

А. А. БАБЛОЯН, В. Г. СААКЯН

ОБ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

Действие штампов на круговое кольцо исследовали многие авторы [1—4, 6].

В настоящей работе приводится решение задачи о плоской деформации кругового кольца, когда по внешнему и внутреннему контурам приложены $m > 1$ одинаковых симметрично расположенных жестких штампов, причем размеры их на каждом из контуров одинаковы. Размеры же штампов на внутреннем и внешнем контурах в общем случае различны.

Рассмотрены два случая взаимного расположения внутренних и внешних штампов: 1) друг против друга и 2) в шахматном порядке.

Задача сводится к решению системы двух парных рядов-уравнений, содержащих тригонометрические функции, которая, в свою очередь, сводится к системе двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Показывается, что каждая из получающихся систем не только квази-вполне регулярна, но и сумма модулей коэффициентов при неизвестных стремится к нулю. Свободные члены этих систем также стремятся к нулю при возрастании индекса.

Получены удобные для вычислений формулы (с выделенными особенностями) для контактных напряжений и радиальных перемещений.

Как известно [1], плоская задача теории упругости в полярных координатах (r, φ) сводится к определению бигармонической функции Эйри $\Phi(r, \varphi)$ при заданных граничных условиях. Произведя замену переменной $r = ae^t$ и введя новую функцию $F(t, \varphi) = ar^{-1}\Phi(r, \varphi)$, как это сделано в [5, 7], бигармоническое уравнение приведем к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, допускающему разделение переменных.

Решение последнего уравнения для кругового кольца ($a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) ищем в виде ряда Фурье

$$F(t, \varphi) = b(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(t) \cos \alpha_k \varphi$$

$$\Psi_k(t) = C_k \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \operatorname{sh} (t_1 - t) + A_k \operatorname{sh} \alpha_k (t_2 - t) \operatorname{sh} t +$$

$$+ B_k \operatorname{sh} \alpha_k t \operatorname{sh} (t_1 - t) + D_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \operatorname{sh} t \quad (0.1)$$

$$b(t) = b_0 e^t + b_1 t e^{-t}, \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{\varphi_1} = km, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2m}$$

$$t = \ln \frac{r}{a} \quad (0 \leq t \leq t_1), \quad t_1 = \ln \frac{b}{a}$$

где m — число штампов, a и b — радиусы кругового кольца.

Формулы для определения напряжений и перемещений через новую функцию $F(t, \varphi)$ приведены в работах [6, 7].

В силу симметрии области и граничных условий относительно осей $\varphi = k\varphi_1$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 2m-1$), функцию $F(t, \varphi)$ разыскиваем только в $1/2m$ -ой части области. При этом на осях симметрии удовлетворяются условия

$$v(t, \varphi) = \tau_{\varphi r}(t, \varphi) = 0 \quad \varphi = k\varphi_1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2m-1) \quad (0.2)$$

Легко видеть, что при выборе $F(t, \varphi)$ в виде (0.1) условия симметрии (0.2) удовлетворяются тождественно.

1. Рассмотрим случай, когда штампы расположены друг против друга. Граничные условия этой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{rc}(0, \varphi) = \tau_{rv}(t_1, \varphi) = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_1) \\ u(0, \varphi) = f_1(\varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_0), \quad \tau_r(0, \varphi) = f_2(\varphi) \quad (\varphi_0 < \varphi \leq \varphi_1) \\ u(t_1, \varphi) = f_3(\varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_0), \quad \tau_r(t_1, \varphi) = f_4(\varphi) \quad (\varphi_0 < \varphi \leq \varphi_1) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.1), для неизвестных коэффициентов A_k, B_k, C_k, D_k , а также для $b(t)$ получим следующие значения:

$$A_k = k \frac{X_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 - Y_k \alpha_k \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1}, \quad B_k = k \frac{X_k \alpha_k \operatorname{sh} t_1 - Y_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1} \quad (1.2)$$

$$b(t) = \frac{1}{4 \operatorname{sh} t_1} [X_0 (2te^{t-t_1} - e^{-(t-t_1)}) + Y_0 (e^t - 2te^{-t})], \quad C_k = D_k = 0$$

где X_k и Y_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) определяются из системы парных рядов-уравнений

$$\begin{cases} \lambda X_0 - \mu Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(1 - N_k^-) X_k - M_k Y_k] \cos \alpha_k \varphi = f_1^*(\varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_0) \\ X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k X_k \cos \alpha_k \varphi = f_2^*(\varphi) \quad (\varphi_0 < \varphi \leq \varphi_1) \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \lambda Y_0 - \mu X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(1 - N_k^-) Y_k - M_k X_k] \cos \alpha_k \varphi = f_3^*(\varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_0) \\ Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k Y_k \cos \alpha_k \varphi = f_4^*(\varphi) \quad (\varphi_0 < \varphi \leq \varphi_1) \end{cases}$$

