ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 3, 1966 Механика

А. М. ГАСПАРЯН, С. М. ИСААКЯН, А. А. ОГАНЕСЯН

О ПАДЕНИИ ШАРИКА ПО ОСИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБЫ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

§ 1. Введение

Работа посвящена определению влияния цилиндрических стен, ограничивающих область падения шарика, на скорость его падения и выяснению механизма этого влияния. С этой целью рассмотрено установившееся падение шарика по оси вертикальной трубы, заполненной вязкой жидкостью, когда плотность шарика больше плотности жидкости, а число Рейнольдса, отнесенное к радиусу шарика, меньше 0.5.

В аналогичных условиях свободное падение шарика исследовано, как известно, Стоксом и Озееном [1]. Рассматриваемой задаче посвящены работы Ладенбурга, Факсена, Вакия, Аппеля, Кавагути, Абермана и др. [2—5]. В этих работах с тем или иным приближением определено сопротивление падению шарика. Как правило, все эти решения негодны при $\frac{a}{R}\to 1$. Результаты вычислений разных авторов при $\frac{a}{R}\to 1$ расходятся также между собой (табл. 1). С еще большими трудностями связано вычисление поля скоростей.

Для уточнения упомянутых решений и построения эпюр скоростей в области между шаром и стенками цилиндра и выполнена настоящая работа.

§ 2. Постановка задачи

Для решения поставленной задачи здесь рассмотрено обтекание шарика вязкой жидкостью, заполняющей цилиндрическую трубу, которая двигается вместе с жидкостью снизу вверх с постоянной скоростью U_∞. Следовательно, относительная скорость шарика равна $-U_\infty$ и направлена сверху вниз.

В условиях динамического равновесия действующих на шарик сил движение является установившимся.

Решение задачи приведено к определению линий тока в области между шариком и стенками цилиндра.

Учтя доказательство Озеена о справедливости уравнений Стокса для случая, когда жидкость не во все три стороны распространяется бесконечно [6], задача решена с помощью линеаризированных уравнений Стокса без инерционных членов.

Функция тока для этой задачи удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2\psi(\rho,\ z)=0 \qquad (1)$$

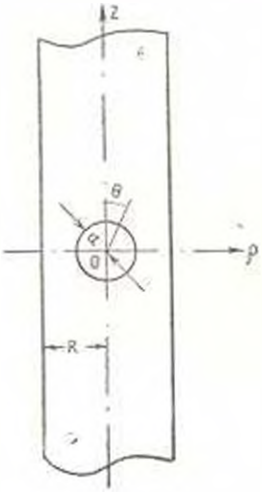
в цилиндрических координатах или уравнению

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]^2\Psi(r,\ \theta)=0 \qquad (1')$$

в сферических координатах (фиг. 1), причем

$$\psi(r\cos\theta,\ r\sin\theta)=\Psi(r,\ \theta).$$

Граничные условия для ψ и Ψ таковы:



Фиг. 1.

$$\left.\begin{aligned}&\psi(R,\ z)=Q\\&\frac{\partial\psi}{\partial\rho}(R,\ z)=0,\end{aligned}\right| \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}&\psi(0,\ z)=0\\&\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\Big|_{\rho=0}=0,\end{aligned}\right| \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}&\Psi(a,\ \theta)=0\\&\frac{\partial\Psi}{\partial r}(a,\ \theta)=0.\end{aligned}\right| \qquad (4)$$

С помощью найденных значений функции ψ можно определить сопротивление при падении шарика.

Задачу будем решать альтернирующим методом [7].

В качестве нулевого приближения возьмем функцию тока Стоксова обтекания шара [1], т. е.

$$\Psi_0=\mp U_0\sin^2\theta\left(r^2-\frac{3}{2}ar+\frac{1}{2}\frac{a^3}{r}\right).$$

Ψ_0 удовлетворяет граничным условиям на шаре (4), но не удовлетворяет граничным условиям на цилиндре (2). Найдем ψ_1 такое, чтобы $\Psi_0(r,\ \theta)+\psi_1(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ удовлетворяло граничным условиям (2) на цилиндре и ψ_1 было бы решением уравнения (1) в цилиндре. Затем найдем такое $\Psi_2(r,\ \theta)$, чтобы $\psi_1(r\cos\theta,\ r\sin\theta)+\Psi_2(r,\ \theta)$ удовлетворяло условиям (4) на шаре, а $\Psi_2(r,\ \theta)$ было бы решением уравнения (1'), дающим скорости, затухающие на бесконечности. Определяя далее последовательно ψ_{2k+1} и Ψ_{2k} так, чтобы $(\psi_{2k-1}+\Psi_{2k})$ удовлетворяло бы условиям (4) на шаре, а $(\Psi_{2k}+\psi_{2k+1})$ условиям на цилиндре, получим соответствующий ряд

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} [\Psi_{2k}(r, \theta) + \psi_{2k+1}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)],$$

являющийся функцией тока исходной задачи.

