ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 5, 1972 Механика

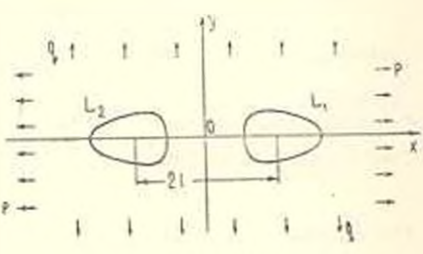
Г. М. ИВАНОВ

ОБРАТНЫЕ УПРУГАЯ И УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО МАССИВА, ОСЛАБЛЕННОГО ДВУМЯ ОДИНАКОВЫМИ ВЫРАБОТКАМИ

Определяется форма контуров двух одинаковых выработок в изотропном массиве либо при условии постоянства тангенциального напряжения на указанных контурах, либо при условии одновременности перехода в пластическое состояние всех точек краев выработок.

Для массива с одной выработкой подобные задачи решены Г. П. Черепановым [5, 6].

§1. Рассмотрим плоскую деформацию изотропного массива, ослабленного двумя одинаковыми выработками. Будем считать, что к контурам выработок приложены постоянное нормальное давление P и равные нулю касательные усилия, а на бесконечности действуют усилия сдвига τ и растягивающие усилия p (вдоль линии центров) и q (поперек линии центров). Задача состоит в определении такой формы выработок, при которой тангенциальное напряжение, действующее на их контурах, является постоянной величиной.



Фиг. 1

Введем прямоугольную систему координат XOY, направляя ось OX по линии центров и совмещая начало координат с точкой, равноудаленной от центров выработок. Расстояние между центрами обозначим через $2l$, контуры выработок—через L_1 и L_2, а область вне этих контуров—через S (фиг. 1).

Компоненты напряжений, возникающие в массиве, выразим через голоморфные функции $\Phi(z)$ и $\Psi_*(z)$ [4, 3]

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z)$$
$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[(\bar{z} - z)\Phi'(z) + \Psi_*(z)] \tag{1.1}$$

Комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi_*(z)$, удовлетворяющие граничным условиям на бесконечности

$$\sigma_x^\infty = p, \quad \sigma_y^\infty = q, \quad \tau_{xy}^\infty = \tau \tag{1.2}$$

представим в виде

$$\begin{gathered}\Phi(z) = \Gamma + \Phi_0(z), \quad \Psi_*(z) = \Gamma_* + \Psi_0(z) \\ \Gamma = (p+q)/4, \quad \Gamma_* = (q-p)/2 + i\tau\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ — функции голоморфные в области S и имеющие на бесконечности порядок $O(z^{-2})$. Следуя работе [1], представим их в интегральной форме Коши

$$\Phi_0(z) = \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} \frac{\Phi_0(t_n)\,dt_n}{t_n - z}, \qquad \Psi_0(z) = \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} \frac{\Psi_0(t_n)\,dt_n}{t_n - z} \tag{1.4}$$

В силу симметрии задачи функции $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ являются четными, а контуры L_1 и L_2 — симметричными относительно начала координат, то есть

$$\Phi_0(-z) = \Phi_0(z), \quad \Psi_0(-z) = \Psi_0(z); \quad t_2 = -t_1 \tag{1.5}$$

На основании последних равенств представления (1.4) можно привести к виду

$$\begin{gathered}\Phi_0(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) = \Phi_1(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\Phi_1(t_1)\,dt_1}{t_1 + z} \\ \Psi_0(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) = \Psi_1(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\Psi_1(t_1)\,dt_1}{t_1 + z}\end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ — функции, голоморфные в области вне правого контура L_1.

Отобразим конформно внешность единичной окружности γ на внешность контура L_1 с помощью функции

$$z = \omega(\zeta) = R\omega_0(\zeta) + l, \quad \omega_0(\zeta) = \zeta + \sum_{s=1}^{\infty} m_s \zeta^{-s} \tag{1.7}$$

где R и m_s — неизвестные постоянные, характеризующие размер и форму искомых контуров.

Функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$, голоморфные в плоскости ζ вне γ, представим рядами Лорана

$$\Phi_1(z) = \Phi_{11}(\zeta) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \zeta^{-k}, \quad \Psi_1(z) = \Psi_{11}(\zeta) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k \zeta^{-k} \tag{1.8}$$

Введем обозначения

$$z_0 = \omega_0(\zeta), \quad t_0 = \omega_0(\sigma), \quad \sigma = e^{i\theta} \in \gamma \tag{1.9}$$

В некоторой области вблизи правого контура, где имеет место неравенство

$$R\,|t_0 + z_0| < 2l \qquad (1.10)$$

справедливо разложение

$$(t_1 + z)^{-1} = \frac{1}{R}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \varepsilon^{r+1}(t_0 + z_0)^r \qquad (1.11)$$

Здесь $\varepsilon = R/2l$ — малый параметр.

Разложения (1.8) и (1.11) подставим в интегралы (1.6). Ограничиваясь слагаемыми, содержащими ε в степени не выше четвертой, будем иметь

$$\Phi_2(z) = A_0 + A_1 z_0 + A_2 z_0^2, \quad \Psi_2(z) = B_0 + B_1 z_0 + B_2 z_0^2 \qquad (1.12)$$

где

$$A_0 = (\varepsilon^2 + 2m_1\varepsilon^4)a_2 - \varepsilon^3 a_3 + \varepsilon^4 a_4$$
$$A_1 = -2\varepsilon^3 a_2 + 3\varepsilon^4 a_3, \quad A_2 = 3\varepsilon^4 a_2 \qquad (1.13)$$

Постоянные B_k определяются формулами вида (1.13), если в них a_n заменить на b_n.

На контуре L_1 должны выполняться краевые условия

$$\sigma_r = P, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_\theta = Q \qquad (1.14)$$

где Q — неизвестная постоянная величина.

На основании равенств [4]

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = \sigma^2 \frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})$$
$$\sigma_r + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y \qquad (1.15)$$

и выражений (1.1), граничные условия (1.14) запишем в виде

$$\Phi(t_1) + \overline{\Phi(t_1)} = 2A, \quad 4A = P + Q \qquad (1.16)$$

$$\sigma^2 \frac{\omega_0'(\sigma)}{\overline{\omega_0'(\sigma)}}\left[(\bar{t}_1 - t_1)\Phi'(t_1) + \Psi_*(t_1)\right] = B, \quad 2B = Q - P \qquad (1.17)$$

Принимая во внимание выражения (1.3), (1.6), (1.12), представим условие (1.16) таким образом:

$$2\Gamma + A_0 + \overline{A}_0 + A_1\omega_0(\sigma) + \overline{A}_1\overline{\omega_0(\sigma)} + A_2\omega_0^2(\sigma) +$$
$$+ \overline{A}_2[\overline{\omega_0(\sigma)}]^2 + \Phi_{11}(\sigma) + \overline{\Phi_{11}(\sigma)} = 2A \qquad (1.18)$$

Применяя метод Н. И. Мусхелишвили [4], найдем отсюда, что $\Phi_{11}(\zeta) = 0$, то есть $a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = 0$. Следовательно,

$$\Phi(z) = \Gamma \qquad (1.19)$$

Кроме того, из условия (1.18) находим искомое значение тангенциального напряжения на контурах выработок

$$\sigma_\theta = Q = p + q - P \tag{1.20}$$

Учитывая равенство (1.19), а также выписанные выше выражения для функции $\Psi_*(z)$, преобразуем условие (1.17) к следующему виду:

$$\sigma^2\omega_0'(\sigma)\,[\Gamma_* + B_0 + B_1\omega_0(\sigma) + B_2\omega_0^2(\sigma) + \Psi_{11}(\sigma)] = B\,\overline{\omega_0'(\sigma)} \tag{1.21}$$

