И. Т. ЕФИМОВА, Я. С. УФЛЯНД

О КРУЧЕНИИ СОСТАВНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

В настоящей заметке рассмотрена задача о кручении полубесконечного составного цилиндрического стержня при различных краевых условиях. Точное решение получено с помощью специального интегрального преобразования. Приведено доказательство соответствующей формулы обращения.

§ 1. Рассмотрим полубесконечный стержень, составленный из двух материалов*, заделанный на торце и скручиваемый произвольными усилиями по боковой поверхности. Как известно [1], поставленная задача сводится к уравнению

$$\Delta v - \frac{v}{r^2} = 0 \quad (1.1)$$

для единственной не равной нулю компоненты вектора упругого смещения $u_z \equiv v(r, z)$. Граничные условия имеют вид

$$v|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right|_{r=R} = \frac{1}{RG_1} \tau_{r\varphi}|_{r=R} = f(z) \quad (1.2)$$

где G — модуль сдвига. Кроме того, в разделяющем сечении $z = l$ должны быть непрерывны смещение и касательное напряжение

$\tau_{rz} = G \frac{\partial v}{\partial z}$, откуда

$$v|_{z=l-0} = v|_{z=l+0}, \quad G_1 \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=l-0} = G_2 \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=l+0} \quad (1.3)$$

Разделение переменных приводит к следующему выражению:

$$v = \int_0^\infty A(\lambda) I_1(\lambda r) \varphi(z, \lambda) d\lambda \quad (1.4)$$

$$\varphi = \begin{cases} \sin \lambda z, & 0 < z < l \\ \sin \lambda l \cos \lambda(z-l) + \frac{G_1}{G_2} \cos \lambda l \sin \lambda(z-l), & l < z < \infty \end{cases} \quad (1.5)$$

удовлетворяющему однородным граничным условиям. Неоднородное условие (1.2) принимает вид разложения

* Развиваемый далее метод может быть обобщен на случай многослойной среды и полного цилиндра.

$$f(z) = \int_0^l A(t) \frac{d}{dr} \left| \frac{J_1(izr)}{r} \right|_{r=R} \varphi(z, t) dt \quad (1.6)$$

из которого требуется найти неизвестную величину $A(t)$.

Таким образом, задача свелась к определению коэффициента разложения заданной функции в интеграл по функциям (1.5), являющимся, очевидно, собственными функциями следующей сингулярной краевой задачи:

$$\begin{aligned} \varphi'' + t^2 \varphi &= 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) < \infty \\ \varphi(l-0) &= \varphi(l+0), \quad G_1 \varphi'(l-0) = G_2 \varphi'(l+0) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Используя доказанную в § 2 теорему разложения (2.1), а также соотношение [2]

$$\frac{d}{dx} \left| \frac{J_1(x)}{x} \right| = -\frac{1}{x} J_0(x) \quad (1.8)$$

находим

$$A(t) = \frac{2R}{\pi J_0(tR) w(t)} \int_0^l f(z) \varphi(z) \varphi(t, z) dz \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} w(t) &= \sin^2 tl + \frac{1}{v^2} \cos^2 tl, \quad v = G_2 G_1 \\ \varphi(z) &= \frac{1}{v}, \quad 0 < z < l, \quad \varphi(z) = 1, \quad l < z < \infty \end{aligned} \quad (1.10)$$

В качестве примера рассмотрим случай линейной скручивающей нагрузки p , приложенной по окружности некоторого сечения $z = a < l$. Так как при этом граничное напряжение представляется через дельта-функцию: $\tau_{\theta z}|_{r=R} = p \delta(z-a)$, то в этом случае

$$A(t) = \frac{2p \sin ta}{\pi G_2 J_0(tR) w(t)} \quad (1.11)$$

§ 2. Переходим к доказательству следующей теоремы: если $f(x)$ — кусочно-непрерывная функция, абсолютно интегрируемая в промежутке $(0, \infty)$ и имеющая там ограниченную вариацию, то

$$\frac{2}{\pi} \int_0^l \frac{\varphi(x, t)}{w(t)} dt \int_0^l f(z) \varphi(z) \varphi(t, z) dz = \begin{cases} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & x \neq l \\ \frac{f(l-0) + v f(l+0)}{1+v}, & x = l \end{cases} \quad (2.1)$$