где введены обозначения

$$f_{1,3}(\varphi) = \mp \frac{maE}{2(1-\sigma^2)} f_{1,3}(\varphi), \quad f_2^*(\varphi) = a^2 f_2(\varphi), \quad f_4^*(\varphi) = a^2 e^{\mu} f_4(\varphi)$$

$$N_k = 1 + \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 - 1} \frac{\alpha_k (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1) + 2^{-1} \alpha_k (\operatorname{sh} 2\alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} 2t_1)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1} \quad (1.4)$$

$$M_k = \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^2 - 1} \frac{\operatorname{sh} \alpha_k t_1 \operatorname{ch} t_1 + \alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k t_1 \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1}, \quad \nu_k = \frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)}$$

$$\lambda_k = \frac{\operatorname{ch} t_1 - \sigma e^{-t_1}}{2(1 - \sigma) m \operatorname{sh} t_1}, \quad \mu = \frac{1}{2m \operatorname{sh} t_1}$$

σ — коэффициент Пуассона.

Введем обозначения

$$g_l(x) = f_l^*(\varphi), \quad x = \frac{\pi\varphi}{\varphi_1} \quad (0 \leq x \leq \pi), \quad \gamma = \frac{\pi\varphi_0}{\varphi_1}, \quad \beta = \frac{\pi\varphi_2}{\varphi_1} \quad (1.5)$$

Пользуясь известными решениями парных рядов-уравнений по косинусам [8, 9], уравнения (1.3) сводим к следующей системе двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} X_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} X_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} Y_k + c_n \\ Y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^- Y_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}^- X_k + c_n^- \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.6)$$

где

$$a_{nk}^{\pm} = \frac{1}{2} k N_k^{\pm} I_{nk} \left[\frac{(\gamma + \beta) \pm (\gamma - \beta)}{2} \right]$$

$$b_{nk}^{\pm} = \frac{1}{2} k M_k I_{nk} \left[\frac{(\gamma + \beta) \pm (\gamma - \beta)}{2} \right]$$

$$c_n = X_0 \frac{y_n(\cos \gamma)}{n} + \frac{1}{2} \int_0^{\gamma} F_1(\theta) z_n(\cos \theta) \operatorname{ctg} \theta/2 d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\pi} F_2(\theta) z_n(\cos \theta) \operatorname{ctg} \theta/2 d\theta$$

$$c_n^- = Y_0 \frac{y_n(\cos \beta)}{n} + \frac{1}{2} \int_0^{\beta} F_3(\theta) z_n(\cos \theta) \operatorname{ctg} \theta/2 d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\beta}^{\pi} F_4(\theta) z_n(\cos \theta) \operatorname{ctg} \theta/2 d\theta \quad (1.7)$$

$$I_{nk}(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} z_k(\cos \theta) z_n(\cos \theta) \operatorname{ctg} \theta \cdot 2 d\theta \quad (1.7)$$

$$y_n(x) = P_{n-1}(x) + P_n(x), \quad z_n(x) = P_{n-1}(x) - P_n(x)$$

$$F_{1,3}(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \operatorname{tg} \theta/2 \frac{d}{d\theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g_{1,3}(x) \cos x/2 dx}{(\cos x - \cos \theta)^{1/2}}$$

$$F_{2,1}(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g_{2,1}(x) \sin x/2 dx}{(\cos \theta - \cos x)^{1/2}}$$

$P_n(x)$ — полином Лежандра.

Постоянные X_0 и Y_0 будем определять из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} (\lambda - 2 \ln \sin \gamma/2) X_0 - \mu Y_0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (N_k X_k + M_k Y_k) y_k(\cos \gamma) - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_1(\theta) \operatorname{ctg} \theta/2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\frac{\pi}{2}} F_2(\theta) \operatorname{ctg} \theta/2 d\theta + g_1(0) \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} (\lambda - 2 \ln \sin \beta/2) Y_0 - \mu X_0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (N_k Y_k + M_k X_k) y_k(\cos \beta) - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_3(\theta) \operatorname{ctg} \theta/2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\frac{\pi}{2}} F_4(\theta) \operatorname{ctg} \theta/2 d\theta + g_3(0) \end{aligned}$$

которые получаются из первого и третьего уравнений системы (1.3).

Неизвестные X_k и Y_k , определенные из бесконечных систем (1.6), выражаются через X_0 и Y_0 . Подставляя найденные из (1.6) значения X_k и Y_k в (1.8) и разрешая полученную систему относительно X_0 и Y_0 , находим их значения.

