

С. С. ШАГИНЯН

НЕКОТОРЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ
С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ, УСИЛЕННОЙ НА СВОЕЙ
ГРАНИЦЕ УПРУГИМИ НАКЛАДКАМИ

Исследованию контактных задач для упругих тел усиленных упругими креплениями в виде накладок (стрингеров) малой толщины, которые тесно примыкают к попересам передачи нагрузок от стрингеров упругим телам и представляют большой интерес для инженерной практики, посвящены работы многих авторов. Подробную библиографию по этому вопросу можно найти в работах [1, 2]. Здесь же только отметим, что контактная задача для полуплоскости, усиленной на конечном отрезке своей границы приваренной к ней упругой накладкой малой толщины, с точки зрения выяснения особенностей контактных напряжений на концах упругой накладки была рассмотрена в работе [3]. Позже некоторые контактные задачи для полуплоскости, усиленной различными способами нагруженными и скрепленными с основанием накладками, рассматривались в работах [4, 5]. В работе [6] рассмотрена контактная задача для плоскости с круговым отверстием, граница которой усилена упругой кольцевой накладкой малой толщины.

В настоящей работе рассматриваются некоторые контактные задачи для плоскости с круговым отверстием, усиленной на конечных отрезках своей границы упругими накладками малой толщины.

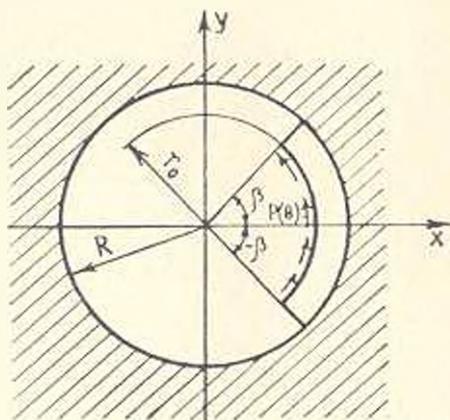
Для характерных в исследуемой задаче механических величин — касательных контактных напряжений — получены формулы, содержащие в явном виде присущие этим напряжениям особенности в окрестностях концов упругих накладок.

Эти контактные задачи рассматриваются для случая упругих пластин с круговым отверстием, находящихся в обобщенном плоском напряженном состоянии, а также для случая упругого пространства с бесконечным цилиндрическим отверстием, находящегося в условиях плоской деформации.

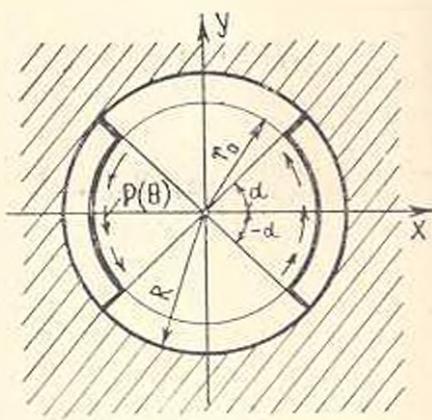
Указанные контактные задачи, как нам представляется, ставятся и решаются в настоящей работе впервые.

1. *Постановка задач и вывод определяющих уравнений.* Пусть плоскость с круговым отверстием радиуса $R=1$, что не нарушает общности, вдоль конечного дугового отрезка своей границы усилена приваренной к ней упругой накладкой, имеющей вид трапеции, которая ограничена дугами двух концентрических окружностей и отрезками радиусов. Предположим, что накладка имеет достаточно малую толщину. Кроме того, пусть на внутренней стороне этой накладки действует касательная нагрузка интенсивности $p(\theta)$ (фиг. 1).

Во второй задаче предполагается, что такая же упругая плоскость вдоль симметрично расположенных конечных отрезков своей границы усилена одинаковыми упругими накладками такой же формы, как и выше, нагруженными симметричными внешними касательными нагрузками (фиг. 2).

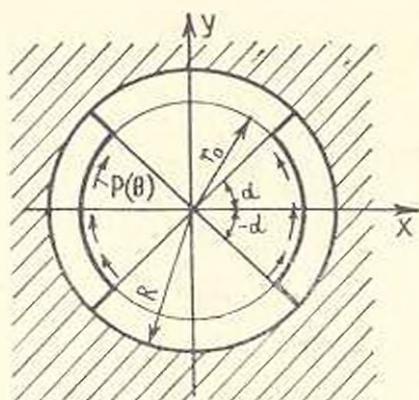


Фиг. 1.