Доказательство сходимости процесса последовательных приближений проводится методом ортогонального проектирования.

Рассматривается класс K гладких, финитных функций, заданных в области $\rho \geq 0$. Гильбертово пространство получается замыканием этого класса в норме, определяемой скалярным произведением

$$[\varphi, \psi] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \left(\psi_{\rho\rho} - \frac{1}{\rho}\psi_{\rho} + \psi_{zz}\right)\left(\varphi_{\rho\rho} - \frac{1}{\rho}\varphi_{\rho} + \varphi_{zz}\right) d\rho\, dz, \quad \varphi, \psi \in K.$$

Эта билинейная форма связана с основным уравнением задачи. Интегрированиями по частям легко установить ее знакоопределенность. Далее проводятся рассуждения, аналогичные приведенным в диссертации К. Калика [8].

Таким образом, устанавливается слабая сходимость процесса последовательных приближений в упомянутом Гильбертовом пространстве.

§ 3. Четные приближения

Как уже отмечалось, четные приближения должны удовлетворять уравнению (1)', а $[\psi_{2k-1}(r\cos\theta,\ r\sin\theta) + \Psi_{2k}(r, \theta)]$ — условиям (4).

Будем искать решение этой задачи в виде

$$\Psi_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\cdot\varphi_n(\theta),$$

где

$$\varphi_n(\theta) = \sin^2\theta\, P_n'(\cos\theta),$$

т. е. удовлетворяет уравнению

$$\lambda_n^2\varphi_n(\theta) - \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial\varphi_n(\theta)}{\partial\theta}\right) = 0.$$

Здесь P_n' — производная полинома Лежандра по аргументу.

Для $R_n(r)$ получается уравнение Эйлера, из которого следует, что

$$R_n(r) = \frac{A_n}{r^n} + \frac{B_n}{r^{n-2}}.$$

A_n и B_n находятся из граничных условий

$$\frac{A_n}{a^n} + \frac{B_n}{a^{n-2}} = \frac{\int_0^{\pi} \psi_{2k-1}(a\sin\theta,\ a\cos\theta)\sin\theta\, P_n'(\cos\theta)\, d\theta}{\int_0^{\pi} \sin^3\theta\,[P_n'(\cos\theta)]^2\, d\theta},$$

$$= \left(\frac{nA_n}{a^{n+1}} - \frac{(n+2)B_n}{a^{n+1}}\right) = \frac{-\int\limits_0^\pi (\ldots)_{2n+1}(a\sin\theta,\ a\cos\theta)\sin\theta P_n(\cos\theta)\,d\theta}{\int\limits_0^\pi \sin^3\theta\,[P_n'(\cos\theta)]^2\,d\theta}.$$

§ 4. Нечетные приближения

Отмечалось, что нечетные приближения φ_{2n+1} удовлетворяют уравнению (1), а

$$\varphi_{2n+1}(\rho,\ z) - \Psi_{2n}\left(\sqrt{\rho^2+z^2},\ \operatorname{arc\,tg}\frac{\rho}{z}\right)$$

удовлетворяет условиям (2) и φ_{2n+1} удовлетворяет условиям (3).

Решим задачу преобразованием Фурье. Функцию φ_{2n+1} будем искать в виде

$$\varphi_{2n+1}(\rho,\ z) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty F_{2n+1}(\lambda,\ \rho)\cos\lambda z\,d\lambda, \tag{5}$$

тогда $F_{2n+1}(\lambda,\ \rho)$ будет удовлетворять уравнению

$$\left(\rho\frac{d}{d\rho}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \lambda^2\right)F_{2n+1} = 0 \tag{6}$$

(в дальнейшем $\left(\rho\frac{d}{d\rho}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \lambda^2\right)$ будем обозначать через Δ)

и граничным условиям

$$\begin{aligned} &F_{2n+1} = A_{2n+1}(\lambda),\\ &[F_{2n+1}(\rho,\ \lambda)]'_{\rho=1} = B_{2n+1}(\lambda), \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} &A_{2n+1}(\lambda) = -\int\limits_0^\infty \Psi_{2n}\left(\sqrt{1+z^2},\ \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{z}\right)\cos\lambda z\,dz,\\ &B_{2n+1}(\lambda) = -\int\limits_0^\infty \Psi_{2n}\left(\sqrt{\rho^2+z^2},\ \operatorname{arc\,tg}\frac{\rho}{z}\right)\cos\lambda z\,dz. \end{aligned} \tag{8}$$

Численное решение (6) может быть осуществлено конечно-разностными методами.

