ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 4, 1972 Механика

Г. И. АВАНЕСОВА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КОЛЬЦЕВОГО УСИЛИЯ С УЧЕТОМ ДОКРИТИЧЕСКОГО ПРОГИБА

В данной работе рассматривается устойчивость анизотропной круговой цилиндрической оболочки радиуса R, нагруженной кольцевой обжимающей нагрузкой q_0. Предполагается, что в каждой точке оболочки имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, которая параллельна координатной поверхности.

За координатную поверхность принимается средняя поверхность оболочки; координатные линии направлены: x—по образующей цилиндра, y—по направляющей дуге и z—по радиусу кривизны.

В отношении указанной оболочки принимается гипотеза недеформируемых нормалей, а прогибы считаются сравнимыми с толщиной оболочки h.

В случае, когда оболочка сделана из ортотропного материала и главные физические и геометрические направления не совпадают, оболочка работает как анизотропная. В данной работе определен оптимальный угол φ между главными геометрическими и физическими направлениями для различных случаев сочетания упругих постоянных оболочки.

1. В силу указанных предположений, уравнения устойчивости оболочки с учетом начального докритического прогиба W_0 запишутся в виде [1], [4]

$$L_1(D_{jk})W = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x} \tag{1.1}$$

$$L_2(A_{jk})\varphi = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\frac{d^2 W_0}{dx^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

$$L_1(D_{jk}) = D_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + D_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} +$$

$$+ 4D_{16}\frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26}\frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} \tag{1.2}$$

$$L_2(A_{jk}) = A_{22}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + A_{11}\frac{\partial^4}{\partial y^4} + (A_{66} + 2A_{12})\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} -$$

$$-2A_{26}\frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} - 2A_{16}\frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3}$$

$W(x, y)$, $\varphi(x, y)$ — возмущения радиального перемещения и силовой функции,

B_{jk} — коэффициент упругости для ортотропной оболочки,

$$B_{11}=\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}, \quad B_{12}=\frac{\nu_2 E_1}{1-\nu_1\nu_2}=\frac{\nu_1 E_2}{1-\nu_1\nu_2} \tag{1.3}$$

$$B_{22}=\frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}, \quad B_{66}=G_{12}, \quad B_{16}=B_{26}=0$$

Коэффициенты A_{jk} определяются по формулам

$$A_{11}=\frac{C_{22}C_{66}-C_{26}^2}{\Omega}, \qquad A_{12}=\frac{C_{16}C_{26}-C_{12}C_{66}}{\Omega} \tag{1.4}$$

$$A_{22}=\frac{C_{11}C_{66}-C_{16}^2}{\Omega}, \qquad A_{16}=\frac{C_{12}C_{26}-C_{22}C_{16}}{\Omega}$$

$$A_{66}=\frac{C_{11}C_{22}-C_{12}^2}{\Omega}, \qquad A_{26}=\frac{C_{12}C_{16}-C_{11}C_{26}}{\Omega}$$

$$\Omega=(C_{11}C_{22}-C_{12}^2)\,C_{66}+2C_{12}C_{16}C_{26}-C_{11}C_{26}^2-C_{22}C_{16}^2 \tag{1.5}$$

$$C_{jk}=B_{jk}h$$

В случае несовпадения главных физических и геометрических направлений коэффициенты упругости B_{jk} определяются по следующим выражениям:

$$B_{11}=B'_{11}\cos^4\varphi+2\,(B'_{12}+2B'_{66})\sin^2\varphi\cos^2\varphi+B'_{22}\sin^4\varphi \tag{1.6}$$

$$B_{22}=B'_{11}\sin^4\varphi+2\,(B'_{12}+2B'_{66})\sin^2\varphi\cos^2\varphi+B'_{22}\cos^4\varphi$$

$$B_{12}=B'_{12}+[B'_{11}+B'_{22}-2\,(B'_{12}+2B'_{66})]\sin^2\varphi\cos^2\varphi$$

$$B_{66}=B'_{66}+[B'_{11}+B'_{22}-2\,(B'_{12}+2B'_{66})]\sin^2\varphi\cos^2\varphi$$

$$B_{16}=\frac{1}{2}\,[B'_{22}\sin^2\varphi-B'_{11}\cos^2\varphi+(B'_{12}+2B'_{66})\cos 2\varphi]\sin 2\varphi$$

$$B_{26}=\frac{1}{2}\,[B'_{22}\cos^2\varphi-B'_{11}\sin^2\varphi-(B'_{12}+2B'_{66})\cos 2\varphi]\sin 2\varphi$$

где φ — угол между главными геометрическими и физическими направлениями: B'_{jk} — коэффициент упругости при $\varphi=0$.