Фиг. 2.

Рассматривается также случай кососимметрично нагруженной накладки (фиг. 3).



Фиг. 3.

Цель нашей работы заключается в определении закона распределения контактных напряжений вдоль отрезков креплений упругих накладок с основанием. В дальнейшем будет рассматриваться только первая контактная задача. Решение остальных задач можно получить вполне аналогичным способом.

Приняв те же физические предположения, что и в работе [6] и поступив точно так же, как в этой работе [6], находим, что решение указанной выше задачи после некоторых операций сводится к решению следующего сингулярного интегро-дифференциального уравнения:

$$\int_{-\beta}^{\beta} \left\{ \frac{1}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} + K(t-s) \right\} \Psi'(s) ds = i\Pi'(t) - ig(t), \quad (-\beta < t < \beta) \quad (1.1)$$

при граничных условиях

$$\Psi'(-\beta) = 0, \quad \Psi'(\beta) = 1 \quad (1.2)$$

где первый интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши. Здесь параметр λ , зависящий от геометрических и упругих характеристик накладки и плоскости, имеет значения

$$\lambda = \frac{R^2}{2r_0 h} \frac{(1-\nu_1)(1-2\nu_2)E_2}{(1-\nu_2)(1-\nu_1)E_1}, \quad \lambda = \frac{R^2}{2r_0 h} \frac{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)E_2}{(1-\nu_2)E_2}$$

соответственно случаям плоского деформированного состояния и обобщенного плоского напряженного состояния. Постоянные E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно, отмеченные индексами 1 и 2, относятся к накладкам и плоскости соответственно. Далее,

$$g(t) = g_1(t)g_2(\beta), \quad g_1(t) = \int_{-\beta}^t p(s) ds, \quad (-\beta \leq t \leq \beta)$$

$$K(t-s) = \frac{\ln 2 + \kappa(1 + \ln 2)}{2(1+\kappa)} \sin(t-s) + \frac{1}{2} \sin(t-s) \ln \left| \sin \frac{t-s}{2} \right| + \\ + \frac{1-\kappa}{2(1+\kappa)} [\pi - |t-s|] \cos(t-s) \operatorname{sign}(t-s) \quad (-\beta \leq t, s \leq \beta)$$

Входящая сюда постоянная κ имеет различные значения для различных состояний упругого тела [7], а именно $\kappa = 3 - 4\nu_2$ в случае плоской деформации и $\kappa = (3 - \nu_2)/(1 + \nu_2)$ для обобщенного плоского напряженного состояния.

Легко видеть, что функция $K(t-s)$ в квадрате $-\beta < t, s < \beta$ непрерывна как функция двух переменных и имеет интегрируемые частные производные первого порядка.

Контактное напряжение будет даваться формулой

$$\tau(t) = \frac{r_0^2}{R^2} g_1(\beta) \Psi'(t), \quad (-\beta < t < \beta < \pi) \quad (1.3)$$

Таким образом, решение рассмотренной контактной задачи приводится к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.1) при граничных условиях (1.2), ядро которого представлено в виде суммы известного ядра Гильберта $(2\pi)^{-1} \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2}$ и регулярного ядра в виде функций $K(t-s)$. Иными словами, в ядре уравнения (1.1) выделены его сингу-

лярная часть в виде ядра Гильберта и регулярная часть в виде непрерывной функции $K(t-s)$.

2. Об особенностях контактных напряжений вблизи концов упругих накладок. Для выяснения этого вопроса заметим, что потенциальная энергия деформации плоскости с круговым отверстием вследствие ее деформации контактными напряжениями должна быть величиной конечной. Поэтому возможные особенности контактных напряжений вблизи концов упругих накладок должны быть интегрируемого порядка. Из сказанного и из (1.3) следует, что имеет место представление

$$\Psi'(t) = \frac{\gamma_0(t)}{(\beta-t)^{\gamma_1}(\beta+t)^{\gamma_2}}, \quad (-\beta < t < \beta)$$

где $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$, $\gamma_0(t)$ — функция, удовлетворяющая условию Гельдера на отрезке $-\beta < t < \beta$.