Заменив ρ^2 через x и обозначив $F_{2n+1}(\sqrt{x},\ \lambda)$ через $y_{2n+1}(x,\ \lambda)$, запишем уравнение для y_{2n+1} в виде

$$4x\frac{d^2 y_{2n+1}}{dx^2} - \lambda^2 y_{2n+1} = 0$$

где

$$v_{2n+1} = 4x \frac{d^2 y_{2n+1}}{dx^2} - \nu^2 y_{2n+1}. \tag{9}$$

Заменим это уравнение соответствующей конечно-разностной системой

$$\frac{4x_i}{h^2} v_{2n+1}(x_{i+1}) - \frac{2 \cdot 4x_i}{h^2} v_{2n+1}(x_i) + \frac{4x_i}{h^2} v_{2n+1}(x_{i-1}) = \nu^2 y_{2n+1}(x_i). \tag{10}$$

$$\frac{4x_i}{h^2} y_{2n+1}(x_{i+1}) - \frac{2 \cdot 4x_i}{h^2} y_{2n+1}(x_i) + \frac{4x_i}{h^2} y_{2n+1}(x_{i-1}) =$$

$$= v_{2n+1}(x_i) + \nu^2 y_{2n+1}(x_i).$$

Особенностью системы является вырождение уравнений (9) при $x = 0$.

Необходимо суметь поставить граничные условия в некоторой точке $x_0 > 0$.

Имеем:

$$\Delta F_{2n+1} = C_{2n+1}(\nu)\, i\zeta I_1(i\nu\zeta) - E_{2n+1}(\nu)\, i\zeta Y_1(i\nu\zeta).$$

Приняв во внимание первое условие из (3), получим, что $E_{2n+1} = 0$ и

$$\Delta F_{2n+1} = C_{2n+1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^{2k},$$

где

$$a_k = \frac{-\nu^{2k-1}}{k!\,(k-1)!\,2^{2k-1}}.$$

Решая последнее уравнение в рядах, получим

$$F_{2n+1}(\zeta, \nu) = D_{2n+1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^{2k} + C_{2n+1} \sum_{k=2}^{\infty} b_k \zeta^{2k},$$

где D_{2n+1} и C_{2n+1} — пока произвольные функции ν, а

$$b_k = \frac{a_{k-1} + \nu^2 b_{k-1}}{2k\,(2k-2)}.$$

Обозначив

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = p(x),$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} b_k x^k = q(x),$$

получим

$$y(x) = D_{2n+1}\, p(x) + C_{2n+1}\, q(x).$$

Дифференцируя y три раза и исключая из двух последних производных D_{2n+1} и C_{2n+1} (при $x = x_0$) с помощью выражения для $y(x)$ и $y'(x)$ получаем:

$$y'''(x_0) = \left.\frac{pq''' - q'p'''}{pq' - qp'}\right|_{x=x_0} \cdot y'(x_0) + \left.\frac{p'''q' - p'q'''}{pq' - qp'}\right|_{x=x_0} \cdot y(x_0), \qquad (11)$$

$$y''(x_0) = \left.\frac{pq'' - qp''}{pq' - qp'}\right|_{x=x_0} \cdot y'(x_0) + \left.\frac{p''q' - p'q''}{pq' - qp'}\right|_{x=x_0} \cdot y(x_0),$$

т. е. связь между y и ее производными (а тем самым между v, v' и y, y') при $x = x_0$.

Условия (11) совместно с условием (7) достаточны для определения $F_{2n+1}(\rho, z)$.

