

В. Ц. ГНУНИ

О ЧАСТОТАХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНКИ С ПЕРЕМЕННЫМ ВО ВРЕМЕНИ МОДУЛЕМ УПРУГОСТИ

Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины h , ориентированную к декартовым координатам x, y, z так, что срединная плоскость недеформируемой пластинки совпадает с плоскостью xy .

Пусть модуль упругости прямоугольной в плане ($a \times b$) шарнирно опертой пластинки изменяется во времени по закону [1]

$$E = E_0 + E_1(t) \quad (1)$$

где E_0 — модуль упругости материала пластинки при $t = 0$.

Принимая гипотезу о недеформируемых нормалях [2] по отношению к тонкой пластинке, получим следующее уравнение свободных колебаний пластинки:

$$\frac{[E_0 + E_1(t)]h^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

где Δ — оператор Лапласа, w — прогиб, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала пластинки.

Полагая

$$w = f(t) \sin \lambda_n x \sin \mu_m y \quad \left(\lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \mu_m = \frac{m\pi}{b} \right) \quad (3)$$

тождественно удовлетворим условиям шарнирного опирания краев пластинки.

Здесь $f(t)$ — искомая функция, n, m — числа полуволн по направлениям x, y .

Подставляя (3) в (2), получим

$$F(t, f) \equiv f'' + \omega_0^2(t) f = 0, \quad \left(\frac{df}{dt} = f' \right) \quad (4)$$

где

$$\omega_0^2(t) = \omega_0^2 + \alpha(t), \quad \omega_0^2 = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu^2)\rho} (\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2 \quad (5)$$

квазистатическая и начальная частоты собственных колебаний пластинки,

$$\alpha(t) = \frac{E_1(t) h^3}{12(1-\nu^2)\rho} (\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2 \quad (6)$$

Предположим, что в течение одного (j -го) периода пластинка колеблется по закону

$$f = C(t_j) \cos \omega(t_j)(t - t_j) \quad (7)$$

где $t_j = \sum_{k=1}^j \frac{2\pi}{\omega_k}$ — время прохождения j -го периода колебаний.

Предполагая также

$$\left| \frac{E'}{E} \right| \frac{2\pi}{\omega} \ll 1$$

что справедливо для многих практических задач, представим квазистатическую частоту собственных колебаний пластинки в виде

$$\omega_j^2(t) = \omega_j^2(t_j) + \alpha'(t) \Big|_{t=t_j}(t - t_j) \quad (8)$$

Применяя относительно уравнения (4) процедуру Бубнова — Галеркина, получим [3]

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} F'[t, C(t_j) \cos \omega(t_j)(t - t_j)] \cos \omega(t_j)(t - t_j) dt = 0 \quad (9)$$

Учитывая (8), из (9) получим

$$\omega_j^2(t_j) - \omega_j^2(t_j) \omega(t_j) + \alpha'(t) \Big|_{t=t_j} = 0 \quad (10)$$

Уравнение (10) справедливо только для определенных моментов времени. Однако, учитывая, что время существенного изменения модуля упругости достаточно велико по сравнению с периодом колебаний, можно приближенно принять, что уравнение (10) справедливо для любого момента времени в рассматриваемом интервале. Тогда уравнение (10) перепишем в виде

$$\omega_j^2(t) - \omega_j^2(t) \omega(t) + \alpha'(t) = 0 \quad (11)$$

Последний член уравнения (11) характеризует влияние динамики изменения модуля упругости во времени. Если $\alpha'(t) > 0$, то динамика изменения модуля упругости приводит к уменьшению частоты собственных колебаний пластинки. Если же $\alpha'(t) < 0$, то имеет место обратная картина — динамика изменения модуля упругости приводит к увеличению частоты собственных колебаний пластинки.

В качестве примера рассмотрим квадратную пластинку ($a = b = \pi m$) при $m = n = 1$ и

$$E_j = E_0 \left(1 + (-1)^j \frac{t}{2t_0} \right), \quad 0 \leq t < t_0 \quad (12)$$

Здесь при $i = 1$ модуль упругости материала пластинки уменьшается, а при $i = 2$ — увеличивается.