Изучим начальное докритическое состояние. До потери статической устойчивости деформации оболочки будут осесимметричными. Принимая $W_0=W_0(x)$, $\varphi_0=\varphi_0(x)$, уравнения (1.1) можно заменить уравнением четвертого порядка

$$\frac{d^4W_0}{dx^4}+\frac{W_0}{D_{11}A_{22}R^2}=-\frac{q_0}{D_{11}} \tag{1.7}$$

$$\frac{d^2\varphi_0}{dx^2}=-\frac{W_0}{A_{22}R}$$

Введем переменную $\alpha = x/R$ и обозначим $\lambda^4 = \dfrac{R^2}{4D_{11}A_{22}}$

Тогда уравнение (1.7) можно представить в следующем виде:

$$\frac{d^4 W_0}{d\alpha^4} + 4\lambda^4 W_0 = \frac{q_0 R^4}{D_{11}} \tag{1.8}$$

При рассмотрении бесконечной оболочки принимается, что кольцевая нагрузка q_0 приложена в сечении $\alpha = 0$, тогда

$$W_0 = \frac{q_0 R^3}{8D_{11}\lambda^3} e^{-\lambda\alpha}(\cos\lambda\alpha + \sin\lambda\alpha) \tag{1.9}$$

а усилия вдоль дуги равны

$$P_y = -\frac{W_0}{A_{22}R} = -\frac{q_0 R^2}{8D_{11}A_{22}\lambda^3} e^{-\lambda\alpha}(\cos\lambda\alpha + \sin\lambda\alpha) \tag{1.10}$$

При рассмотрении дальнейшего равновесного состояния оболочки, уже не являющегося осесимметричным, заменим систему уравнений (1.1) разрешающим уравнением восьмого порядка

$$|L_1(D_{jk}) \times L_2(A_{jk})| W + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = P_y L_2(A_{jk}) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \tag{1.11}$$

где $L_1(D_{jk})$ и $L_2(A_{jk})$ — уже указанные операторы; P_y — усилия вдоль дуги окружности.

Предполагая оболочку достаточно длинной, представим решение уравнения (1.11) в виде

$$W = W_1(\alpha) e^{-in\beta} \tag{1.12}$$

n — число волн в окружном направлении, $\beta = \dfrac{y}{R}$ — безразмерная координата

$$|L_1'(D_{jk}) \times L_2'(A_{jk})| W_1 + R^2 \frac{d^4 W}{d\alpha^4} = -P_y n^2 R^2 L_2'(A_{jk}) W_1 \tag{1.13}$$

$$L_1'(D_{jk}) = D_{11}\frac{d^4}{d\alpha^4} - 4D_{16}\frac{d^3}{d\alpha^3} in - 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{d^2}{d\alpha^2} n^2 +$$

$$+ 4D_{26}\frac{d}{d\alpha} in^3 + D_{22}n^4 \tag{1.14}$$

$$L_2'(A_{jk}) = A_{22}\frac{d^4}{d\alpha^4} + 2A_{26}\frac{d^3}{d\alpha^3} in - (A_{66} + 2A_{12})\frac{d^2}{d\alpha^2} n^2 -$$

$$-2A_{16}\frac{d}{d\alpha} in^3 + A_{11}n^4$$

Применим преобразование Фурье, учитывая, что трансформанта некоторой функции $W_1^{(s)}$ и ее оригинал $W_1(\alpha)$ связаны соотношениями

$$W_1^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} W_1(\alpha)\, e^{is\alpha}\, d\alpha, \qquad W_1(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} W_1^{(s)} e^{-is\alpha}\, ds \quad (1.15)$$

