ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտ. VIII, № 5, 1955 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. О. Гулканян

О центре изгиба призматических стержней с поперечным сечением в виде равнобедренной трапеции и в виде равнобедренного треугольника

В работе приводится решение задачи о центре изгиба призматических стержней с поперечным сечением в виде: 1) равнобедренной трапеции, 2) равнобедренного треугольника. А. И. Лурье [1] дал решение этой задачи вариационным методом приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям, что дало ему возможность получить верхнюю оценку для центра изгиба. Естественно, имея нижнюю оценку, можно будет судить об истинном значении центра изгиба для стержней с таким профилем. Целью настоящей работы являлось нахождение нижней оценки для координаты центра изгиба в данных стержнях. Автор решает эту задачу, применив вариационный метод смягчения граничных условий. Как будет показано ниже, удачный выбор системы аппроксимирующих функций для функции напряжений при изгибе позволил получить значения нижних оценок для центров изгиба, очень близкие к значениям верхних оценок.

О центре изгиба призматических стержней с поперечным сечением в виде равнобедренной трапеции

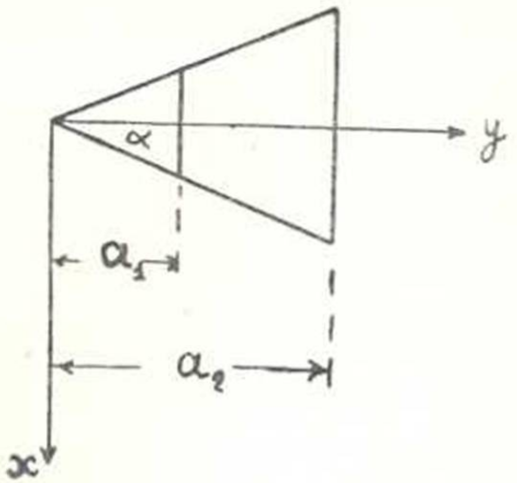
При решении задач об изгибе призматических стержней, сечения которых имеют одну ось симметрии, функция напряжений находится из уравнения Пуассона [2]

$$\Delta U = \frac{P\nu}{I(1+\nu)}(y - y_0) - \frac{P}{2I} f'(y), \tag{1}$$

где P — изгибающая сила, приложенная на свободном конце стержня в центре тяжести поперечного сечения, ν — коэффициент Пуассона, y_0 — координата центра тяжести сечения, I — осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси Oy (фиг. 1), f(y) — произвольная функция, определяемая из условий на контуре.

Функция напряжений U(x, y) на границе сечения удовлетворяет условию:

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{P}{2I}\left[x^2 - f(y)\right]\frac{dy}{ds}. \tag{2}$$



Фиг. 1.

В данной задаче принято

$$f(y) = y^2 tg^2\alpha; \quad (3)$$

тогда (1) и (2) примут вид:

$$\Delta U = \frac{P\nu}{I(1+\nu)}(y - y_0) - \frac{P}{I} y tg^2\alpha \quad (1')$$

$$\frac{\partial U}{\partial s} = 0, \text{ т. е. } U|_s = const.$$

Примем $U|_s = 0$. (2′)

В цилиндрических координатах (1′) и (2′) имеют вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = \frac{P\nu}{I(1+\nu)}(r\cos\varphi - y_0) - \frac{P}{I} r\cos\varphi tg^2\alpha, \quad (4)$$

$$U(r, \varphi)\Big|_{\varphi=\alpha} = 0; \qquad U(r, \varphi)\Big|_{\varphi=-\alpha} = 0,$$
$$U(r, \varphi)\Big|_{r=\frac{a_1}{\cos\varphi}} = 0; \qquad U(r, \varphi)\Big|_{r=\frac{a_2}{\cos\varphi}} = 0. \quad (5)$$

Решение ищем в виде:

$$U(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(r)\cos(\mu_k\varphi), \quad (6)$$