Исходя из этого представления и учитывая известную связь между ядрами Гильберта и Коши

$$\operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} = i \left[1 + 2 \frac{\sigma}{\zeta - \sigma} \right], \quad \zeta = e^t, \quad \sigma = e^s$$

на основе результатов [8], которые относятся к поведению интеграла типа Коши вблизи концов линии интегрирования, легко показать, что

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$$

Таким образом, имеет место следующее представление:

$$\Psi'(t) = \frac{\gamma_1(t)}{1 - 2 \cos t - 2 \cos^2 \beta}, \quad (-\beta < t < \beta) \quad (2.1)$$

где $\gamma_1(t) = \gamma_0(t) |2 \cos t - 2 \cos^2 \beta|^{-1/2} | \beta^2 - t^2 |^{-1/2}$ — функция класса H на отрезке $[-\beta, \beta]$.

Отметим, что подробное исследование вопроса об особенностях напряжений в некоторых классах смешанных задач теории упругости содержится в работе [9].

3. Приведение сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.1) с граничным условием (1.2) к бесконечной системе уравнений. Сначала приводим следующие интегральные соотношения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\beta}^{\beta} \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} T_{2m} \left(\frac{\sin \frac{s}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right) \frac{\cos \frac{s}{2} ds}{\sqrt{2 \cos s - 2 \cos^2 \beta}} \\ & = \begin{cases} 0, & m = 0 \\ \frac{1}{2} \operatorname{csc} \frac{\beta}{2} U_{2m-1} \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right) \cos \frac{t}{2}, & m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\beta}^{\beta} \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} T_{2m-1} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{s}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) \frac{\sec \frac{s}{2} ds}{\sqrt{2\cos s - 2\cos \beta}} = \\ & = \frac{1}{2} \operatorname{csc} \frac{\beta}{2} U_{2m-2} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) \sec^2 \frac{t}{2}, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.2)^*$$

нужные нам в дальнейшем. Отметим, что они получаются из известного соотношения

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(y) dy}{(y-x)|1-y|} = \pi U_{n-1}(x), \quad (n = 1, 2, \dots), \quad |x| < 1$$

при помощи элементарных выкладок. В последней формуле $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и $U_n(x) = \sin[(n+1) \arccos x] \sin \arccos x$, ($n = 0, 1, \dots$) — известные многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

Далее, ввиду (2.1), решение уравнения (1.1) представим формулой

$$\begin{aligned} \psi'(t) = & \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sqrt{2\cos t - 2\cos \beta}} \sum_{m=0}^{\infty} x_{2m} T_{2m} \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right) + \\ & - \frac{\sec \frac{t}{2}}{\sqrt{2\cos t - 2\cos \beta}} \sum_{m=1}^{\infty} x_{2m-1} T_{2m-1} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

с неизвестными коэффициентами $|x_{2m}|_{m=0}^{\infty}$ и $|x_{2m-1}|_{m=1}^{\infty}$.

Отметим, что первая сумма в формуле (3.3) с точностью постоянного множителя представляет собой симметричную часть неизвестных контактных напряжений, а вторая сумма — кососимметричную часть тех же напряжений.

Интегрируя обе части (3.3) в пределах $(-\beta, t)$ и учитывая (1.2), будем иметь

$$\begin{aligned} \psi(t) = & x_0 \left| -2 - \arcsin \left(\sin \frac{t}{2} \operatorname{csc} \frac{\beta}{2} \right) \right| - \\ & - \frac{1}{2} \operatorname{csc} \frac{\beta}{2} \sum_{m=1}^{\infty} x_{2m} (2m)^{-1} \sqrt{2\cos t - 2\cos \beta} U_{2m-1} \left(\sin \frac{t}{2} \operatorname{csc} \frac{\beta}{2} \right) - \end{aligned}$$

* Аналогичные соотношения приведены в работе [10] в несколько другом виде.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \sec \frac{\beta}{2} \csc \frac{\beta}{2} \sum_{m=1}^{\infty} x_{2m-1} (2m-1)^{-1} \sqrt{2 \cos t - 2 \cos \beta} \sec \frac{t}{2} \times \\
 & \quad \times U_{2m-2} \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

Отсюда коэффициент x_0 определяется непосредственно, а именно: $x_0 = \kappa^{-1}$.