Для доказательства рассмотрим интеграл

$$J(x, T) = \frac{2}{\pi} \int_0^T d\xi \int_0^{\bar{\xi}} f(\xi) \rho(\xi) \frac{\varphi(\xi, \lambda) \varphi(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} d\xi \quad (2.2)$$

и заметим, что

$$\left| f(\xi) \rho(\xi) \frac{\varphi(\xi, \lambda) \varphi(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} \right| \leq C |f(\xi)|$$

при любых положительных x и ξ . В силу этой оценки и абсолютной интегрируемости $f(x)$ внутренний интеграл сходится равномерно по λ для $\lambda \in (0, \infty)$. Следовательно, в (2.2) можно изменить порядок интегрирования и, учитывая вид $\varphi(\xi, \lambda)$ в зависимости от ξ , записать $J(x, T)$ для $0 < x < l$ в следующей форме:

$$\begin{aligned} J(x, T) &= \frac{2}{\pi v} \int_0^x f(\xi) \psi_1(x, \xi, T) d\xi - \frac{2}{\pi} \int_x^l f(\xi) \psi_2(x, \xi, T) d\xi = \\ &= J(x, T) + \bar{J}(x, T) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь через $\psi_1(x, \xi, T)$ и $\psi_2(x, \xi, T)$ обозначены интегралы

$$\psi_1 = \int_0^T \frac{\sin \lambda x \sin \lambda \xi}{\sin^2 \lambda l + \frac{1}{v^2} \cos^2 \lambda l} d\lambda \quad (2.4)$$

$$\psi_2 = \int_0^x \sin \lambda x \frac{\sin \lambda l \cos \lambda (\xi - l) + \frac{1}{v} \cos \lambda l \sin \lambda (\xi - l)}{\sin^2 \lambda l + \frac{1}{v^2} \cos^2 \lambda l} d\lambda \quad (2.5)$$

Рассмотрим сначала случай $0 < \xi < l$. Нетрудно показать, что

$$\psi_1 = \frac{v}{2i} \int_{-T}^T \frac{v \sin \lambda (l - x) + i \cos \lambda (l - x)}{v \sin \lambda l + i \cos \lambda l} \sin \lambda \xi d\lambda, \quad 0 < \xi < x < l \quad (2.6a)$$

$$\psi_2 = \frac{v}{2i} \int_{-T}^T \frac{v \sin \lambda (l - \xi) + i \cos \lambda (l - \xi)}{v \sin \lambda l + i \cos \lambda l} \sin \lambda x d\lambda, \quad 0 < x < \xi < l \quad (2.6b)$$

Поэтому интеграл $J(x, T)$ представим в виде

$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{\pi} \int_0^x f(\xi) \psi_2(x, \xi, T) d\xi + \frac{2}{\pi} \int_x^l f(\xi) \psi_1(x, \xi, T) d\xi = \\ &= J_1(x, T) + J_2(x, T) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Изучим, например, $J_2(x, T)$ при $T \rightarrow +\infty$. Делая в (2.66) замену переменных $l = \xi$, получаем, что

$$\psi_2 = \frac{\nu}{2i} \int_{-iT}^{iT} \frac{\nu \operatorname{sh} \tau(l - \xi) + \operatorname{ch} \tau(l - \xi)}{\nu \operatorname{sh} \tau l + \operatorname{ch} \tau l} \operatorname{sh} \tau x d\tau \quad (2.8)$$