уравнение трансформанты получаем в виде

$$\left(L_1^{(s)} \times L_2^{(s)} + R^2 s^4\right) W_1^{(s)} = -\frac{n^2 L_2^{(s)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P_y W_1 e^{is\alpha}\, d\alpha \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} L_1^{(s)} &= D_{11}s^4 - 4D_{16}s^3 n + 2(D_{12} + 2D_{66})\, s^2 n^2 - 4D_{26} s n^3 + D_{22} n^4 \\ L_2^{(s)} &= A_{22}s^4 + 2A_{26}s^3 n + (A_{66} + 2A_{12})\, s^2 n^2 + 2A_{16} s n^3 + A_{11} n^4 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Интеграл правой части уравнения (1.16) может быть заменен следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_y W_1 e^{is\alpha}\, d\alpha = \int_0^{\infty} W_1^{(p)} \left(P_y^{(|s-p|)} + P_y^{(s+p)}\right) dp \quad (1.18)$$

$P_y^{(|s-p|)}$, $P_y^{(s+p)}$ — трансформанты функции P_y

Учтя (1.10), можно записать

$$P_y^{(|s-p|)} + P_y^{(s-p)} = -\frac{q_0 R^3}{\sqrt{2\pi}\, A_{22} D_{11}} \left[\frac{1}{(s-p)^4 + 4\lambda^4} + \frac{1}{(s+p)^4 + 4\lambda^4} \right] \quad (1.19)$$

Обозначая

$$V^{(s)} = \sqrt{\frac{L_1^{(s)} \times L_2^{(s)} + R^2 s^4}{L_2^{(s)}}}\; W_1^{(s)} \quad (1.20)$$

получим однородные интегральные уравнения Фредгольма второго рода с симметричным ядром

$$V^{(s)} = q_0 \int_0^{\infty} K(s, p)\, V^{(p)} dp \quad (1.21)$$

$$K(s, p) = \frac{1}{\pi} n^2 R^2 \sqrt{\frac{L_2^{(s)}}{L_1^{(s)} \times L_2^{(s)} + R^2 s^4}} \sqrt{\frac{L_2^{(p)}}{L_1^{(p)} \times L_2^{(p)} + R^2 p^4}} \quad (1.22)$$

Искомая нагрузка входит в данное уравнение в качестве независимого параметра, то есть мы имеем задачу о собственных значениях уравнения (1.21). Для определения первой критической нагрузки можно воспользоваться теорией симметричных интегральных уравнений, в которой для определения характеристического числа в первом приближении применяют выражение

$$q_0^2 = \frac{1}{S_2}, \quad S_2 = \int_0^\infty\int_0^\infty K^2(s,\ p)\,ds\,dp \tag{1.23}$$

Верхняя критическая нагрузка может быть определена по формуле

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{\pi}\,\frac{n^2R^2}{Eh}\int_0^\infty \frac{EhL_1^{(n)}\,ds}{L_1^{(n)}\times L_2^{(n)} + R^2s^4} \tag{1.24}$$

В случае изотропной оболочки

$$\frac{1}{q_0} = \frac{12(1-\nu^2)R^2n^2}{\pi Eh^3}\int_0^\infty \frac{(s^2+n^2)^2\,ds}{(s^2+n^2)^4 + 4\lambda^4 s^4} \tag{1.25}$$

$$\frac{1}{q_0} = \frac{12(1-\nu^2)R^2}{\pi Eh^3 n}\,\frac{\sqrt{\sqrt{4+\frac{\lambda^4}{n^4}}+2}}{\sqrt{4+\frac{\lambda^4}{n^4}}} \tag{1.26}$$

Полученное выражение совпадает с результатом, приведенным в работе [2], то есть при указанном подходе к решению задачи устойчивости учет докритического прогиба не влияет на величину критической нагрузки. Это обстоятельство не противоречит результатам работ [4, 5], в которых указывается на зависимость критической нагрузки от краевых условий на торцах цилиндра, поскольку в данной задаче рассматривается цилиндр бесконечной длины.

2. Для иллюстрации вышесказанного ниже приведены значения критической нагрузки $\bar{q}_{кр} = \dfrac{q_{кр}}{Eh}$, вычисленные на ЭВМ для оболочек со следующими сочетаниями упругих постоянных при $\varphi = 0$ (табл. 1).