§ 5. Определение силы лобового сопротивления

При определении сопротивления принимаем во внимание формулу Остроградского

$$\iint_S [p_{zx}\cos(n, x) + p_{zy}\cos(n, y) + p_{zz}\cos(n, z)]\, dS =$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

Взяв в качестве поверхности сумму поверхностей шара и цилиндра и принимая во внимание, что для p, являющегося тензором напряжения, подынтегральное выражение в тройном интеграле равно нулю, получаем, что сила сопротивления шарику

$$\iint_{S_{\text{шар}}} [p_{zx}\cos(r, x) + p_{zy}\cos(r, y) + p_{zz}\cos(r, z)]\, dS =$$

$$= -\iint_{S_{\text{цил}}} [p_{zx}\cos(n, x) + p_{zy}\cos(n, y) + p_{zz}\cos(n, z)]\, dS.$$

Для цилиндра $\cos(n, z) = 0$, а

$$p_{zx}\cos(n, x) + p_{zy}\cos(n, y) = p_{z\rho} = \mu\frac{\partial v_z}{\partial \rho}.$$

Так как на стенке цилиндра $v_\rho = 0$,

$$\frac{\partial v_z}{\partial \rho} = \frac{\partial v_z}{\partial \rho} + \frac{\partial v_\rho}{\partial z} = \rho\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

Последнее выражение вычисляется просто, так как

$$\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi_{2n+1}}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\Psi_{2n+1}}{\partial z^2}\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty v_{2n+1}(\lambda,\rho)\cos\lambda z\,d\lambda, \tag{12}$$

а

$$\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi_{2n}}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\Psi_{2n}}{\partial z^2}\right)_{\rho=a}=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{k(2n-1)}}{\sqrt{R^2+z^2}}\varphi_k\left(\operatorname{arctg}\frac{R}{z}\right),$$

где φ_k и B_k определены в § 3.

Окончательно сила сопротивления

$$W=2\pi R\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right)_{\rho=R}dz. \tag{13}$$

§ 6. Численная реализация решения

Решение задачи производилось на электронной счетной машине БЭСМ II ВЦЛОМИ* при $R=1$ и разных $a<0{,}5$.

Опишем здесь опыт счета при $a=0{,}5$.

Четные приближения находились так, как это описано в § 3. Число членов ряда бралось до 16. Интегрирование производилось по формуле Гаусса с 20 ординатами.

Конечно-разностная система для определения нечетных приближений решалась методом прогонки.

При вычислении интегралов в выражениях $A_{2n+1}(\lambda)$ и $B_{2n+1}(\lambda)$ интервал по z от $z=0$ до $z=32$ разбивался на 8 равных частей, и в каждом из интервалов бралось до 20 точек по Гауссу.

Для контроля производились вычисления по формуле Филона. Результаты оказывались близкими.

Интегралы (5) и (12) вычислялись также по формуле Гаусса и по формуле Филона.

Интервал по λ брался $0<\lambda<6$ и для контроля $0<\lambda<10$.

Для достижения 2%-ной точности по Ψ понадобилось проведение 25 итераций в случае $a=0{,}5$. Для $a=0{,}1$ число необходимых итераций сократилось до четырех.

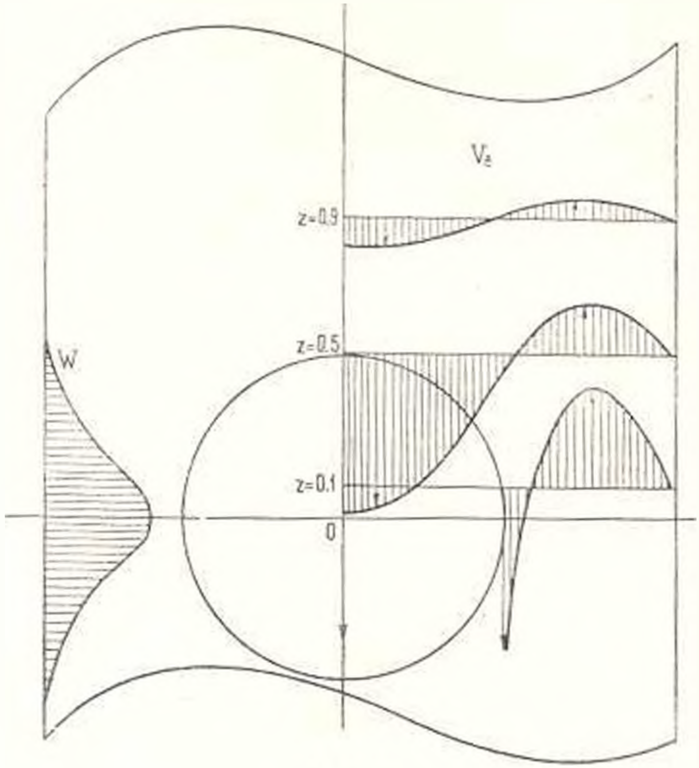
§ 7. Результаты вычислений

Эпюры продольных скоростей при $a=0{,}5$ начерчены на фиг. 2 с правой стороны для $z=0{,}1$, $0{,}5$, $0{,}9$. Как видно, они знакопеременны и подтверждают предварительные качественные представления [8].

