представления (n + M) яграет роль начального фиксир на ванного значения  $n_1$  (M характеризует неремещение n и точки к точке в интервале (8), начиная от  $n = n_0 - \gamma$ ), k соответствует членам n - 1, n+1, n-2, n+2....

При решении брались члены m=1, 2 (k=0, -1, -2, -3), m=3, 4(k=0, -1) го есть 20 главных гармоник В зависимости от величним внешней нагрузки  $p_0$  необходамос' число главных гармоник для получе ния достаточно хорошых результатов (таких, когда расхождение между предылушам и последующим приближением составляет величина порядка 0.5%) различное. Так для малых значений  $p_0 < 0.3p_{w_0}$  достаточно учесть шесть членов m=1, 2  $(k=0, \pm 1),$  ибо добавление последующих членов песущественно. По мере увеличения  $p_0$  увеличивается и необходимое число главных гармовик. При наибольших значениях – то есть близких к  $p_{w_0}$ , учет всех вышеотмеченных 20 главных гармовик дает постаточно хорошее приближение, такое, что добавление дальнейших членов при увеличени  $m = \frac{1}{2}$  не приводит к сколько-зибудь существенным изменениям. В частноста, добавление соседних членов m = 1, 2 $(k=\pm 4), m=3, 4$   $(k=\pm 2), m=5$  (k=0) изменяет значения минимального собственного числа матрицы на величину порядка 0.5%.



Па фиг. 1 л 2 представлены графики изменения чанменьшей частьзы в сависимости от величивы интенсивности поперечной натрузки

различных геометрических нараметров. По оси ординат отложено отповление  $m_0^-(n_0)$ , а по оси абсинсе величник  $\sigma_0^- \sigma_{0+}$ . При этом  $\sigma_0^$ максимальное окружное напряжение для далони за начи, постоянное окружное напряжение — соответствующее кри ическое напряжение и случае действия разиального внешнего навления q:  $m_0(n_0)$  наименьшая частога в случае отсутствия нагрузки (p=0);  $n_0$  соответствующее число окружных воли. Заметим, что  $\sigma_0 = pR(n, n_0) = qR/h$  и, следонательно,  $p = p(a_0)$ . На этих фитурах для сравзения приведена универсаль ан кривам (c) наменения наименьшей частоты для оболочек средней длины в случае ностоянного окружчого на при этом то аосциес отложена величина с с 11 приведеных графиков, вструдно видеть, что при равных напря-

24

жениях (или гри равных абсолютных значениях питеисивности понеречной и радиальных нагрузок) наименьшие частьсть и гут существенно различаться по мере возраслания нагрузки. Кроме того, из полученных кривых (фиг. 2) легко заметить, что изменения геоистрических параметров (*UR*, *R k*) для оболочек средней длины при-



водит к сравнительно небольним изменениям наиме в ней частоть При  $p \to p_1$  ( $p_* = критическая$  всличина задачи устойчивости [2]) получаем  $w \to 0$ .



На фиг. 3 для оболочки (l, R = 1, R, n = 300) приведения нас иять наименьших частот (кривые  $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1$ ), которые при  $p \to 0$ стремятся соответственно к вааменьшим частотам незагруженной оболочки  $\phi_0$  ( $m = 1, n = n_0$ ),  $\phi_0$  ( $m = 1, n = n_0 = 1$ ).  $\phi_0$  ( $m = 1, n = n_0 = -2$ ),  $\phi_0$  ( $m = 1, n = n_0 + 1$ ),  $(m = 1, n = n_0 = 31)$  (в частности, для раснатриваемов оболочки n = 9). Отсюда иструдно видеть что если при отсутствои насрузки расхоб дерне между частотами сравнительно небольшое, то но мере увеличения приложенной нагрузки расхождения между инми существение наусняются. Кроме гого, необходимо заметить, что и личне зоны растяжения окружного напряжения (от действия внешней нагрузка) вляяет на что торые частоты в сторону их увеличения при возрастания интенсиваются действующей вагрузка.

На фит. З но оси ординат отложена величина есле ( $m_{0}$ , при этом  $m_{0}(n_{0}) = m_{0}$  ( $m = 1, m = n_{0}$ ) – наименьная частота свободной оболочки когда в продольном направлении образуется одна полуволия ( $n_{0}$  соответствующее число окружных воли).

На фиг. 4 для той же оболочка приведены графика измененны частот (кривые 1., 2., 3., 4.), которые при  $p \to 0$  стремятся соятветственно к частотам незагруженной оболочка  $w_n$  ( $m = -n^m$ ), ( $m = 2, n = n^0 - 1$ ),  $w_n(m = 2, n = n^0 - 1$ ), ( $m = 2, n = n^0 - 2$ ) (для рассматриваемой оболочки  $n^0 = 131$ . На фиг. 4 по осв ордават отложена величкиа ( $n^0$ ), г.с. ( $m = 2, n = n^0 - 1$ ) наименьшая в астота незагруженной оболочки, когда в продольном награвлении

 $2^{\circ}$ 

#### С. Н. Кукуджанов

образуются две полуволны: n<sup>a</sup> – соответствующее число окружных волн.

Выснике жи частоты, соответствующие частотам незагруженной оболочки для *т* 3, 4, ..., праки чески не зависят от внешней вагрузки доя присмлемого интервала, то есть, хогда загрузка не превосходит своего критического значения.

HIBCTHEVE MATEMETIKE AND TECP.

Поступила 9 VI 1973.

### ॥. ६ मानिकाश्चित्राच

Ялганду пильтыцизать дри, 2004.084.20.946 г.0.2660.06 (9.355350.6 г.666) Истолировил яща экуадиу эдилизир истилиро идия яйхиланитыгу

## Ումփուփում

Ուսում ասիրվում է կոնոոլագյունույին քնադանվիլ եմ տատատնում հերը ձևի և հայտան մաձանականաքիշուների վրա նախապես գործող քադանքի ամբողջ մակերևուլքով ամասարաչափ բաշիզված ծուղ լայնական բեսի ազդեղունյունը։

Հիժոտկան այսպրոմիլունը Տատկացվում է աժենափորը հատիական իլուններին, պոնը շաժարվում են դործնականորեն ավելի կարևոր և ավելի դղալուն արտարին աղղեցուքյունների նկատվաժը։

### FIGENVIBRATION OF CYLINDRICAL SHELLS UNDER TRANSVERSAL LOAD I NIFORMLY DISTRIBUTED THROUGHOUT THE SURFACE

### S. N. KUKU ANOV

### м н н н к у

The cifect of a preliminary acting bending transversal load, onlformly distributed throughout the surface of a console cylindrical shell, on the eigenfrequencies and the patterns of eigenvibrations is investigated.

The emphasis is laid upon the lowest irequencies which are practically most significant and most sensitive to external effects.

#### **THTEPATSPA**

- Botdort S. B. A simplified method of dasta stability analysis for thin cylind for shells, NACA Rep., 1947, Nº 847.
- Анк смонов С. И. Устойчивость цилиндрической оболочка пря изгибе всперечной силой, ранномерно распределенной по всей поверхности или приложенной из вой не. МТТ, 3, 1971.