где

$$\mu_k = \frac{(2k-1)\pi}{2\alpha}. \quad (7)$$

Подставляя значение $U(r, \varphi)$ из (6) в (4), а также разлагая $\cos\varphi$ и единицу из (4) в ряд Фурье по $\cos(\mu_k\varphi)$ для нахождения функции $f_k(r)$, получим следующее уравнение:

$$r^2 f_k''(r) + r f_k'(r) - \mu_k^2 f_k(r) = A_k r^3 + B_k r^2, \quad (8)$$

где

$$A_k = \frac{P}{I}\cdot\frac{2}{\alpha}(-1)^k \cos\alpha \frac{\mu_k}{1-\mu_k}\left(\frac{\nu}{1+\nu} - tg^2\alpha\right), \quad (9)$$

$$B_k = \frac{P}{I}\frac{\nu}{1+\nu} y_0 \frac{4(-1)^k}{(2k-1)\pi}.$$

Решая уравнение (8), для $f_k(r)$ получим следующее значение:

$$f_k(r) = E_k r^{\mu_k} + F_k r^{-\mu_k} + \frac{A_k r^3}{9-\mu_k^2} + \frac{B_k r^2}{4-\mu_k}. \quad (10)$$

Подставляя значение $f_k(r)$ из (10) в (6), для $U(r, \varphi)$ получим следующее выражение:

$$U(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\mu_k \varphi) \left\{ E_k r^{\mu_k} + F_k r^{-\mu_k} + \frac{A_k r^3}{9 - \mu_k^2} + \frac{B_k r^2}{4 - \mu_k} \right\}. \tag{11}$$

Для определения постоянных E_k и F_k применим метод смягчения граничных условий Трефца [3]. Этот метод заключается в том, что граничные условия удовлетворяются приближенно, но так, чтобы средняя квадратичная ошибка ε_0 при неточном удовлетворении граничных условий задачи была минимальная, т. е. чтобы $\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial E_k} = 0$ и $\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial F_k} = 0$ $(k = 1, 2, \cdots \infty)$.

Первые два из условий (5) удовлетворяются точно выбором вида функции $U(r, \varphi)$, а два последних удовлетворяются приближенно. Средняя квадратичная ошибка при этом равна

$$\varepsilon_0 = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \left[0 - U\left(\frac{a_1}{\cos\varphi}, \varphi \right) \right]^2 \frac{a_1}{\cos^2\varphi} d\varphi - \int_{-\alpha}^{+\alpha} \left[0 - U\left(\frac{a_2}{\cos\varphi}, \varphi \right) \right]^2 \frac{a_2}{\cos^2\varphi} d\varphi.$$

Из условия минимума получаем:

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} U\left(\frac{a_1}{\cos\varphi}, \varphi \right) \frac{\partial}{\partial E_i} U\left(\frac{a_1}{\cos\varphi}, \varphi \right) \frac{a_1}{\cos^2\varphi} d\varphi -$$

$$- \int_{-\alpha}^{+\alpha} U\left(\frac{a_2}{\cos\varphi}, \varphi \right) \frac{\partial}{\partial E_i} U\left(\frac{a_2}{\cos\varphi}, \varphi \right) \frac{a_2}{\cos^2\varphi} d\varphi = 0,$$

$$(i = 1, 2, \cdots \infty) \tag{12}$$

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} U\left(\frac{a_1}{\cos\varphi}, \varphi \right) \frac{\partial}{\partial F_i} U\left(\frac{a_1}{\cos\varphi}, \varphi \right) \frac{a_1}{\cos^2\varphi} d\varphi -$$

$$- \int_{-\alpha}^{+\alpha} U\left(\frac{a_2}{\cos\varphi}, \varphi \right) \frac{\partial}{\partial F_i} U\left(\frac{a_2}{\cos\varphi}, \varphi \right) \frac{a_2}{\cos^2\varphi} d\varphi = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots \infty).$$

Подставляя значение $U(r, \varphi)$ из (11) в (12) для определения коэффициентов E_k и F_k, получим совокупность двух систем уравнений:

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos(\mu_i \varphi)}{\cos^{\mu_i + 2}\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\mu_k \varphi) \left\{ E_k \left(\frac{a_2}{\cos\varphi} \right)^{\mu_k} (m^{1 + \mu_k + \mu_i} - 1) + \right.$$

$$+ F_k \left(\frac{a_2}{\cos\varphi} \right)^{-\mu_k} (m^{1 + \mu_i - \mu_k} - 1) + \left(\frac{a_2}{\cos\varphi} \right)^3 \left(m^{\mu_i + 4} - 1 \right) \frac{A_k}{9 - \mu_k^2} +$$

$$\left. + \left(\frac{a_2}{\cos\varphi} \right)^2 \left(m^{\mu_i + 3} - 1 \right) \cdot \frac{B_k}{4 - \mu_k^2} \right\} d\varphi = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots \infty) \tag{13}$$

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos(\mu_i \varphi)}{\cos^{2-\mu_i} \varphi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\mu_k \varphi) \left\{ E_k \left(\frac{a_1}{\cos\varphi} \right)^{\mu_k} \left(m^{\mu_k - \mu_i + 1} - 1 \right) + \right.$$

$$+ F_k \left(\frac{a_2}{\cos\varphi} \right)^{-\mu_k} \left(m^{-\mu_i - \mu_k + 1} - 1 \right) + \frac{A_k}{9-\mu_k^2} \left(\frac{a_2}{\cos\varphi} \right)^3 \times$$

$$\left. \times \left(m^{-\mu_i + 4} - 1 \right) + \frac{B_k}{4-\mu_k^2} \left(\frac{a_2}{\cos\varphi} \right)^2 \left(m^{-\mu_i + 3} - 1 \right) \right\} d\varphi = 0,$$

где

$$m = \frac{a_1}{a_2}. \tag{14}$$

В целях упрощения все E_k и F_k при $k \geq 2$ приняты равными нулю. Тогда (13) принимает вид:

$$E_1 \left(m^{2\mu_1 + 1} - 1 \right) a_2^{\mu_1} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos^2(\mu_1 \varphi)}{\cos^{2(1+\mu_1)} \varphi} d\varphi +$$

$$+ F_1 a_2^{-\mu_1} (m - 1) \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos^2(\mu_1 \varphi)}{\cos^2 \varphi} d\varphi +$$

$$+ a_2^3 (m^{4+\mu_1} - 1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{9-\mu_k^2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos(\mu_1 \varphi) \cos(\mu_k \varphi)}{\cos^{5+\mu_1} \varphi} d\varphi +$$

$$+ a_2^2 (m^{3+\mu_1} - 1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{4-\mu_k^2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos(\mu_1 \varphi) \cos(\mu_k \varphi)}{\cos^{4+\mu_1} \varphi} d\varphi = 0, \tag{15}$$

$$E_1 (m - 1) a_2^{\mu_1} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos^2(\mu_1 \varphi)}{\cos^2 \varphi} d\varphi + F_1 a_2^{-\mu_1} (m^{1-2\mu_1} - 1) \times$$

$$\times \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos^2(\mu_1 \varphi)}{\cos^{2(1-\mu_1)} \varphi} d\varphi + a_2^3 (m^{4-\mu_1} - 1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{9-\mu_k^2} \times$$

$$\times \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos(\mu_1 \varphi) \cos(\mu_k \varphi)}{\cos^{5-\mu_1} \varphi} d\varphi + a_2^2 (m^{3-\mu_1} - 1) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{4-\mu_k^2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos(\mu_1 \varphi) \cos(\mu_k \varphi)}{\cos^{4-\mu_1} \varphi} d\varphi = 0.$$

Решая систему двух уравнений (15) с двумя неизвестными, получаем значения E_1 и F_1.