Так как уравнение $\operatorname{sh} \tau l + \frac{1}{\nu} \operatorname{ch} \tau l = 0$ не имеет корней, у которых $\operatorname{Re} \tau > 0$, то по теореме Коши будет*

$$\psi_2 = \frac{\nu}{2i} \int_{(\Gamma_T)} \frac{\nu \operatorname{sh} \tau(l - \xi) + \operatorname{ch} \tau(l - \xi)}{\nu \operatorname{sh} \tau l + \operatorname{ch} \tau l} \operatorname{sh} \tau x d\tau \quad (2.9)$$

На контуре (Γ_T) имеют место соотношения

$$\tau = T e^{i\varphi}, \quad -\pi/2 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$$

и для $0 < x < \xi < l$

$$\begin{aligned} & \frac{\nu \operatorname{sh} \tau(l - \xi) + \operatorname{ch} \tau(l - \xi)}{\nu \operatorname{sh} \tau l + \operatorname{ch} \tau l} \operatorname{sh} \tau x = \\ & = \frac{1}{2} e^{-\tau x} e^{\tau(l-x)} - e^{-\tau \xi} e^{\tau(l-x)} O(T^{-1}) - \frac{1}{2} e^{-\tau \xi} e^{\tau(\xi+x)} + \\ & + \frac{\nu-1}{2(\nu+1)} e^{\tau \xi} e^{\tau(l-\xi-x)} - \frac{\nu-1}{2(\nu+1)} e^{\tau \xi} e^{\tau(\xi-2l+x)} + \\ & + \left[e^{-\tau \xi} e^{\tau(\xi+x)} + e^{\tau \xi} e^{\tau(\xi-2l-x)} + e^{\tau \xi} e^{\tau(\xi-2l+x)} \right] O(T^{-1}) \quad (2.10) \end{aligned}$$

Вычисляя интеграл (2.9) по контуру (Γ_T) , приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \psi_2 = & \frac{\nu}{2} \frac{\sin(\xi - x) T}{\xi - x} - \frac{\sin(\xi - x) T}{\xi - x} O(T^{-1}) - \frac{\nu}{2} \frac{\sin(\xi + x) T}{\xi + x} + \\ & + \frac{(\nu-1)\nu}{2(\nu+1)} \left[\frac{\sin(l - 2l - x) T}{\xi - 2l - x} - \frac{\sin(\xi - 2l + x) T}{\xi - 2l + x} \right] + \\ & + \left[\frac{\sin(\xi + x) T}{\xi + x} + \frac{\sin(\xi - 2l - x) T}{\xi - 2l - x} + \frac{\sin(\xi - 2l + x) T}{\xi - 2l + x} \right] O(T^{-1}) \quad (2.11) \end{aligned}$$

Подставляя теперь (2.11) в $J_2(x, T)$ и устремляя $T \rightarrow +\infty$, на основании известных лемм Римана и Дирихле получаем

* Следующий метод применялся в работе [4].

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} J_2(x, T) = \frac{1}{2} f(x+0)$$

Исследование интеграла $J_1(x, T)$ проводится аналогичным путем, в результате имеем

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} J_1(x, T) = \frac{1}{2} f(x-0)$$

Таким образом,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \underline{J}(x, T) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \quad (2.12)$$

Если теперь рассмотреть $0 < x < l < \xi < \infty$, то интеграл $\varphi_2(x, \xi, T)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{i}{2} \int_{-T}^T \frac{\sin \lambda(\xi - l) - i \cos \lambda(\xi - l)}{\sin \lambda l + \frac{i}{\nu} \cos \lambda l} \sin \lambda x d\lambda = \\ &= \frac{i}{2} \int_{-iT}^{iT} \frac{\text{sh } \tau(\xi - l) - \text{ch } \tau(\xi - l)}{\text{sh } \tau l + \frac{1}{\nu} \text{ch } \tau l} \text{sh } \tau x d\tau = \\ &= \frac{i}{2} \int_{(iT)}^{\tau} \frac{\text{sh } \tau(\xi - l) - \text{ch } \tau(\xi - l)}{\text{sh } \tau l + \frac{1}{\nu} \text{ch } \tau l} \text{sh } \tau x d\tau = \frac{\sin(\xi - x) T}{\xi - x} - \\ &- \frac{\sin(\xi + x) T}{\xi + x} + \left[\frac{\sin(\xi - x) T}{\xi - x} + \frac{\sin(\xi + x) T}{\xi + x} \right] O(T^{-1}) \quad (2.13) \end{aligned}$$