Подставив (3.3) и (3.4) в (1.1) и используя соотношения (3.1) и (3.2), известным способом [2] получим бесконечную систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов

$$\begin{aligned}
 x_{2k} + \left(2\pi \sin^2 \frac{\beta}{2} \right)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} x_{2m} (2m)^{-1} [A_{2m-1, 2k-1} + B_{2m-1, 2k-1}] = \\
 = \left(\pi \sin \frac{\beta}{2} \right)^{-1} b_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{2k-1} + \left(2\pi \sin^2 \frac{\beta}{2} \right)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} x_{2m-1} (2m-1)^{-1} [A_{2m-2, 2k-2} + B_{2m-2, 2k-2}] = \\
 = \left(\pi \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right)^{-1} b_{2k-2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 A_{2m-1, 2k-1} &= \left[\lambda - \frac{1-x}{1+x} \right] \int_{-x}^x U_{2m-1} \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right) \times \\
 & \quad \times U_{2k-1} \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right) (2 \cos t - 2 \cos \beta) dt, \quad m, k = 1, 2, \dots \\
 B_{2m-1, 2k-1} &= \int_{-x}^x U_{2m-1} \left(\frac{\sin \frac{s}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right) \sqrt{2 \cos s - 2 \cos \beta} ds \int_{-x}^x G(t-s) \times \\
 & \quad \times U_{2k-1} \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right) \sqrt{2 \cos t - 2 \cos \beta} dt, \quad m, k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

$$b_{2k-1} = \int_{-\beta}^{\beta} \left[\lambda \pi^{-1} \arcsin \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right) - \pi^{-1} R(t) - \lambda g(t) \right] \times$$

$$\times U_{2k-1} \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right) \sqrt{2 \cos t - 2 \cos \beta} dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$A_{2m-2, 2k-2} = \left[\lambda - \frac{1-x}{1+x} \right] \int_{-\beta}^{\beta} U_{2m-2} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) \times$$

$$\times U_{2k-2} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) (2 \cos t - 2 \cos \beta) \sec^2 \frac{t}{2} dt, \quad m, k = 1, 2, \dots$$

$$B_{2m-2, 2k-2} = \int_{-\beta}^{\beta} U_{2m-2} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{s}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) \sqrt{2 \cos s - 2 \cos \beta} \sec \frac{s}{2} ds \times$$

$$\times \int_{-\beta}^{\beta} G(t-s) U_{2k-2} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) \sqrt{2 \cos t - 2 \cos \beta} \sec \frac{t}{2} dt, \quad m, k = 1, 2, \dots$$

$$b_{2k-2} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\beta}^{\beta} [1 - 2g(t)] \sqrt{2 \cos t - 2 \cos \beta} \sec \frac{t}{2} U_{2k-2} \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) dt$$

$$k = 1, 2, \dots$$

где

$$G(t-s) = -\frac{1}{2\pi} - \frac{2x - (x+1) \ln 2}{\pi(1-x)} \cos(t-s) -$$

$$-\frac{1}{\pi} \cos(t-s) \ln \left| \sin \frac{t-s}{2} \right| + \frac{1-x}{2\pi(1+x)} [\pi - |t-s|] \sin(t-s) \operatorname{sgn}(t-s)$$

$$(-\beta \leq t, s \leq \beta)$$

$$R(t) = \int_{-\beta}^{\beta} K(t-s) \frac{\cos \frac{s}{2} ds}{\sqrt{2 \cos s - 2 \cos \beta}}, \quad [R(t) = -R(-t), \quad -\beta < t < \beta < \pi]$$

4. *Исследование бесконечных систем линейных уравнений.* Обратимся сначала к бесконечной системе (3.6). Для ее исследования оценим суммы

$$S_{2k-2} = \left(2\pi \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1)^{-1} |A_{2m-2, 2k-2} + B_{2m-2, 2k-2}|, \quad k=1, 2, \dots$$

При помощи неравенства Коши-Буняковского будем иметь

$$S_{2k-2} \leq \left(2\pi \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)^{-1} \left[\sum_{m=1}^{\infty} (2m-1)^{-1} \right]^{1/2} \left[(M_{2k-2})^{1/2} + (M'_{2k-2})^{1/2} \right]$$

где

$$M_{2k-2} = \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m-2, 2k-2}^2, \quad M'_{2k-2} = \sum_{m=1}^{\infty} B_{2m-2, 2k-2}^2$$

или же

$$S_{2k-2} \leq \left(4 \sqrt{2} \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)^{-1} [(M_{2k-2})^{1/2} + (M'_{2k-2})^{1/2}] \quad (4.1)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \left| i - \frac{1-x}{1+x} \right| 2\pi \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} U_{2k-2} \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) \times \\ &\quad \times \sqrt{2 \cos t - 2 \cos \beta} \cos \frac{t}{2} \end{aligned}$$

Коэффициентами Фурье последней функции по полной ортогональной в $L^2(0, \beta)$ $\left(\sqrt{2 \cos t - 2 \cos \beta} \right)$ системе многочленов

$\left\{ U_{2m-2} \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) \right\}_{m=1}^{\infty}$ будут как раз коэффициенты $\{A_{2m-2, 2k-2}\}_{m=1}^{\infty}$.