Исследуем первую бесконечную систему из (1.6). Учитывая, что $N_k = O(k^{-1})$ и $M_k = o(N_k)$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}^+| \leq 4\epsilon_0 \frac{1 + \ln 4n}{mn}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}^+| \leq 8 m \epsilon^{-m} \operatorname{sh} t_1 \frac{1 + \ln n}{n^m} \quad (1.9)$$

Каждая из полученных оценок при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Аналогичные оценки получаются и для второй системы (1.6). Следовательно, система (1.6) квази-вполне регулярна. Из (1.7) видно, что свободные члены систем (1.6) при возрастании индекса стремятся к нулю, как $c_n, c_n^* = o(n^{-1/2})$.

Выведем теперь удобные формулы для вычисления контактных напряжений σ_r и σ_φ . Пользуясь бесконечной системой (1.6) и значением ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k (\cos \theta) \sin kx = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} \sin x/2}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} & (x < \theta) \\ 0 & (x > \theta) \end{cases} \quad (1.10)$$

для этих напряжений получим следующие окончательные выражения:

$$\begin{aligned} a^2 \sigma_r(0, \varphi) = & X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k X_k \cos \alpha_k \varphi = \frac{\sqrt{2} \cos x/2}{2} \left| \int_x^{\beta} \frac{F_1'(\theta) d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} + \right. \\ & \left. + \int_{\gamma}^{\alpha} \frac{F_2'(\theta) d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} - \frac{H_1 \sqrt{2}}{\sqrt{\cos x - \cos \gamma}} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (N_k X_k + M_k Y_k) \int_x^{\beta} \frac{y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \theta/2 d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} \right| \quad \begin{matrix} (0 < \varphi < \varphi_0) \\ (0 < x < \gamma) \end{matrix} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$a^2 \sigma_\varphi(0, \varphi) = a^2 \sigma_r(0, \varphi) + \lambda_1(\varphi) \quad (0 < \varphi < \varphi_0) \quad (1.12)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1(\varphi) = & \frac{Y_0}{\operatorname{sh} t_1} - (1 + \operatorname{cth} t_1) X_0 + \\ & + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \alpha_k \operatorname{sh} t_1 (X_k \alpha_k \operatorname{sh} t_1 - Y_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1} \cos \alpha_k \varphi \end{aligned} \quad (1.13)$$

и представляет собой ограниченную и непрерывную функцию. Совершенно аналогично для контактных напряжений σ_r и σ_φ на внешнем контуре получим

$$\begin{aligned} a^2 e^{t_1} \sigma_r(t_1, \varphi) = & \frac{\sqrt{2} \cos x/2}{2} \left| \int_x^{\beta} \frac{F_3'(\theta) d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} + \int_{\beta}^{\alpha} \frac{F_4'(\theta) d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} - \right. \\ & \left. - \frac{H_2 \sqrt{2}}{\sqrt{\cos x - \cos \beta}} + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (N_k Y_k + M_k X_k) \int_x^{\beta} \frac{y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \theta/2 d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} \right| \quad (1.14) \\ & \begin{matrix} (0 < \varphi < \varphi_0) \\ (0 < x < \beta) \end{matrix} \end{aligned}$$

$$a^2 e^{t_1} \sigma_\varphi(t_1, \varphi) = a^2 e^{t_1} \sigma_r(t_1, \varphi) + \lambda_2(\varphi) \quad (0 < \varphi < \varphi_0) \quad (1.15)$$

где

$$\begin{aligned}
 X_2(\varphi) = & -\frac{X_0}{\operatorname{sh} t_1} + (\operatorname{cth} t_1 - 1) Y_0 + \\
 & + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k x_k \operatorname{sh} t_1 (Y_k x_k \operatorname{sh} t_1 - X_k \operatorname{sh} x_k t_1)}{\operatorname{sh}^2 x_k t_1 - x_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1} \cos x_k \varphi
 \end{aligned} \quad (1.16)$$

В формулах (1.11) и (1.14) коэффициенты при особенностях имеют вид

$$H_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left| \sum_{k=1}^{\infty} k (N_k^+ X_k + M_k Y_k) z_k (\cos \gamma) + F_1(\gamma) - F_3(\gamma) - 2X_0 \right| \quad (1.17)$$

$$H_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left| \sum_{k=1}^{\infty} k (N_k^- Y_k + M_k X_k) z_k (\cos \beta) + F_3(\beta) - F_4(\beta) - 2Y_0 \right|$$

Напряжения τ и σ сначала выражаются медленно (условно) сходящимися тригонометрическими рядами. После выделения особенностей в этих выражениях появляются новые ряды по функциям $z_k(x)$, которые сходятся уже намного быстрее (абсолютно).