Центр изгиба определяется, как известно [2], по формуле:

$$y=\frac{1}{P}\iint\left(x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial U}{\partial y}\right)dx\,dy-\frac{1}{2I}\iint\left[x^2-f_1(y)\right]ydxdy. \tag{16}$$

Подставляя в (16) значение $U(r,\varphi)$ из (11) и значение $f(y)$ из (3), после интегрирования получаем:

$$y=\frac{2}{P}E_1\frac{\mu_1}{\mu_1+2}a_2^{\mu_1+2}(1-m^{\mu_1+2})\int\limits_0^\alpha\frac{\cos(\mu_1\varphi)}{\cos^{\mu_1+2}\varphi}d\varphi+$$

$$+\frac{2}{P}F_1\frac{\mu_1}{\mu_1-2}a_2^{2-\mu_1}(1-m^{2-\mu_1})\int\limits_0^\alpha\frac{\cos(\mu_1\varphi)}{\cos^{2-\mu_1}\varphi}d\varphi+$$

$$+\frac{1,2}{P}a_2^5(1-m^5)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{9-\mu_k^2}\int\limits_0^\alpha\frac{\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^5\varphi}d\varphi+$$

$$+\frac{a_2^4}{P}(1-m^4)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{4-\mu_k^2}\int\limits_0^\alpha\frac{\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^4\varphi}d\varphi+0,8\frac{1-\mu^5}{1-\mu^4}a_2. \tag{17}$$

Здесь также все E_k и F_k при $k\geqslant 2$ приняты равными нулю.

Значение крутящего момента, вычисленное по методу Трефца, меньше истинного, следовательно, для центра изгиба получаем нижнюю границу.

При $\alpha=\frac{\pi}{4}$ и $\alpha=\frac{\pi}{6}$ эта формула перестает быть верной, так как, согласно (7), $\mu_1=2$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$ и $\mu_1=3$ при $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

В случае, когда $\alpha=\frac{\pi}{4}$,

$$f_1(r)=E_1r^2+F_1r^{-2}+\frac{A_1r^3}{5}+\frac{B_1}{4}r^2\left(\ln r-\frac{1}{4}\right), \tag{18}$$

а при $k\geqslant 2$ $f_k(r)$ имеет значение (10).

Для функции напряжения $U(r,\varphi)$, на основании (6), (10) и (18), получаем следующее выражение:

$$U(r,\varphi)=\cos 2\varphi\left[E_1r^2+F_1r^{-2}+\frac{A_1r^3}{5}+\frac{B_1}{4}r^2\left(\ln r-\frac{1}{4}\right)\right]+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\cos(\mu_k\varphi)\left[E_kr^{\mu_k}+F_kr^{-\mu_k}+\frac{A_kr^3}{9-\mu_k^2}+\frac{B_kr^2}{4-\mu_k^2}\right]. \tag{19}$$

Для определения коэффициентов E_k и F_k здесь также применяем метод Трефца.

Полагая все E_k и F_k при $k \geqslant 2$ равными нулю, для определения E_1 и F_1 получаем систему двух уравнений:

$$E_1 a_2^2(m^5 - 1)\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos^2 2\varphi}{\cos^6\varphi}\,d\varphi + F_1 a_2^{-2}(m-1)\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos^2 2\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi +$$

$$+\frac{B_1}{4}a_2^2(m^5\ln a_1 - \ln a_2)\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos^2 2\varphi}{\cos^6\varphi}\,d\varphi -$$

$$-\frac{B_1}{4}a_2^2(m^5 - 1)\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos^2 2\varphi}{\cos^6\varphi}\left(\frac{1}{4} + \ln\cos\varphi\right)d\varphi +$$

$$+ a_2^3(m^6 - 1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{9-\mu_k^2}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos 2\varphi\cdot\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^7\varphi}\,d\varphi +$$

$$+ a_2^2(m^5 - 1)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k}{4-\mu_k^2}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos 2\varphi\cdot\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^6\varphi}\,d\varphi = 0, \tag{20}$$

$$E_1 a_2^2(m-1)\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos^2 2\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi + F_1 a_2^{-2}\left(\frac{1}{m^3} - 1\right)\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos^2 2\varphi\cdot\cos^2\varphi\,d\varphi +$$