Подставляя (2.13) в $\bar{J}(x, T)$ и переходя там к пределу при $T \rightarrow +\infty$, получим

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \bar{J}(x, T) = 0 \quad (2.14)$$

Из (2.12) и (2.14) вытекает, что для $0 < x < l$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} J(x, T) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \quad (2.15)$$

Аналогично доказывается справедливость формулы (2.15) и в случае $l < x < \infty$. Исследование точки $x = l$ дает

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} J(l, T) = \frac{f(l-0) + \nu f(l+0)}{1 + \nu} \quad (2.16)$$

что и доказывает теорему.

§ 3. Предложенная методика применима также и к таким задачам, когда сечение $z = 0$ свободно от усилий. Вводя в качестве неизвестной функцию $w = \frac{\Phi}{r^2}$, где Φ — функция напряжений, получаем уравнение

$$\Delta w - \frac{4w}{r^2} = 0 \quad (3.1)$$

с граничными условиями

$$w|_{z=0} = 0, \quad w|_{r=R} = - \int_0^z \tau_{rz}|_{r=R} dz = f(z) \quad (3.2)$$

В сечении $z = l$ имеем

$$w|_{z=l+0} = w|_{z=l-0}, \quad G_2 \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=l-0} = G_1 \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=l+0} \quad (3.3)$$

При этом обеспечивается непрерывность напряжений τ_{rz} и величин $\frac{\partial \psi}{\partial r}$, где $\psi = \frac{v}{r}$ — функция перемещений. После решения задачи по известным значениям Φ находим функцию Ψ с точностью до аддитивной постоянной, значение которой выбираем так, чтобы выполнялось требование $v(r, l-0) = v(r, l+0)$.

Решение задачи, полученное с помощью формулы (2.1), имеет вид

$$w = \int_0^l A(\lambda) \frac{I_2(\lambda r)}{I_2(\lambda R)} \varphi(z, \lambda) d\lambda \quad (3.4)$$

где

$$A(\lambda) = \frac{2}{\pi w(\lambda)} \int_0^l f(\xi) \varphi(\xi, \lambda) d\xi, \quad v = \frac{G_1}{G_2}$$

Заметим в заключение, что в случае полностью неоднородных граничных условий решение может быть получено по методу интегральных преобразований (см. [3]).

Ի. Տ. ԵՖԻՄՈՎԱ, Յա. Ս. ՈՒՖԼՅԱՆԴ

ԽԱՂԱԳՐՅԱԿ ԿԱՆԱՅԻՆ ԶՈՂԵՐԻ ՈՐՈՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո Վ ո լ մ

Հասանելի առկա է ձևափոխության միջոցով տրված է կիսաանվերջ բաղադրյալ գլանաձևին ձողի ուղղման խնդրի նշգրիտ լուծումը: Բերված է համապատասխան շրջման բանաձևի սպաքայլեր:

ON TORSION OF COMPOUND CYLINDRICAL BARS

I. T. EFIMOVA, Ya. S. UFLYAND

S u m m a r y

There is given an exact solution to the problem of torsion of a semi-infinite compound cylindrical bar of two different materials. Special integral transform is applied and the inverse formula is proved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. А. Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.
2. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. ИЛ, М., 1949.
3. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, 1948.
4. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Об одном разложении произвольной функции в интеграл по сферическим функциям. ПММ, 30, 2, 1966, 252.