Аналогично, для радиальных перемещений вне области контакта к опчательно получим

$$\begin{aligned}
 -\frac{maE}{2(1-\nu^2)} u(0, \varphi) = & \lambda X_0 - \mu Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(1 - N_k^-) X_k - M_k Y_k] \cos kx = \\
 = & g_1(0) - 2X_0 \ln \frac{\sqrt{2} \sin x/2 + \sqrt{\cos \gamma - \cos x}}{\sqrt{2} \sin \gamma/2} - \\
 & - \frac{\sqrt{2} \sin x/2}{2} \left| \int_0^{\gamma} \frac{F_1(\theta) \operatorname{ctg} \theta/2 d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} + \int_{\gamma}^{\pi} \frac{F_2(\theta) \operatorname{ctg} \theta/2 d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} \right| - \\
 = & \sum_{k=1}^{\infty} k (N_k^- X_k + M_k Y_k) \int_{\gamma}^{\pi} \frac{z_k(\cos \theta) \operatorname{ctg} \theta/2 d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} \Big|_{\gamma}^{\pi} \quad \left(\begin{array}{l} \varphi_0 < \varphi < \varphi_1 \\ \gamma < x < \pi \end{array} \right) \quad (1.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{maE}{2(1-\nu^2)} u(t_1, \varphi) = & \lambda Y_0 - \mu X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(1 - N_k^-) Y_k - M_k X_k] \cos kx = \\
 = & g_2(0) - 2Y_0 \ln \frac{\sqrt{2} \sin x/2 + \sqrt{\cos \beta - \cos x}}{\sqrt{2} \sin \beta/2} - \\
 & - \frac{\sqrt{2} \sin x/2}{2} \left| \int_0^{\beta} \frac{F_3(\theta) \operatorname{ctg} \theta/2 d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} + \int_{\beta}^{\pi} \frac{F_4(\theta) \operatorname{ctg} \theta/2 d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} \right| -
 \end{aligned}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} k (N_k \bar{Y}_k + M_k X_k) \int \frac{z_k (\cos \theta) \operatorname{ctg} \theta / 2 d\theta}{|\cos \theta - \cos x|} \quad \left(\begin{array}{l} \varphi_0 < \varphi < \varphi_1 \\ \beta < x < \pi \end{array} \right) \quad (1.19)$$

Расчеты, производимые по преобразованным формулам (1.11), (1.14), (1.18), (1.19), дают большую точность ввиду хорошей сходимости рядов и того, что интегралы, входящие в них, легко вычисляются для каждого фиксированного k .

2. Рассмотрим теперь вторую задачу для кругового кольца, когда штампы внутреннего и внешнего контуров расположены в шахматном порядке.

Граничные условия этой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{r}_r(0, \varphi) = \bar{r}_r(t_1, \varphi) = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_1) \\ u(0, \varphi) = f_1(\varphi) \quad (\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1), \quad r(0, \varphi) = f_2(\varphi) \quad (0 \leq \varphi < \varphi_0) \\ u(t_1, \varphi) = f_3(\varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_0), \quad r(t_1, \varphi) = f_4(\varphi) \quad (\varphi_0 < \varphi \leq \varphi_2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Функцию Эйри ищем в виде (0.1). Тогда коэффициенты $A_k - D_k$ и функция $b(t)$ будут определяться по формулам (1.2), где неизвестные X_k и Y_k должны определяться из бесконечных систем (1.6), причем в (1.6) коэффициенты a_{nk}^-, b_{nk}^- и c_n^- определяются по формулам (1.7), а коэффициенты a_{nk}^+, b_{nk}^+ и c_n^+ будем определять уже по следующим формулам:

$$\begin{aligned} a_{nk}^+ = \frac{1}{2} k N_k^+ I_n^+(\gamma), \quad b_{nk}^+ = \frac{1}{2} k M_k I_{nk}^+(\gamma) \\ c_n = -X_0 \frac{z_0(\cos \gamma)}{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^1 F_2(\theta) y_n(\cos \theta) \operatorname{tg} \theta / 2 d\theta + \\ + \frac{1}{2} \int_1^{\alpha} F_1(\theta) y_n(\cos \theta) \operatorname{tg} \theta / 2 d\theta \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} I_{nk}^+(\gamma) = \int_0^{\pi} y_k(\cos \theta) y_n(\cos \theta) \operatorname{tg} \theta / 2 d\theta \\ F_1(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \operatorname{ctg} \theta / 2 \frac{d}{d\theta} \int_0^1 \frac{g_1(x) \sin x / 2 dx}{(\cos \theta - \cos x)^{1/2}}, \\ F_2(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{g_2(x) \cos x / 2 dx}{(\cos x - \cos \theta)^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для определения постоянных X_0 и Y_0 получается система (1.8), где вместо первого уравнения будем иметь

$$(\lambda - 2 \ln \cos \gamma/2) X_0 - \mu Y_0 = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (N_k X_k + M_k Y_k) z_k(\cos \gamma) + \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\pi} F_2(\theta) \operatorname{tg} \theta/2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\pi} F_1(\theta) \operatorname{tg} \theta/2 d\theta + g_1(\pi) \quad (2.4)$$