$$+ a_2^3(m^2 - 1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{9-\mu_k^2}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos 2\varphi\cdot\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^3\varphi}\,d\varphi +$$

$$+\frac{B_1}{4}a_2^2(m\ln a_1 - \ln a_2)\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos^2 2\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi - \frac{B_1}{4}a_2^2(m-1)\times$$

$$\times\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos^2 2\varphi}{\cos^2\varphi}\left(\ln\cos\varphi + \frac{1}{4}\right)d\varphi + a_2^2(m-1)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k}{4-\mu_k^2}\times$$

$$\times\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos 2\varphi\cdot\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^2\varphi}\,d\varphi = 0.$$

Подставляя значение $U(r, \varphi)$ из (19) в (16) и учитывая только E_1 и F_1, для определения центра изгиба окончательно получим следующую формулу:

$$y = \frac{E_1}{P}a_2^4(1 - m^4)\int_{0}^{\alpha}\frac{\cos 2\varphi}{\cos^4\varphi}\,d\varphi + \frac{2F_1}{P}\ln m\sin 2\alpha +$$

$$+\frac{B_1}{4P}a_2^4\int_0^\alpha\frac{\cos 2\varphi}{\cos^4\varphi}\left[\ln\frac{a_2}{\cos\varphi}-m^4\ln\frac{a_1}{\cos\varphi}\right]d\varphi+$$

$$+\frac{1,2}{P}a_2^5(1-m^5)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{9-\mu_k^2}\int_0^\alpha\frac{\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^5\varphi}d\varphi+$$

$$+\frac{a_2^4}{P}(1-m^4)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k}{4-\mu_k^2}\int_0^\alpha\frac{\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^4\varphi}d\varphi+0,8\frac{1-\mu^5}{1-\mu^4}a_2. \qquad (21)$$

В случае, когда $\alpha=\frac{\pi}{6}$,

$$f_1(r)=E_1r^3+F_1r^{-3}+\frac{A_1}{6}r^3\left(\ln r-\frac{1}{6}\right)+\frac{B_1r^2}{5},$$

$$f_k(r)=E_kr^{\mu_k}+F_kr^{-\mu_k}+\frac{A_kr^3}{9-\mu_k^2}+\frac{B_kr^2}{4-\mu_k^2}. \quad (k\geqslant 2) \qquad (22)$$

Подставляя (22) в (6), для $U(r,\varphi)$ получим следующее выражение:

$$U(r,\varphi)=\cos 3\varphi\left[E_1r^3+F_1r^{-3}+\frac{A_1}{6}r^3\left(\ln r-\frac{1}{6}\right)-\frac{B_1r^2}{5}\right]+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\cos(\mu_k\varphi)\left[E_kr^{\mu_k}+F_kr^{-\mu_k}+\frac{A_kr^3}{9-\mu_k}+\frac{B_kr^2}{4-\mu_k^2}\right]. \qquad (23)$$

Применяя метод Трефца для определения E_k и F_k и полагая все E_k и F_k для $k\geqslant 2$ равными нулю, получаем следующую систему двух уравнений для определения E_1 и F_1:

$$E_1a_2^7(m^7-1)\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos^2(\mu_1\varphi)}{\cos^8\varphi}d\varphi+F_1a_2(m-1)\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos^2(\mu_1\varphi)}{\cos^2\varphi}d\varphi+$$

$$+\frac{A_1}{6}a_2^7\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos(\mu_1\varphi)}{\cos^8\varphi}\left(m^7\ln\frac{a_1}{\cos\varphi}-\ln\frac{a_2}{\cos\varphi}\right)-$$

$$-\frac{A_1}{36}a_2^7(m^7-1)\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos^2(\mu_1\varphi)}{\cos^8\varphi}d\varphi+a_2^7(m^7-1)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{A_k}{9-\mu_k^2}\times$$