Следовательно, на основании известного равенства Парсеваля

$$\begin{aligned} M_{2k-2} &= \left| i - \frac{1-x}{1+x} \right|^2 4\pi^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \int_0^{\beta} \sqrt{2 \cos t - 2 \cos \beta} \sec^2 \frac{t}{2} \times \\ &\quad \times \left| U_{2k-2} \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) \sqrt{2 \cos t - 2 \cos \beta} \cos \frac{t}{2} \right|^2 dt \end{aligned}$$

Оценив входящий сюда интеграл, для M_{2k-2} окончательно находим

$$(M_{2k-2})^{1/2} \leq \left| i - \frac{1-x}{1+x} \right| 4\pi \sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2}, \quad k=1, 2, \dots \quad (4.2)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\Omega(s) = 2\pi \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{s}{2} \int_{-1}^1 G(t-s) \times U_{2m-2} \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) \sqrt{2 \cos t - 2 \cos \beta} \operatorname{sec} \frac{t}{2} dt$$

Совершенно аналогичным образом будем иметь

$$(M_{2m-2}^*)^2 < 8\pi \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \left| \sqrt{\beta \sin \frac{\beta}{2}} N \right. \quad (4.3)$$

Здесь

$$N^2 = 4Q^2 \beta^2 + \frac{4Q}{\pi} [\beta^2 - 2\beta^2 \ln(2\beta) + 2\beta^2(1 + \ln 2) + 4\beta^2 \ln \beta - 4\beta^2 \ln \sin \beta] + 2\pi^{-2} 2\beta^2 \ln^2(2\beta) - 2\beta^2 \ln(2\beta) + + \beta^2 - (2 + \ln 4) [2\beta^2 \ln(2\beta) - \beta^2] - 4\beta^2 - 4\beta^2 \ln 2 + 4\beta^2 \ln^2 2$$

$$Q = \frac{1}{2\pi} + \frac{2x + (x+1) \ln 2}{\pi(1+x)} + \frac{x-1}{2\pi(x-1)}$$

Для вполнерегулярности системы (3.4) достаточно, чтобы выполнялось условие $S_{2k-2} < q < 1$ ($k = 1, 2, \dots$). С учетом (4.1), (4.2) и (4.3) это условие примет вид

$$\lambda < \pi^{-3/2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{csc} \frac{\beta}{2} - N \left| \sqrt{\frac{2}{\pi} \beta \operatorname{csc} \frac{\beta}{2} - \frac{1-x}{1+x}} \right|$$

Теперь докажем, что для любого значения параметра λ ($0 \leq \lambda < \infty$) бесконечная система квазирегулярна. С этой целью заметим следующее. Исследование системы (3.6) с ядром $(2m-1)^{-1} A_{2m-2, 2m-2}$, к которой сводится сингулярное интегро-дифференциальное уравнение (1.1) с граничным условием (1.2) в случае только ядра Гильберта $(2\pi)^{-1} \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2}$, содержится в работах [4, 10]. Покажем, что добавление к этому ядру нового ядра $(2m-1)^{-1} B_{2m-2, 2m-2}$, которое обусловлено наличием в структуре ядра исходного интегро-дифференциального уравнения (1.1) регулярной части в виде функции $K(t-s)$, не нарушает регулярности исходной бесконечной системы в смысле ее квазиполнорегулярности. Действительно, если обозначим через $K_{2m-2, 2m-2} = (2m-1)^{-1} B_{2m-2, 2m-2}$, то при помощи неравенства Коши-Буняковского получим

$$L_{2k-2} = \sum_{m=1}^{\infty} |K_{2m-2, 2k-2}| \leq \left[\sum_{m=1}^{\infty} (2m-1)^{-2} \right]^{1/2} \times \\ \times \left[\sum_{m=1}^{\infty} B_{2m-2, 2k-2}^2 \right]^{1/2} = 8^{-1/2} = (M_{2k-2})^{1/2}$$

С другой стороны, как легко видеть, коэффициенты $|B_{2m-2, 2k-2}|_{m, k=1}^{\infty}$ являются коэффициентами Фурье функции

$$f(t, s) = 4\pi^{-2} \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} G(t-s) \cos^2 \frac{t}{2} \cos^2 \frac{s}{2}$$