Аналогично тому, как это сделано в первой задаче, получены формулы для контактных напряжений и радиальных перемещений вне штампов, причем на внешнем контуре эти формулы остаются прежними (1.14) и (1.19), а на внутреннем контуре имеем

$$u^*_{\gamma}(0, \varphi) = \frac{\sqrt{2} \sin x/2}{2} \left\{ \int_{\gamma}^{\pi} \frac{F_1'(\theta) d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} + \int_0^{\gamma} \frac{F_2'(\theta) d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} + \frac{H_1^* \sqrt{2}}{\sqrt{\cos \gamma - \cos x}} - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (N_k X_k + M_k Y_k) \int_{\gamma}^{\pi} \frac{z_k(\cos \theta) \operatorname{ctg} \theta/2 d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} \right\} \quad (2.5)$$

$$\left(\begin{array}{l} \bar{\varphi}_0 < \varphi < \bar{\varphi}_1 \\ \gamma < x < \pi \end{array} \right)$$

$$-\frac{maE}{2(1-\nu^2)} u(0, \varphi) = g_2(\pi) - 2X_0 \ln \frac{\sqrt{2} \cos x/2 + \sqrt{\cos x - \cos \gamma}}{\sqrt{2} \cos \gamma/2} + \frac{\sqrt{2} \cos x/2}{2} \left\{ \int_{\gamma}^{\pi} \frac{F_1(\theta) \operatorname{tg} \theta/2 d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} + \int_x^{\gamma} \frac{F_2(\theta) \operatorname{tg} \theta/2 d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} - \sum_{k=1}^{\infty} k (N_k X_k + M_k Y_k) \int_x^{\gamma} \frac{y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \theta/2 d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} 0 < \varphi < \bar{\varphi}_0 \\ 0 < x < \gamma \end{array} \right) \quad (2.6)$$

где

$$H_1^* = \frac{\sqrt{2}}{2} \left| \sum_{k=1}^{\infty} k (N_k X_k + M_k Y_k) y_k(\cos \gamma) + F_1(\gamma) - F_2(\gamma) + 2X_0 \right| \quad (2.7)$$

Напряжения $\sigma_r(t, \varphi)$ определяются по формулам, приведенным в первой задаче.

Силы, действующие на внутренний (P_1) и внешний (P_2) штампы, вычисляются по формулам

Таблица 1 (1 вариант)

φ	$\frac{1}{\epsilon_1} u_1(0, \varphi)$	$\frac{1}{\epsilon_2} u_2(0, \varphi)$	ϵ	$\frac{a}{E\epsilon_1} \varphi_r^{(1)}(0, \varphi)$	$\frac{a}{E\epsilon_2} \varphi_r^{(2)}(0, \varphi)$
0°	-0.042	-0.916	50°	0; -∞	0; -∞
5°	-0.034	-0.903	50°15'	-3.344	-0.404
10°	-0.009	-0.860	50°30'	-2.324	-0.224
15°	0.036	-0.787	50°45'	-1.866	-0.133
20°	0.103	-0.686	51°	-1.589	-0.072
25°	0.193	-0.563	52°	-1.049	-0.067
30°	0.303	-0.428	53°	-0.802	0.145
35°	0.430	-0.295	54°	-0.652	0.199
40°	0.569	-0.175	55°	-0.552	0.239
45°	0.723	-0.078	56°	-0.481	0.269
46°	0.757	-0.062	57°	-0.432	0.290
47°	0.794	-0.047	58°	-0.400	0.305
48°	0.836	-0.033	59°	-0.381	0.314
49°	0.886	-0.020	60°	-0.375	0.316
50°	1.000	0.000			

Таблица 2 (1 вариант)

φ	$\frac{a}{E\epsilon_1} \varphi_r^{(1)}(t_1, \varphi)$	$\frac{a}{E\epsilon_2} \varphi_r^{(2)}(t_1, \varphi)$	φ	$\frac{1}{\epsilon_1} u_1(t_1, \varphi)$	$\frac{1}{\epsilon_2} u_2(t_1, \varphi)$
0°	0.200	-0.074	20°	0.000	-1.000
5°	0.182	-0.104	21°	0.053	-0.860
10°	0.125	-0.202	22°	0.079	-0.799
15°	-0.001	-0.424	23°	0.103	-0.750
16°	-0.045	-0.507	24°	0.126	-0.707
17°	-0.103	-0.623	25°	0.149	-0.668
18°	-0.191	-0.809	30°	0.265	-0.503
19°	-0.363	-1.208	35°	0.388	-0.365
19°15'	-0.446	-1.414	40°	0.512	-0.251
19°30'	-0.580	-1.754	45°	0.628	-0.160
19°45'	-0.867	-2.512	50°	0.722	-0.095
20°	-∞; 0	-∞; 0	55°	0.784	-0.057
			60°	0.805	-0.044

Таблица 3 (II вариант)