$$\times\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos(\mu_1\varphi)\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^8\varphi}d\varphi+a_2^6(m^6-1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{4-\mu_k^2}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos(\mu_1\varphi)\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^7\varphi}d\varphi=0,$$

$$a_2(m-1)E_1\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos^2(\mu_1\varphi)}{\cos^2\varphi}d\varphi+F_1a_2^{-5}\left(\frac{1}{m^5}-1\right)\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos^2(\mu_1\varphi)\cos^4\varphi d\varphi+$$

$$+ a_2 \frac{A_1}{6} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos^2(\mu_1 \varphi)}{\cos^2\varphi} \left(m \ln \frac{a_1}{\cos\varphi} - \ln \frac{a_2}{\cos\varphi} \right) d\varphi -$$

$$- \frac{A_1}{36} a_2(m-1) \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos^2(\mu_1\varphi)}{\cos^2\varphi} d\varphi + a_2(m-1) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{9-\mu_k^2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos(\mu_1\varphi)\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^2\varphi} d\varphi = 0. \tag{24}$$

На основании (16), (3) и (23) для определения центра изгиба получаем следующую формулу:

$$y = \frac{1{,}2}{P} a_2^3 E_1 (1 - m^5) \int_0^{\alpha} \frac{\cos 3\varphi}{\cos^5\varphi} d\varphi + \frac{6F_1}{P} \frac{1}{a_2} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \times$$

$$\times \int_0^{\alpha} \cos 3\varphi \cdot \cos\varphi d\varphi + \frac{A_1}{5P} a_2^5 \int_0^{\alpha} \frac{\cos 3\varphi}{\cos^5\varphi} \left[\ln \frac{a_2}{\cos\varphi} - m^5 \ln \frac{a_1}{\cos\varphi} \right] -$$

$$- \frac{A_1}{150P} a_2^5 (1 - m^5) \int_0^{\alpha} \frac{\cos 3\varphi}{\cos^5\varphi} d\varphi + \frac{1{,}2}{P} a_2^5 (1 - m^5) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{9-\mu_k^2} \times$$

$$\times \int_0^{\alpha} \frac{\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^5\varphi} d\varphi + \frac{a_2^4}{P} (1 - m^4) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{4-\mu_k^2} \int_0^{\alpha} \frac{\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^4\varphi} d\varphi + 0{,}8 \frac{1-\mu^5}{1-\mu^4} a_2. \tag{25}$$

О центре изгиба призматических стержней с поперечным сечением в виде равнобедренного треугольника

В частном случае, когда $a_1 = 0$, т. е. $m = 0$, поперечное сечение — равнобедренный треугольник. В этом случае третье из условий (5) принимает вид $U(r, \varphi)|_{r=0} = 0$, а для выполнения этого достаточно, чтобы $f_k(r) = 0$. Чтобы $f_k(r)$ при $r = 0$ было конечным и равнялось нулю, необходимо, чтобы $F_k = 0$, т. е. (10) принимает вид:

$$f_k(r) = E_k r^{\mu_k} + \frac{A_k r^3}{9-\mu_k^2} + \frac{B_k r^2}{4-\mu_k^2};$$

соответственно и (11) примет вид:

$$U(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\mu_k \varphi) \left\{ E_k r^{\mu_k} + \frac{A_k r^3}{9-\mu_k^2} + \frac{B_k r^2}{4-\mu_k^2} \right\}.$$

Применяя метод Трефца, для определения E_k получим:

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} U\left(\frac{a_2}{\cos\varphi}, \varphi\right) \frac{\partial}{\partial E_i} U\left(\frac{a_2}{\cos\varphi}, \varphi\right) \frac{a_2}{\cos^2\varphi} d\varphi = 0. \qquad (i = 1, 2, \cdots \infty)$$