Приравняем в этом равенстве коэффициенты при одинаковых степенях σ^k $(k \geqslant -2)$. Будем иметь

$$\begin{gathered} b_4 - m_1(\Gamma_* + B_0) - m_2B_1 - (m_1^2 + m_3)B_2 = B \\ b_3 - 2m_2(\Gamma_* + B_0) - (m_1^2 + 2m_3)B_1 - 4m_1m_2B_2 = 0 \\ b_1 - m_1b_2 - 3m_3(\Gamma_* + B_0) - 3m_1m_3B_1 - (m_1^3 + 3m_2^2 + 6m_1m_3)B_2 = 0 \\ \Gamma_* + B_0 + m_1B_2 = -\overline{m}_1B, \quad B_1 = -2\overline{m}_2B \\ B_2 = -3\overline{m}_3B, \quad m_k = 0 \qquad (k \geqslant 4) \end{gathered} \tag{1.22}$$

Таким образом, в третьем приближении (с точностью порядка ε^4) форма искомого „равнопрочного“ контура определяется функцией

$$\omega_0(\sigma) = \sigma + \frac{m_1}{\sigma} + \frac{m_2}{\sigma^2} + \frac{m_3}{\sigma^3} \tag{1.23}$$

Функцию $\Psi_{11}(\zeta)$ найдем методом Н. И. Мусхелишвили из условия (1.21)

$$\begin{gathered} \Psi_{11}(\zeta) = F(\zeta) - \Gamma_* - B_0 - B_1\omega_0(\zeta) - B_2\omega_0^2(\zeta) \\ F(\zeta) = [\zeta^2\omega_0'(\zeta)]^{-1}\,[b_2 + (\Gamma_* + B_0)(\zeta^2 - m_1) + \\ + B_1(\zeta^3 - m_2) + B_2(\zeta^4 + m_1\zeta^2 - m_1^2 - m_3)] \end{gathered} \tag{1.24}$$

Тогда

$$\Psi_*(z) = F(\zeta) \tag{1.25}$$

Входящие в выражения (1.23), (1.24) постоянные m_1, m_2, m_3, b_2, b_3, b_4 определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений (1.22). Для ее решения применим метод малого параметра. Будем искать указанные постоянные в виде

$$m_k = \sum_{n=0}^{4} m_{kn}\,\varepsilon^n, \quad b_k = \sum_{n=0}^{4} b_{kn}\,\varepsilon^n \tag{1.26}$$

Последние выражения подставим в уравнения (1.22) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. При этом, в соответствии с принятой точностью решения, будем отбрасывать слагаемые, содержащие ε в степени выше четвертой. После элементарных выкладок получим простые расчетные формулы

$$m_1 = m_{10} + m_{12}\varepsilon^2 + m_{14}\varepsilon^4, \quad m_2 = - m_{12}\varepsilon^3, \quad m_3 = m_{12}\varepsilon^4$$

$$m_{10} = -\overline{\Gamma}_*/\overline{B}, \quad m_{12} = m_{10}\overline{m}_{10} - 1, \quad m_{14} = m_{10}\overline{m}_{12} + 7\overline{m}_{10}m_{12}$$

$$b_2 = b_{20} + b_{22}\varepsilon^2 + b_{24}\varepsilon^4, \quad b_4 = b_{40} + b_{42}\varepsilon^2 + b_{44}\varepsilon^4$$

$$b_3 = -2(m_{12}\Gamma_* + m_{10}^2 b_{20})\varepsilon^3 \tag{1.27}$$

$$b_{20} = B + m_{10}\Gamma_*, \quad b_{22} = m_{10}b_{20} + m_{12}\Gamma_*$$

$$b_{24} = m_{14}\Gamma_* + m_{10}(b_{22} + 6m_{10}b_{20}) + m_{12}b_{20}$$

$$b_{40} = m_{10}b_{20}, \quad b_{42} = m_{12}b_{20} + m_{10}b_{22}$$

$$b_{44} = m_{10}(b_{24} + 3m_{10}^2 b_{20}) + m_{12}b_{22} + m_{14}b_{20} + 3m_{12}\Gamma_*$$

§2. Аналогичным образом решается задача определения формы контуров выработок при условии, что все точки этих контуров одновременно переходят в пластическое состояние. В этом случае пластическую зону составляют линии L_1 и L_2, а упругая зона занимает область S. В пластической зоне, то есть на контурах L_1 и L_2 имеет место условие пластичности [2]

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4K^2 \tag{2.1}$$

и первые два условия (1.14).