на системе многочленов

$$\left\{ U_{2m-2} \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) U_{2k-2} \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) \right\}_{m, k=1}^{\infty}$$

которые составляют полную ортогональную систему в классе функций, квадратично суммируемых с весом $\rho_1(t, s)$ ($\rho_1(t, s) = \rho(t)\rho(s)$) на квадрате $0 < t, s \leq \beta$. Тогда вследствие неравенства Бесселя двойной ряд

$$\sum_{m, k=1}^{\infty} B_{2m-2, 2k-2}^2$$

сходится. Следовательно, сходится и ряд [11]

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{2k-2}, \quad M_{2k-2} = \sum_{m=1}^{\infty} B_{2k-2, 2m-2}^2$$

Отсюда, по крайней мере,

$$M_{2k-2} = O[(2k-2)^{-1+\varepsilon}], \quad k \rightarrow \infty$$

где ε —сколь угодно малое положительное число.

Приняв во внимание выражение для L_{2k-2} будем иметь

$$L_{2k-2} = O[(2k-2)^{-1+(1+\varepsilon)/2}], \quad k \rightarrow \infty$$

что и доказывает высказанное выше утверждение.

Далее, можно показать, что свободный член этой системы стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ со скоростью не менее, чем $(2k-2)^{-1}$. В этом легко убедиться, если в выражении свободного члена произвести замену переменного интегрирования следующим образом:

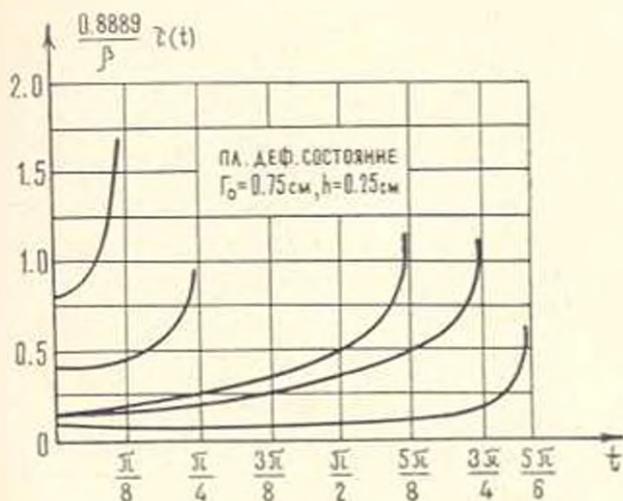
$$\cos \varphi = \operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}, \quad 0 < \varphi < \pi$$

а затем пользоваться формулой интегрирования по частям.

Совершенно аналогичным образом исследуется бесконечная система (3.5).

Перейдем к обсуждению числовых результатов. Численная реализация полученных формул произведена на ЭВМ «Наури-2». При этом предполагалось, что внешняя нагрузка, действующая на накладку, распределена равномерно с интенсивностью $p(\theta) = 1 \text{ кг/см}^2$, а толщина накладки — $h = 0.25 \text{ см}$. Остальные параметры варьировались различными способами. Эти вариации включали выбор материалов контактирующих пар накладка-плоскость с круговым отверстием, а также длину участка контакта.

При решении соответствующих бесконечных систем линейных уравнений ограничивались лишь решением системы десяти уравнений, поскольку ее решение с точностью по крайней мере шестизначных цифр сопало с решением системы из восьми уравнений. Здесь же отметим, что при вычислении коэффициентов бесконечных систем, которые представлены в виде интегралов, ограничивались такой точностью, чтобы в дробных частях значений этих интегралов совпадали по крайней мере трехзначные цифры. В таблицах указаны решения соответствующих систем линейных уравнений для различных контактирующих пар и для различных значений длины участка контакта. При вычислении контактных напряжений ограничивались одиннадцатью членами. На графиках (фиг. 4) показано влияние изме-



Фиг. 4.

нения длины участка контакта на закон распределения контактных напряжений для одной и той же контактирующей пары. При этом было замечено следующее: если при возрастании параметра λ контактное напряжение имеет лишь малоозначимую тенденцию уменьшения, то изменение параметра β явным образом влияет на распределение контактных напряжений под упругой накладкой. Точнее, с возрастанием параметра β контактное напряжение под упругой накладкой существенно уменьшается. Эта закономер-

ность полностью согласуется с принятой нами физической моделью накладки.