Полагая все E_i, кроме E_1, равными нулю, для определения E_1 получим следующее уравнение:

$$E_1 = -\frac{a_2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{9-\mu_k^2}\int\limits_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos(\mu_1\varphi)\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^{5+\mu_1}\varphi}d\varphi+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{4-\mu_k^2}\int\limits_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos(\mu_1\varphi)\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^{4+\mu_1}\varphi}d\varphi}{\int\limits_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos^2(\mu_1\varphi)}{\cos^{2(\mu_1+2)}\varphi}d\varphi}\,a_2^{2-\mu_1}.$$

Полагая в (17) $m = 0$ и $F_k = 0$. для центра изгиба получаем следующую формулу:

$$y = \frac{2}{P}E_1\frac{\mu_1}{\mu_1+2}a_2^{\mu_1+2}\int\limits_0^{\alpha}\frac{\cos(\mu_1\varphi)}{\cos^{\mu_1+2}\varphi}d\varphi +$$

$$+\frac{1.2}{P}a_2^5\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{9-\mu_k^2}\int\limits_0^{\alpha}\frac{\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^5\varphi}d\varphi +$$

$$+\frac{a_2^4}{P}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{4-\mu_k^2}\int\limits_0^{\alpha}\frac{\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^4\varphi}d\varphi + 0{,}8a_2.$$

Эта формула неприменима для $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Когда $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$U(r,\varphi) = \cos 2\varphi\left[E_1r^2 + \frac{A_1r^3}{5} + \frac{B_1}{4}r^2\left(\ln r - \frac{1}{4}\right)\right] +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\cos(\mu_k\varphi)\left[E_kr^{\mu_k} + \frac{A_kr^3}{9-\mu_k^2} + \frac{B_kr^2}{4-\mu_k^2}\right];$$

$$y = \frac{1}{P}E_1a_2^4\int\limits_0^{\alpha}\frac{\cos 2\varphi}{\cos^4\varphi}d\varphi + \frac{B_1}{4P}a_2^4\int\limits_0^{\alpha}\frac{\cos 2\varphi}{\cos^4\varphi}\ln\frac{a_2}{\cos\varphi}d\varphi +$$

$$+\frac{1{,}2}{P}a_2^5\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{9-\mu_k^2}\int\limits_0^{\alpha}\frac{\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^5\varphi}d\varphi + \frac{a_2^4}{P}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k}{4-\mu_k^2}\times$$

$$\times\int\limits_0^{\alpha}\frac{\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^4\varphi}d\varphi + 0.8a_2.$$

Здесь E_1 имеет значение:

$$E_1 = -\frac{1}{\int\limits_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos^2 2\varphi}{\cos^6\varphi}d\varphi}\left\{\frac{B_1}{4}\int\limits_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos^2(2\varphi)}{\cos^6\varphi}\left(\ln\frac{a_2}{\cos\varphi} - \frac{1}{4}\right)d\varphi +\right.$$

$$+ a_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{9-\mu_k^2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos(2\varphi)\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^7\varphi} d\varphi +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{4-\mu_k^2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos 2\varphi \cdot \cos(\mu_k\varphi)}{\cos^6\varphi} d\varphi \Bigg\}.$$

Если $\alpha = \frac{\pi}{6}$, то, полагая в (23) и в (25) $F = 0$ и $m = 0$, для $U(r, \varphi)$ и y получаем соответственно следующие выражения:

$$U(r, \varphi) = \cos 3\varphi \left[E_1 r^3 + \frac{A_1}{6} r^3 \left(\ln r - \frac{1}{6} \right) - \frac{B_1 r^2}{5} \right] +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \cos(\mu_k\varphi) \left[E_k r^{\mu_k} + \frac{A_k r^3}{9-\mu_k^2} + \frac{B_k r^2}{4-\mu_k^2} \right];$$

$$y = \frac{1.2}{P} E_1 a_2^5 \int_0^{\alpha} \frac{\cos 3\varphi}{\cos^6\varphi} d\varphi + \frac{A_1 a_2^5}{5P} \int_0^{\alpha} \frac{\cos 3\varphi}{\cos^6\varphi} \ln \frac{a_2}{\cos\varphi} d\varphi -$$

$$- \frac{1}{150} \frac{a_2^5}{P} A_1 \int_0^{\alpha} \frac{\cos 3\varphi}{\cos^5\varphi} d\varphi + \frac{1{,}2}{P} a_2^5 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{9-\mu_k^2} \int_0^{\alpha} \frac{\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^6\varphi} d\varphi +$$

$$+ \frac{a_2^4}{P} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{4-\mu_k^2} \int_0^{\alpha} \frac{\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^4\varphi} d\varphi + 0.8 a_2,$$