Следовательно, на L_1

$$\sigma_\theta = Q = P \pm 2K \tag{2.2}$$

где знак выбирается из физических соображений.

Напряжения, возникающие в упругой зоне, можно представить, как и выше, через комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi_*(z)$. На контуре L_1 упругие и пластические напряжения должны совпадать [2]. Это условие приводит к решению по существу такой же краевой задачи, что и в §1.

Отличие состоит лишь в том, что здесь величина тангенциального напряжения на контурах выработок задается выражением (2.2). При этом равенство (1.20) является условием, накладываемым на внешние нагрузки, которое необходимо для существования решения обратной упруго-пластической задачи.

§3. В качестве примера найдем форму контуров „равного сопротивления" для первой задачи при действии нормального давления на контурах выработок и отсутствии усилий на бесконечности. В этом случае

$$Q = -P, \quad m_{10} = m_{14} = 0, \quad m_{12} = -1$$

то есть

$$\omega_0(\sigma) = \sigma - \frac{\varepsilon^2}{\sigma} + \frac{\varepsilon^3}{\sigma^2} + \frac{\varepsilon^4}{\sigma^3} \tag{3.1}$$

Такой же получается форма искомых контуров в случае всестороннего растяжения, когда $p=q$, а $P=0$. При этом $Q=2p$.

Донецкий государственный университет

Поступила 9 VII 1971

Գ. Մ. ԻՎԱՆՈՎ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԵՎ ԱՌԱՁԳԱՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ԽՆԴԻՐՆԵՐԸ ԵՐԿՈՒ ՄԻԱՆՄԱՆ ՓՈՐՎԱԾՔՆԵՐՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ԻԶՈՏՐՈՊ ԶԱՆԳՎԱԾԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Որոշվում է առաձգական զանգվածում երկու միանման փորվածքների եզրագծերի ձևը նշված եզրագծերի վրա շոշափող լարումների հաստատուն լինելու կամ փորվածքների եզրերի բոլոր կետերի միաժամանակյա պլաստիկական դրությանն անցնելու պայմանների առկայության դեպքում։ Ենթադրվում է, որ փորվածքների եզրերին կիրառված է հաստատուն նորմալ ճնշում, իսկ անվերջությունում գործում են ձգող և սահքի հաստատուն լարումներ։

INVERSE ELASTIC AND ELASTIC-PLASTIC PROBLEMS FOR ISOTROPIC MEDIUM WEAKENED BY TWO EQUAL HOLES

G. M. IVANOV

Summary

The form of the countours of two equal holes in isotropic medium is defined. It is assumed that tangential stress is constant on these countours or all its points are transformed into plastic state at the same time.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И. И., Космодамианский А. С.* Упругое равновесие изотропной пластинки, ослабленной бесконечным рядом отверстий. Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 4, 1959.
2. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. Изд-во „Наука", М., 1969.
3. *Космодамианский А. С.* Упруго-пластическая задача для изотропного массива, ослабленного бесконечным рядом одинаковых выработок. Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 4, 1961.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во „Наука", М., 1966.
5. *Черепанов Г. П.* Некоторые задачи теории упругости и пластичности с неизвестной границей. В кн. „Приложения теории функций в механике сплошной среды", т. 1. Изд-во „Наука", М., 1965.
6. *Черепанов Г. П.* Обратная упруго-пластическая задача в условиях плоской деформации. Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1, 1963.