Эпюра сопротивления, оказываемого цилиндром вместе со средой движению шарика, начерчена с левой стороны того же рисунка. Заметно очень быстрое затухание этого влияния с увеличением z.

* Вычислительный центр Ленинградского филиала математического института им. Стеклова.

Относительное сопротивление $\overline{W}$ при $a = 0{,}1$, $0{,}3$, $0{,}5$, представляющее площадь этой эпюры, умноженную на $2\pi(R=1)$ и деленную на сопротивление по Стоксу, приведено в строке 7 таблицы 1.



Фиг. 2.

Значения этих $\overline{W}$ меньше таковых, полученных Факсеном при $Re = 0{,}5$, но больше, чем по последнему решению Аппеля (5-я строка).

Фиг. 3

Для контроля нами были поставлены опыты в трубках с диаметром 0,5 *см* со стальными шариками $d = 0{,}1$, $0{,}15$, $0{,}20$, $0{,}25$ *см*. Шарики пускались в строго вертикальную прямолинейную трубу по оси с помощью электромагнита и засекалось время с помощью секундомера на расстоянии 20 *см*, 100 *см* и 150 *см*, не считая нерабочую длину $l = 10$ *см*, равную от 40 до 100 диаметрам шариков.

Замечалось отклонение шарика от оси трубки на больших расстояниях, чем тормозилось движение шарика (см. также [10]).

Таблица 1

№№ п/п	W / Авторы	a/R 0.1	0.2	0.3	0.5	0.7
1	Ладенбург (1907)	1.24	1.48	1.72	2.20	2.68
2	Факсен (1921) Re = 0.1	1.215	—	—	1.47	—
	Re = 0.5	1.67	—	—	7.0	—
3	Аппель и Байрон (1951)	1.25	1.63	2.22	—	—
4	Кавагути (1958)	1.198	1.425	1.733	2.66	4.18
5	Аппель (по Аберману)	1.201	1.495	1.935	3.99	18.27
6	Розенбаум (эксперимент)	1.315	1.800	2.490	5.72	—
7	Авторы (теория)	1.26	1.60	1.94	4.25	—
	l = 0,2 м		1.580	2.100	4.45	—
8	W (эксперимент) 1,0 м	—	1.680	2.240	4.71	—
	l = 1,5 м	—	2.320	2.810	4.17	—

Как показали опыты, данные которых приводятся в строке 8 табл. 1, результаты, полученные на расстоянии 20 *см*, когда шарик еще оставался на оси трубки, соответствуют результатам изложенного выше теоретического решения. Полученные на длине 1,0 *м* данные подходят к кривой Розенбаум [11], а на длине 1,5 *м* наши точки пересекают кривую Розенбаум (см. фиг. 3).

Отметим, что W из наших опытов определено через отношение скорости свободного падения шарика к скорости его падения по оси трубы. Это вытекает из постоянства сопротивления данного шарика при установившемся падении, равного его весу.

Выводы

1. Сопротивление шарика в трубе, найденное интегрированием уравнений Стокса без инерционных членов для двухсвязной области между шаром и бесконечным цилиндром при граничных условиях (2), (3), (4), удовлетворительно сходится с нашими экспериментальными данными на коротком участке трубы (20 *см*). На более длинном участке при экспериментах в стеклянной трубе было замечено отклонение шариков от оси трубы.

2. Построенные эпюры продольных скоростей по приведенному решению вполне подтверждают предварительные качественные представления [9].

Авторы выражают свою признательность К. И. Гришмановской за программирующий алгоритм решения задачи на машине БЭСМ II.