Значения коэффициентов в формуле (3.3) для различных значений физических и геометрических параметров приведены в таблицах.

Таблица 1

$\gamma_1 = 0.3927$					
	$\gamma_1 = 0.7960$ Fe:Al	$\gamma_2 = 2.1167$ Al:Zn	$\gamma_3 = 3.4863$ Бронза:Fe	$\gamma_4 = 4.2593$ Латунь:Fe	$\gamma_5 = 5.7102$ Al:Fe
x_2	-0.0007	-0.0084	-0.0215	-0.0265	-0.0344
x_4	0.0010	0.0032	0.0041	0.0045	0.0047
x_6	0.0003	0.0011	0.0018	0.0022	0.0028
x_8	0.0002	0.0008	0.0009	0.0010	0.0014
x_{10}	0	0.0002	0.0004	0.0005	0.0006
x_{12}	0	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003
x_{14}	0	0	0	0	0.0001
x_{16}	0	0	0	0	0
x_{18}	0	0	0	0	0
x_{20}	0	0	0	0	0

Таблица 2

$\gamma_2 = 0.7854$					
	$\gamma_1 = 0.7960$ Fe:Al	$\gamma_2 = 2.1167$ Al:Zn	$\gamma_3 = 3.4863$ Бронза:Fe	$\gamma_4 = 4.2593$ Латунь:Fe	$\gamma_5 = 5.7102$ Al:Fe
x_2	-0.0421	-0.0467	-0.0581	-0.0617	-0.0671
x_4	-0.0015	-0.0001	-0.0013	-0.0018	-0.0028
x_6	-0.0003	0.0005	0.0009	0.0013	0.0013
x_8	-0.0004	-0.0002	0.0003	0.0005	0.0008
x_{10}	0.0006	0.0008	0.0011	0.0012	0.0013
x_{12}	0.0002	0.0003	0.0005	0.0005	0.0007
x_{14}	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005
x_{16}	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004
x_{18}	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004
x_{20}	0.0002	0.0002	0.0003	0.0002	0.0003

Таблица 3

$\lambda_3 = 1.9635$

	$\lambda_1 = 0.7960$ Fe:Al	$\lambda_2 = 2.1167$ Al:Zn	$\lambda_3 = 3.4863$ Бронза:Fe	$\lambda_4 = 4.2593$ Латунь:Fe	$\lambda_5 = 5.7102$ Al:Fe
x_2	-0.1191	-0.1017	-0.0941	-0.0982	-0.0888
x_4	-0.0317	-0.0326	-0.0221	-0.1078	-0.0324
x_6	-0.0121	-0.0138	-0.0121	-0.0287	-0.0143
x_8	-0.0050	-0.0063	-0.0053	-0.0152	-0.0067
x_{10}	-0.0025	-0.0034	-0.0027	-0.0086	-0.0035
x_{12}	-0.0012	-0.0019	-0.0014	-0.0050	-0.0018
x_{14}	0.0002	-0.0001	0	-0.0022	-0.0002
x_{16}	0.0018	0.0020	0.0016	0	0.0012
x_{18}	0.0002	0.0001	0.0002	-0.0004	0
x_{20}	0.0008	0.0007	0.0007	-0.0002	0.0004

Таблица 4

$\lambda_4 = 2.3562$

	$\lambda_1 = 0.7960$ Fe:Al	$\lambda_2 = 2.1167$ Al:Zn	$\lambda_3 = 3.4863$ Бронза:Fe	$\lambda_4 = 4.2593$ Латунь:Fe	$\lambda_5 = 5.7102$ Al:Fe
x_2	-0.1251	0.1538	-0.1792	-0.1905	-0.2078
x_4	-0.0222	-0.0185	-0.0404	-0.0452	-0.0528
x_6	-0.0084	-0.0038	-0.0122	-0.0137	-0.0155
x_8	-0.0034	0	-0.0030	-0.0046	-0.0032
x_{10}	-0.0015	0.0008	-0.0003	-0.0031	0.0004
x_{12}	-0.0007	0.0007	0.0004	-0.0008	0.0013
x_{14}	-0.0002	0.0007	0.0008	0.0001	0.0015
x_{16}	0.0005	0.0013	0.0013	0.0010	0.0019
x_{18}	0.0014	0.0021	0.0021	0.0019	0.0025
x_{20}	0.0007	0.0012	0.0012	0.0010	0.0014