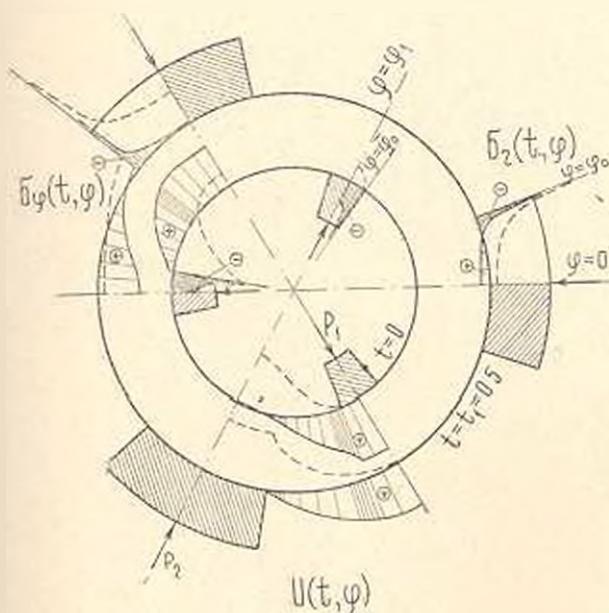
φ	$\frac{1}{c_1} u_1(0, \varphi)$	$\frac{1}{c_2} u_2(0, \varphi)$	φ	$\frac{a}{E c_1} \sigma_r^{(1)}(0, \varphi)$	$\frac{a}{E c_2} \sigma_r^{(1)}(0, \varphi)$
0°	0.803	-0.184	8°	-1.608	-1.451
1°	0.809	-0.178	9°	-1.515	-1.352
2°	0.830	-0.159	10°	-1.439	-1.268
3°	0.870	-0.120	15°	-1.140	-0.914
4°	1.000	0.000	20°	-0.888	-0.596
φ	$\frac{a}{E c_1} \sigma_r^{(1)}(0, \varphi)$	$\frac{a}{E c_2} \sigma_r^{(1)}(0, \varphi)$	25°	-0.680	-0.328
4°	0; $-\infty$	0; $-\infty$	30°	-0.529	-0.129
4°15'	-4.422	-4.103	35°	-0.433	-0.001
4°30'	-3.251	-3.012	40°	-0.382	0.071
4°45'	-2.752	-2.545	45°	-0.361	0.103
5°	-2.464	-2.277	50°	-0.357	0.114
6°	-1.950	-1.790	55°	-0.359	0.117
7°	-1.740	-1.581	60°	-0.361	0.117

Таблица 4 (II вариант)

φ	$\frac{a}{E c_1} \sigma_r^{(1)}(t_1, \varphi)$	$\frac{a}{E c_2} \sigma_r^{(1)}(t_1, \varphi)$	φ	$\frac{1}{c_1} u_1(t_1, \varphi)$	$\frac{1}{c_2} u_2(t_1, \varphi)$
0°	-0.726	-0.964	12'	0.000	-1.000
5°	-0.784	-1.037	13'	0.168	-0.781
6°	-0.816	-1.078	14'	0.235	-0.694
7'	-0.861	-1.135	15'	0.283	-0.631
8°	-0.927	-1.220	20°	0.430	-0.443
9°	-1.030	-1.353	25'	0.506	-0.344
10°	-1.212	-1.589	30'	0.550	-0.287
11°	-1.647	-2.154	35°	0.575	-0.254
11°15'	-1.832	-2.460	40°	0.588	-0.237
11°30'	-2.281	-2.980	45°	0.594	-0.228
11°45'	-3.192	-4.168	50°	0.595	-0.226
12°	$-\infty$; 0	$-\infty$; 0	55°	0.595	-0.226
			60'	0.594	-0.226

Таблица 5 (1 вариант)