Пусть $E_0 = 2 \cdot 10^{10} \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$, $\nu = 0.408$, $\rho = 10^3 \frac{\text{кг сек}^2}{\text{м}^3}$, $h = 10^{-2} \text{ м}$

По этим данным из формул (5), (6) получим

$$\omega_0^2 = 800 \frac{1}{\text{сек}^2} \quad (13)$$

$$\omega_i^2(t) = 800 \left(1 + (-1)^i \frac{t}{2t_*} \right) \frac{1}{\text{сек}^2} \quad (14)$$

а уравнение (11) запишется в виде

$$\omega_i^3(t) - 800 \left(1 + (-1)^i \left(\frac{t}{2t_*} \right) \right) \omega_i(t) + (-1)^i 400 = \frac{1}{t_*} = 0 \quad (15)$$

В табл. 1 приведены значения начальной, квазистатической и динамической частот собственных колебаний пластинки при $t_* = 1 \text{ сек}$.

Таблица 1

$t \text{ сек}$	$i = 1$			$i = 2$		
	ω_0^2	ω_x^2	ω^2	ω_0^2	ω_x^2	ω^2
0.5	800	600	649.2	800	1000	959.1
1	800	400	458.8	800	1200	1162

Рассматривая табл. 1, замечаем, что при $i = 1$ квазистатическая частота собственных колебаний оболочки существенно уменьшается во времени, а учет влияния динамики изменения модуля упругости приводит к некоторому увеличению частоты. В случае же $i = 2$ наблюдается обратная картина — квазистатическая частота увеличивается во времени, а учет влияния динамики изменения модуля упругости приводит к некоторому уменьшению частоты.

В заключение отметим, что в работах [3, 4] время прохождения j -го периода колебаний и границы одного периода колебаний приближенно были определены без учета изменения частоты колебаний во времени, т. е. из квазистатических соображений. Здесь это предположение не делается, однако конечный приближенный результат совпадает с результатом приближенного интегрирования идентичного уравнения в работе [4].

Վ. Յ. ԳՆՈՒՆԻ

ԵՍՏՈՒՆԱԿԻ ԸՆԹԱՅՓՈՒՄ ՓՈՓՈԽՄԱՆ ԱՌԱՋՊԱՆՈՒԹՅԱՆ
 ԽՈՒՌԻՆ ԻՐԱՆՑՈՂ ՄԱԿԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏՆՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ
 ՀԱՃԱՆՈՒՄՆԻԹՅԱՆ ԽՈՒՐՆ

Ս մ փ ո փ ո լ մ

Ստացված է խորանարդ հավասարման տեսքով մոտավոր սանչուիթուն՝ ազդանկյուն, իզոտրոպ, հոդակապրենն ամբողջված սայի սեփական աատանումների հաճախականության որոշման համար:

Ցույց է տրված մամանակի րնթացքում առաձգականության մոդուլի փոփոխման ազդեցությունը սեփական աատանումների փոփոխական հաճախականության վրա:

V. Ts. GNUNI

ON THE FREQUENCIES OF THE PLATE PROPER VIBRATION
 WITH THE ELASTICITY MODULUS VARYING IN TIME

S u m m a r y

A cubic equation to determine a proper vibration of frequencies of the rectangular isotropic plate is approximately obtained.

The influence of variability of elastic modulus in time on the frequency of proper vibrations is considered.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. Об одной задаче колебания ортотропной пластинки, находящейся в поле действия высоких температур. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 4, 1963.
2. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, М.-Л., 1948.
3. Амбарцумян С. А., Гнунни В. Ц. Параметрические колебания гибкой пластинки в поле действия высоких температур. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 6, 1964.
4. Багдасарян Г. Е., Гнунни В. Ц. Колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины. Докл. АН АрмССР, т. 41, № 4, 1965.