Таблица 5

$\lambda_5 = 2.6180$

	$\lambda_1 = 0.7960$ Fe:Al	$\lambda_2 = 2.1167$ Al:Zn	$\lambda_3 = 3.4863$ Бронза:Fe	$\lambda_4 = 4.2593$ Латунь:Fe	$\lambda_5 = 5.7102$ Al:Fe
x_2	-0.0520	-0.0480	-0.0461	-0.0456	0.0433
x_4	-0.0144	-0.0179	-0.0199	-0.0207	-0.0115
x_6	-0.0091	-0.0114	-0.0125	-0.0130	-0.0038
x_8	-0.0056	-0.0053	-0.0077	-0.0080	0.0001
x_{10}	-0.0036	-0.0045	-0.0047	-0.0049	0.0018
x_{12}	-0.0020	-0.0030	-0.0031	-0.0032	0.0024
x_{14}	-0.0017	-0.0022	-0.0022	0.0018	0.0024
x_{16}	-0.0011	-0.0015	-0.0023	-0.0008	0.0023
x_{18}	-0.0004	-0.0005	-0.0007	-0.0007	0.0023
x_{20}	0.0008	0.0009	0.0009	0.0006	0.0029

При помощи этих таблиц построены графики контактных напряжений для значения параметра $\lambda = \lambda_1$.

В заключение приношу глубокую благодарность Н. Х. Арутюняну за внимание к работе.

Ереванский государственный
университет

Поступила 26 VI 1973

Ս. Ս. ՇԱՀԻՆԻԱՆ

ԻՐ ԵԶՐՈՒԹ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՎԵՐԱԳԻՐՆԵՐՆԵՐՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ԿՈՐ ԱՆՑՔՈՎ
ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ՔԱՆԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՑԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում դիտարկվում են մի քանի կոնտակտային խնդիրներ կլոր անցքով առաձգական հարթուքյան համար, որն իր եզրագծի աղեղային հատվածների վրա ուժեղացված է փոքր հաստությու՛ն ունեցող առաձգական վերադիրներով: Նշված խնդիրների լուծումը բերվում է սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանը որոշակի եզրային պայմանների դեպքում: Ստացված սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների կորիզը բաղկացած է երկու գումարելիներից, որոնցից առաջինով՝ Հիլբերտի կորիզով, պայմանավորված է նրա եզակի մասը, իսկ երկրորդը իրենից ներկայացնում է քառակուսու մեջ որոշված անընդհատ ֆունկցիա: Այդ որոշիչ հավասարումների համար ստացված են էֆեկտիվ լուծումներ: Վերջիններիս թվային արդյունքները մի քանի դեպքերի համար ներկայացված են աղյուսակներում և գծազբերում:

CERTAIN CONTACT PROBLEMS FOR A PLANE WITH A CIRCULAR HOLE REINFORCED WITH ELASTIC STIFFENERS ON ITS BOUNDARY

S. S. SHAHINIAN

S u m m a r y

Certain contact problems are considered for an elastic plane with a circular hole, reinforced above the arc segment of its boundary with elastic stiffeners of a small thickness. The solution of the above problems is reduced to that of singular integral-differential equations under specified boundary conditions. Efficient solution for these equations are found.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Муки Р., Стернберг Э. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке. Прикл. мех., Тр. америк. о-ва инж.-мех., т. 35, № 4, 1968, 124—135.
2. Arutunian N. K. and Mkhitarian S. M. Some contact problems for a semiplane with elastic stiffeners. Friends in elasticity and thermoelasticity. Witold Nowacki Anniversary Volume. Wolters-Nordorff Publ., 1971. 3—20.
3. Арутюнян Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, т. 32, № 2, 1968, 632—646.
4. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, т. 33, № 5, 1969, 813—843.
5. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. 25, № 2, 1972, 15—35.
6. Шагинян С. С. Передача нагрузок от кольцевой накладки к плоскости с круговым отверстием. МТТ, № 5, 1972, 178—183.
7. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во „Наука“, М., 1966.
8. Мухелишвили Н. И. Сягулярные интегральные уравнения. Изд-во „Наука“, М., 1968.
9. Ворович И. И. О некоторых смешанных задачах теории упругости для полусы. Сб. Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. Изд-во „Наука“, М., 1972.
10. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К периодической задаче для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, т. 35, № 1, 1971, 172—178.
11. Уиттекер Э., Ватсон Г. Курс современного анализа, т. 3. Физматгиз, М., 1963.
12. Канторович Л., Крылов В. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1950.