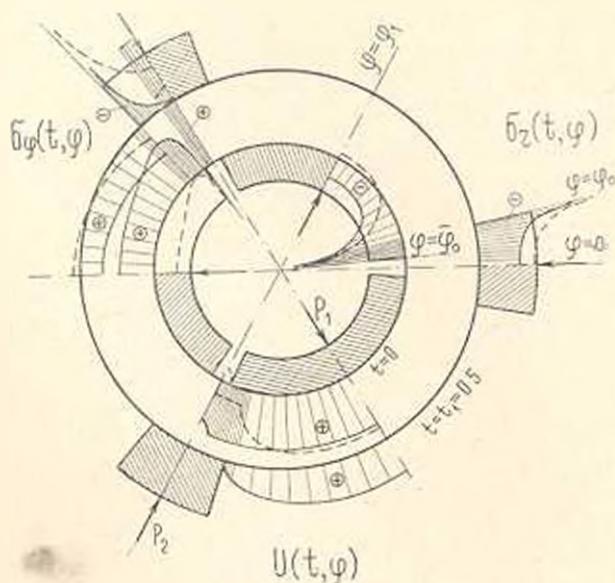
φ	$\frac{\sigma}{E\epsilon_2} z_1^{(1)}(0, \varphi)$	$\frac{\sigma}{E\epsilon_2} z_1^{(2)}(0, \varphi)$	φ	$\frac{\sigma}{E\epsilon_2} z_2^{(1)}(t_2, \varphi)$	$\frac{\sigma}{E\epsilon_2} z_2^{(2)}(t_2, \varphi)$
0°	0.809	0.241	0°	0.040	-0.578
5°	0.815	0.240	5°	0.025	-0.598
10°	0.840	0.221	10°	-0.017	-0.664
15°	0.855	0.149	15°	-0.115	-0.834
20°	0.831	-0.003	16°	-0.152	-0.904
25°	0.763	-0.227	17°	-0.202	-1.006
30°	0.646	-0.483	18°	-0.281	-1.178
35°	0.500	-0.726	19°	-0.444	-1.562
40°	0.345	-0.927	20°	$-\infty$; -0.070	$-\infty$; -0.339
45°	0.200	-1.077	21°	-0.059	-0.323
50°	0.081; $-\infty$	-1.180; $-\infty$	22°	-0.046	-0.307
51°	-1.527	-1.267	23°	-0.033	-0.290
52°	-1.005	-1.132	24°	-0.019	-0.272
53°	-0.773	-1.075	25°	-0.001	-0.255
54°	-0.637	-1.031	30°	0.088	-0.164
55°	-0.549	-1.000	35°	0.206	-0.076
56°	-0.488	-0.977	40°	0.347	0.001
57°	-0.446	-0.961	45°	0.497	0.059
58°	-0.420	-0.950	50°	0.632	0.096
59°	-0.404	-0.943	55°	0.724	0.115
60°	-0.399	-0.942	60°	0.757	0.120



Фиг. 1.

Таблица 6 (II вариант)

φ	$\frac{a}{E_1} z_c^{(1)}(0, \varphi)$	$\frac{a}{E_2} \alpha_c^{(2)}(0, \varphi)$	φ	$\frac{a}{E_1} z_c^{(1)}(t_2, \varphi)$	$\frac{a}{E_2} z_c^{(2)}(t_2, \varphi)$
0°	2.617	1.660	0°	-0.042	-0.694
1°	2.614	1.656	5°	-0.097	-0.767
2°	2.605	1.645	6°	-0.128	-0.808
3°	2.590	1.625	7°	-0.172	-0.865
4°	2.569; -∞	1.580; -∞	8°	0.238	-0.953
5°	0.078	-0.714	9°	-0.341	-1.088
6°	0.560	-0.269	10°	-0.523	-1.326
7°	0.737	-0.109	11°	-0.959	-1.894
8°	0.823	-0.034	12°	-∞; 0.686	-∞; 0.256
9°	0.869	0.003	13°	0.684	0.251
10°	0.883	0.020	14°	0.681	0.245
15°	0.889	-0.022	15°	0.677	0.239
20°	0.817	-0.127	20°	0.649	0.196
25°	0.747	-0.222	25°	0.607	0.140
30°	0.698	-0.284	30°	0.562	0.080
35°	0.671	-0.316	35°	0.517	0.023
40°	0.658	-0.329	40°	0.479	-0.026
45°	0.650	-0.334	45°	0.449	-0.064
50°	0.645	-0.336	50°	0.428	-0.092
55°	0.642	-0.335	55°	0.415	-0.108
60°	0.640	-0.334	60°	0.411	-0.113



Фиг. 2.

$$P_1 = 2a \int_0^{\varphi_1} z_r(0, \varphi) \cos(\varphi_1 - \varphi) d\varphi = \frac{2}{a} \left\{ X_0 [\sin(\varphi_1 - \varphi_0) + \varphi_0 \cos(\varphi_1 - \varphi_0)] - \right. \\ \left. - \frac{\varphi_1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} X_k \frac{\alpha_k \cos \alpha_k \varphi_0 \sin(\varphi_1 - \varphi_0) - \sin \alpha_k \varphi_0 \cos(\varphi_1 - \varphi_0)}{\alpha_k^2 - 1} \right\}$$

$$P_2 = 2ae' \int_0^{\varphi_2} z_r(t_1, \varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{a} \left\{ Y_0 [\sin \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) \cos \varphi_0] + \right. \\ \left. + \frac{\varphi_1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \frac{\sin \alpha_k \varphi_0 \cos \varphi_0 - \alpha_k \cos \alpha_k \varphi_0 \sin \varphi_0}{\alpha_k^2 - 1} \right\}$$

3. Для численной иллюстрации эффективности приведенного решения выбран случай шахматного расположения штампов (по три на каждом из контуров), причем произведены числовые расчеты для двух значений γ и β соответственно для внутреннего и внешнего штампов:

I вариант — $\gamma = 150^\circ$ ($\varphi_1 - \varphi_0 = 10^\circ$), $\beta = 60^\circ$ ($\varphi_0 = 20^\circ$)