Институт органической химии
АН Армянской ССР

Поступила 14 IX 1965

Ա. Մ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ, Ս. Մ. ԻՍԱՀԱԿՅԱՆ, Լ. Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

ՄԱԾՈՒՑԻԿ ՀԵՂՈՒԿՈՎ ԼՑՎԱԾ ԳԼԱՆԱՁԵՎ ԽՈՂՈՎԱԿԻ ԱՌԱՆՑՔՈՎ ԳՆԴԻԿԻ ԱՆԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքի նպատակն է ուսումնասիրել մածուցիկ հեղուկով լցված ուղղաձիգ գլանի առանցքով գնդիկի հաստատված շարժման ժամանակ առաջացած հիդրոդինամիկական դաշտը և պարզել գլանային պատերի ազդեցությունը գնդիկի շարժման վրա։

Խնդիրը լուծված է Ստոքսի գծային հավասարումների ինտեգրմամբ՝ (2), (3), (4) սահմանային պայմանների դեպքում, սահմանափակվելով նրա կիրառության ճշտության տիրույթով (Re 0,5).

Սահմանային պայմանները բավարարված են հաջորդական մոտեցման եղանակով [7], որի զուգամիտությունն ապացուցված է։

Թվային հաշվումները կատարված են մաթեմատիկական ինստիտուտի էլեկտրոնային հաշվողական կենտրոնում գնդիկի և գլանի շառավիղների 0,1 — 0,5 հարաբերությունների համար։

Խողովակի պատերի պատճառով գնդիկի շարժման դիմադրության մեծացումը համեմատած ազատ անկման Ստոքսի դիմադրության հետ բերված է աղյուսակի 7-րդ սյունում։

Հաշվման այս արդյունքները համեմատված են հեղինակների կողմից փորձնական ճանապարհով ստացված տվյալների, ինչպես նաև այլ հեղինակների տեսական ու փորձնական արդյունքների հետ։

Աշխատանքում բերված են նաև գնդիկի դաշտում արագությունների բաշխման էպյուրները՝ գնդիկի և խողովակի շառավիղների 0,5 հարաբերության համար։

S. M. ISAHAKIAN, A. M. GASPARIAN, L. M. HOVHANNISIAN

FALLING OF SPHERE ALONG THE AXIS OF A CYLINDER FILLED WITH VISCOUS LIQUID

S u m m a r y

This paper gives the solution of Navier-Stoke's linearized equation with boundary conditions (2), (3), (4) to explain the mechanism of viscous fluid and cylindrical wall effect on the sphere, falling along the axis of the cylinder.

Satisfaction of boundary conditions is achieved by the iteration method.

The graphical representation of axial velocity component and wall resistance distribution obtained by this solution, are shown on fig. 2.

Comparison of resistance values of falling spheres obtained by this solution by our and other authors' experimental data are given in fig. 3 and in table 1.

Analysis of these quantities shows the validity of the results obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. т. II. Гостехиздат, М-Л, 1948, стр. 388.
2. *Ladenburg R.* Über den Einfluß von Wänden auf die Bewegung einer Kugel in einer reibenden Flüssigkeit. Ann. d. Phys., 23, 447, 1907.
3. *Faxen H.* Die Bewegung einer starren Kugel längs der Achse eines mit zäher Flüssigkeit gefüllten Rohres. Arkiv für Mathematik, Astronomy OCH Fysik, Bd 17, 27, 1923.
4. *Happel J.* and *Byrone B. J.* Motion of a Sphere and Fluid in a Cylindrical Tube. Ind. and Eng. Chem., V. 46, 6, 1954, pp. 1181—1186.
5. *Heppel J.* and *Ast P. A.* The Motion of Rigid Sphere in a Frictionless Cylinder. Chem. Eng. Science, V. 11, 1960, pp. 286—292.
6. *Faxen H.* Der Widerstand gegen die Bewegung einer starren Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die zwischen zwei parallelen ebenen Wänden eingeschlossen ist. Ann. der Physik, Bd. 68, 1922.
7. *Соболев С. Л.* Алгорифм Шварца в теории упругости. Докл. АН СССР, т. 1 (13), № 6 (110), 1936.
8. *Келик К.* К вопросу о сходимости алгорифмов типа Шварца. АГУ. 1955.
9. *Гаспарян А. М., Заминян А. А.* О механизме падения частиц в вязкой среде. Докл. АН Арм. ССР, т. 26, 1, 1958.
10. *Исаакян С. М., Гаспарян А. М.* Падение твердого шарика в вязкой жидкости, сообщение 2. Изв. АН Арм. ССР, серия техн. наук, № 6, 1965.
11. *Ролгибаум Р. Б.* Экспериментальное исследование стесненного падения шара вдоль оси цилиндрической трубы. Записки Ленингр. горного ин-та им. Плеханова, т. 36, в. 3, 1958.