Таблица 1

N \ B_{jk}	B_{11}	B_{22}	B_{44}
I	E	E	$0.5E$
II	$2E$	E	$0.5E$
III	$10E$	E	$0.5E$

Для определения $n_{кр}$ сравниваются значения $\bar{q}_{кр}$ при различных n для указанных случаев I, II, III при $\varphi = 0$ (табл. 2).

В табл. 3 приведены значения критической нагрузки при различных φ для II и III случая сочетания упругих постоянных.

Таблица

$N \backslash n$	5	6	7	8	9	10
I	$10^{-3} \cdot 0.395784$	$10^{-3} \cdot 0.387871$	$10^{-3} \cdot 0.384708$	$10^{-3} \cdot 0.387214$	$10^{-3} \cdot 0.395456$	$10^{-3} \cdot 0.40894$
II	$10^{-3} \cdot 0.452232$	$10^{-3} \cdot 0.43869$	$10^{-3} \cdot 0.431481$	$10^{-3} \cdot 0.431551$	$10^{-3} \cdot 0.438778$	$10^{-3} \cdot 0.45235$
III	$10^{-3} \cdot 0.598511$	$10^{-3} \cdot 0.568646$	$10^{-3} \cdot 0.552806$	$10^{-3} \cdot 0.550669$	$10^{-3} \cdot 0.560414$	$10^{-3} \cdot 0.57969$

Таблица 3

$n_{кр}$	$N \backslash \varphi$	0	30°	45°	60°	90°
7	II	$10^{-3} \cdot 0.43148$	$10^{-3} \cdot 0.443153$	$10^{-3} \cdot 0.416612$	$10^{-3} \cdot 0.371393$	$10^{-3} \cdot 0.293830$
8	III	$10^{-3} \cdot 0.550669$	$10^{-3} \cdot 0.655796$	$10^{-3} \cdot 0.675157$	$10^{-3} \cdot 0.576155$	$10^{-3} \cdot 0.174139$

Оптимальный угол φ ориентации физических и геометрических направлений меняется в зависимости от соотношения B_{11}/B_{22}. При увеличении последнего он сдвигается к $\frac{\pi}{2}$; при уменьшении — к нулю. При $B_{11} > B_{22}$ $\min \bar{q}_{кр}$ достигается при $\varphi = \frac{k\pi}{2}$ $(1, 3, 5, \cdots)$. Величина $(\max \bar{q}_{кр} - \min \bar{q}_{кр})$ растет при увеличении B_{11}/B_{22}.

Գ. Ի. ԱՎԱՆԵՍՈՎԱ

ՕՂԱԿԱՁԵՎ ԲԵՌԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ԳՏՆՎՈՂ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ՝ ՄԻՆՉԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ՃԿՎԱԾՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է օղակաձև սեղմող ուժերի ազդեցության տակ անիզոտրոպ շրջանային կորվածքով գլանային անվերջ թաղանթի կայունության խնդիրը։ Վերջինս բերվում է ինտեգրալ հավասարման։

Անիզոտրոպությունը պայմանավորված է օրթոտրոպ թաղանթի ֆիզիկական և երկրաչափական գլխավոր ուղղությունների չհամընկնելով։

Աշխատանքում որոշվում է նշված ուղղությունների միջև կազմված օպտիմալ անկյունը։

ON STABILITY OF A CYLINDRICAL ANISOTROPIC SHELL

G. I. AVANESOVA

Summary

The work deals with a problem of stability of an infinite anisotropic cylindrical shell under circular squeezing stresses. The problem is reduced to solving an integral equation.

Anisotropy is stipulated by non-coincidence of the principal physical and geometric directions of the orthotropic shell.

The optimum angle between the specified directions is determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
3. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. ИЛ., М., 1955.
4. *Багдасарян Г. Е., Гнуни В. Ц.* Динамическая устойчивость анизотропной цилиндрической оболочки. Докл. АН АрмССР, т. XI, № 5, 1965.
5. *Мяченков В. И.* Устойчивость ортотропных оболочек вращения, находящихся под действием осесимметричных нагрузок. Инж. ж., МТТ, № 1, 1968.