II вариант — $\gamma = 12^\circ$ ($\varphi_1 - \varphi_0 = 56^\circ$), $\beta = 36^\circ$ ($\varphi_0 = 12^\circ$)

В обоих случаях коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$ ($\nu_0 = 1/3$), $f_1(\varphi) = c_1$, $f_2(\varphi) = -c_2$, $f_3(\varphi) = f_4(\varphi) = 0$, $t_1 = 0.5$ ($R_{\text{неш.}} = 1.65 R_{\text{внутр.}}$). Все полученные числовые значения выражаются через произвольные постоянные c_1 и c_2 (например, $z_r = z_r^{(1)}(c_1) + z_r^{(2)}(c_2)$).

Результаты вычислений контактных напряжений σ_r , напряжений σ_φ , а также радиальных перемещений вне штампов приведены в табл. 1–6, а также в виде графиков (фиг. 1, 2), причем сплошными линиями на фигурах 1 (I вариант) и 2 (II вариант) показаны графики для случая, когда $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, а пунктирными — когда $c_1 = 0$, $c_2 = 1$.

Коэффициенты при особенностях H_1^* и H_2^* , вычисленные по формулам (2.7) и второй из (1.17), будут соответственно равны для каждого из рассмотренных вариантов:

$$1) \quad H_1^* = -0.285 c_1 - 0.041 c_2, \quad H_2^* = 0.185 c_1 + 0.515 c_2$$

$$2) \quad H_1^* = -2.116 c_1 - 1.966 c_2, \quad H_2^* = 0.480 c_1 + 0.627 c_2$$

а силы, действующие на штампы (2.8), получаются равными соответственно

$$1) \quad P_1 = 0.360 c_1 - 0.052 c_2, \quad P_2 = -0.008 c_1 + 0.132 c_2$$

$$2) \quad P_1 = 1.156 c_1 + 0.546 c_2, \quad P_2 = 0.428 c_1 + 0.563 c_2$$

Ա. Հ. ԲԱԲԼՅԱՆ, Վ. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՈՂԱԿԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՋԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ
ՄԵԿ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԷՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է շրջանային օղակի համար հարթ կոնտակտային խընդիրը, երբ օղակի արտաքին ու ներքին կղրագծերի վրա առանց շփման ազդում են $m > 1$ միասեռակ կոշտ զրոշմներ: Դիտարկված են երկու դեպք 1) արտաքին ու ներքին կղրագծերի վրա աղբյուր զրոշմները դասավորված են դեմ-դիմաց և 2) շտիմատաձև:

Խնդիրը բերվում է չույր շարք-հավասարումների սխեմային, որը իր հերթին բերվում է լիովին ուղղալար դժային անվերջ հավասարումների:

Ստացված են բանաձևեր կոնտակտային լարումների և շտտայիլին տեղափոխումների համար:

ON A PLANE CONTACT PROBLEM OF THE THEORY
OF ELASTICITY FOR A CIRCULAR RING

A. H. BABLOYAN, V. G. SAHAKIAN

S u m m a r y

The paper presents a solution of a plane deformation problem for a circular ring in the case of $m > 1$ similar punches acting symmetrically on both internal and external boundaries of the ring.

Two cases of mutual juxtaposition are considered:

- 1) Where the internal and external punches are opposite each other.
- 2) Where they are arranged alternately.

The problem is reduced to the solution of a dual trigonometric series system, which subsequently is reduced to a quite-regular infinite system of linear algebraic equations.

Suitable formulas have been obtained to calculate contact stresses (with the singularity taken out) and radial displacement.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. Наука, М., 1966.
2. *Таматэ Осаму, Камада Такэси.* Некоторые смешанные граничные задачи для упругих круглых плит. Нихон кикай гаккай ромбунсю, Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 30, № 217, 1964, 1220—1227.
3. *Таматэ Осаму, Суишурэ Коуро.* О контактной задаче для упругого кругового кольца, ч. I. Нихон кикай гаккай ромбунсю, Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 32, № 233, 1966, 59—65.

4. Таматэ Осаму, Сушиура Кацую. О контактной задаче для упругого кругового кольца, ч. II. Нихон кикай гаккай ромбунсю, *Trans. Japan. Soc., Mech. Engrs.*, 32, № 243, 1966, 1668—1674.
5. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
6. Баблоян А. А., Сапкян В. Г. Решение смешанной задачи теории упругости для кругового кольца. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XX, № 5, 1967, 3—20.
7. Баблоян А. А. Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. 15, № 1, 1962.
8. Srivastava R. P. Dual Relations involving Trigonometric Series. *Proc. Roy. Soc. Edinb. (Sec. A)*, vol. 66, pt. III, 1964, 173—184.
9. Баблоян А. А. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости, ПММ, т. 31, вып. 2, 1967.