где

$$E_1 = - \frac{1}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos^2(3\varphi)}{\cos^8\varphi} d\varphi} \left\{ \frac{A_1}{6} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos^2(3\varphi)}{\cos^8\varphi} \left(\ln \frac{a_2}{\cos\varphi} - \frac{1}{6} \right) d\varphi + \right.$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{9-\mu_k^2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos(3\varphi)\cos(\mu_k\varphi)}{\cos^8\varphi} d\varphi +$$

$$\left. + a_2^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{4-\mu_k^2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos(3\varphi) \cdot \cos(\mu_k\varphi)}{\cos^7\varphi} d\varphi \right\}.$$

В качестве примера вычислены* значения центров изгиба $\tilde{y}$ (нижние оценки) призм с поперечными сечениями в виде равнобедренных трапеций (табл. 1) и равнобедренных треугольников (табл. 2) для некоторых значений угла α.

* Расчеты произведены для $\nu = 0{,}3$.

Для сравнения вычислены также верхние оценки центра изгиба $\bar{\bar{y}}$ для тех же углов на основании работы А. И. Лурье [1]. За расчетную формулу y принимаем среднее арифметическое центров изгиба $\bar{y}$ и $\bar{\bar{y}}$. Тогда ошибка $\delta = \bar{y} - y = \frac{\bar{y} - \bar{\bar{y}}}{2}$.

Таблица 1

2α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\bar{y}/a_2$	0,824	0,768	0,720	0,641
$\bar{\bar{y}}/a_2$	0,824	0,766	0,717	0,634
y/a_2	0,824	0,767	0,7185	0,6375

Таблица 2

2α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\bar{y}/a_2$	0,756	0,709	0,667	0,598
$\bar{\bar{y}}/a_2$	0,756	0,709	0,667	0,596
y/a_2	0,756	0,709	0,667	0,597

Как видно из таблиц 1 и 2, максимальная ошибка достигает 0,35%.

Сектор математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 21 VI 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Труды Лен. инд. ин-та, 1939, № 3, физ.-мат. науки, вып. I, стр. 121—126.
2. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. Гос. изд. тех. теор. лит., М.—Л., 1947.
3. *Лейбензон Л. С.* Собрание трудов, том I, изд. АН СССР, М., 1951.
4. *Канторович Л. В.* и *Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гос. изд. техн.-теор. лит., М.—Л., 1950.

Ն. Օ. Գուլքանյան

ՀԱՎԱՍԱՐԱՍՐՈՒՆ ՍԵՂԱՆԻ ԵՎ ՀԱՎԱՍԱՐԱՍՐՈՒՆ ԵՌԱՆԿՅԱՆ ՏԵՍՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔՈՎ ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՁՈՂԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերված է հավասարասրուն սեղանի և հավասարասրուն եռանկյան տեսք ունեցող լայնական հատվածքով պրիզմատիկ ձողերի ծռման կենտրոնի վերաբերյալ խնդրի լուծումը։

Ա. Ի. Լուրյեն տվել է այդ խնդրի լուծումը վարիացիոն եղանակով և ստացել է ծռման կենտրոնի համար վերին գնահատականը։

Տվյալ հոդվածում տրված է նույն խնդրի համար ծռման կենտրոնի ստորին գնահատականը։ Այստեղ ևս խնդիրը լուծվում է վարիացիոն եղանակով եզրային պայմանների մեղմացման օգնությամբ։ Ստորին գնահատականի համար ստացվում են վերին գնահատականին շատ մոտ արժեքներ։