

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Կ. Տ. Կոբանյան

Устойчивость плоской формы изгиба за пределами упругости при произвольном законе упрочнения

В практических расчетах на устойчивость плоской формы изгиба за пределами упругости обычно пользуются предложением С. П. Тимошенко [1], согласно которому жесткости стержня на изгиб и кручение при потере устойчивости плоской формы изгиба за пределами упругости по сравнению с упругими жесткостями уменьшаются в том же отношении, в каком уменьшается жесткость сжатого стержня на изгиб при потере устойчивости прямолинейной формы за пределами упругости, причем касательный модуль определяется по максимальной пластической деформации изгиба. Это предложение дает пониженное значение для жесткостей, следовательно, и для критической длины плоско изогнутого стержня при потере устойчивости за пределами упругости, хотя бы потому, что при сжатии призматический стержень целиком переходит за предел упругости, а при изгибе значительная часть поперечного сечения остается в пределах упругости.

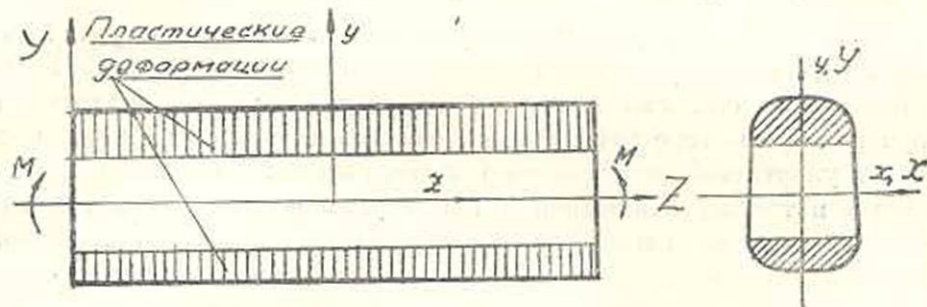
Задача устойчивости плоской формы изгиба за пределами упругости рассматривалась в работах Л. М. Качанова [2, 3, 4]. В работах [2, 3] рассмотрена задача устойчивости плоской формы изгиба узкого прямоугольного поперечного сечения в случаях идеальной пластичности и линейного закона упрочнения. Распределение вариаций деформаций сдвига предполагается таким, как в соответствующей задаче в пределах упругости. В работе [4] Л. М. Качанов рассматривает те же задачи, исходя из теории пластического течения.

В настоящей работе рассматривается задача о потере устойчивости плоской формы изгиба призматического стержня произвольного поперечного сечения при произвольном законе упрочнения материала, исходя из теории малых упруго-пластических деформаций, детально разработанной А. А. Ильиным [5].

Вариации деформаций растяжения и сжатия представлены через вариации кривизны и удлинения центральной оси стержня, как в элементарной теории изгиба, а вариации деформаций сдвига — через функцию кручения и угол закручивания, как в теории кручения Сен-Венана. Далее рассмотрим две конкретные задачи: устойчивость

плоской формы чистого изгиба стержня прямоугольного поперечного сечения и тонкостенного двутавра. Задача определения критических величин приводится к определению одного коэффициента. Жесткость на кручение определяется приближенно, причем с принятой в работе точностью обеспечивается непрерывность вариаций касательных напряжений.

§ 1. *Постановка задачи.* Пусть стержень с прямой осью подвергнут чистому изгибу парами, приложенными на его концах. Будем пользоваться двумя системами осей координат: ось Z направлена по центральной оси недеформированного стержня, а оси X и Y — по главным осям конечного поперечного сечения (фиг. 1).



Фиг. 1

С произвольным поперечным сечением деформированного стержня свяжем вторую координатную систему x, y, z так, чтобы x и y были направлены по главным осям поперечного сечения, а ось z — по касательной оси стержня. Будем рассматривать такой случай закрепления концов стержня, когда концевые сечения могут свободно поворачиваться относительно осей X и Y и не могут вращаться вокруг оси Z .

Для краткости предположим, что поперечное сечение стержня обладает одной осью симметрии, причем изгиб происходит в плоскости симметрии стержня.

Предполагая, что сечения, нормальные к оси стержня, при изгибе остаются плоскими, для деформированного состояния стержня имеем:

$$\begin{aligned} e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} = 0, \quad e_{xx} = e_{yy} = -Ge_{zz} \\ e_{zz} = e_0 - z_0 y, \quad e_1 = |e_{zz}|. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь e_0 — относительное удлинение, а z_0 — кривизна центральной линии стержня. Обозначая прогиб центральной оси стержня через V_0 , имеем:

$$z_0 = \frac{d^2 V_0}{dZ^2}. \quad (1.2)$$

Используя теорию малых упруго-пластических деформаций, для докритического напряженного состояния стержня получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \quad \sigma_1 = |\sigma_z|, \\ \sigma_z = E e_{zz} [1 - \omega(|e_{zz}|)],\end{aligned}\quad (1.3)$$

где $E = 3G$ — модуль упругости.

Из условия равновесия части стержня, расположенной между концом стержня $Z = 0$ и произвольным сечением $Z = \text{const}$, имеем:

$$\iint \sigma_z dx dy = 0, \quad \iint y \sigma_z dx dy = -M. \quad (1.4)$$

Здесь M — внешний изгибающий момент. Интегрирование производится по всему поперечному сечению $Z = \text{const}$.

При заданном M соотношения (1.4) определяют относительное удлинение e_0 и кривизну χ_0 центральной оси стержня, а последними определяются размеры пластических областей поперечного сечения. Поэтому в дальнейшем будем считать, что до потери устойчивости распределение областей упругих и пластических деформаций известно.

Если жесткость стержня на изгиб относительно оси y мала по сравнению с жесткостью относительно оси x , то при некотором значении внешнего момента M плоская форма изгиба становится неустойчивой.

Рассмотрим состояние стержня, изогнутого парами, приложенными к его концам, близкое к состоянию плоского изгиба.

Согласно теории тонких стержней варьированное напряженное состояние будет характеризоваться следующими напряжениями:

$$\sigma_z + \delta\sigma_z, \quad \delta\tau_{xz}, \quad \delta\tau_{yz}; \quad \delta\sigma_x = \delta\sigma_y = \delta\tau_{xy} = 0, \quad \delta\sigma_1 = \delta|\sigma_z|, \quad (1.5)$$

а варьированное деформированное состояние, если материал считать несжимаемым, — следующими деформациями:

$$e_{zz} + \delta e_{zz}, \quad \delta e_{xz}, \quad \delta e_{yz}; \quad e_{xx} + \delta e_{xx} = e_{yy} + \delta e_{yy} = -\frac{1}{2}(e_{zz} + \delta e_{zz}),$$

$$\delta e_{xx} = \delta e_{yy} = -\frac{1}{2} \delta e_{zz}, \quad \delta e_{xy} = 0.$$

В областях нагружения связь между вариациями деформаций и напряжений для возмущенного состояния стержня можно найти путем варьирования основного закона малых упруго-пластических деформаций, который для тонких стержней будет выражаться следующими состояниями:

$$\sigma_z = \frac{\sigma_1}{e_1} e_{zz}, \quad \tau_{xz} = \frac{\sigma_1}{3e_1} e_{xz}, \quad \tau_{yz} = \frac{\sigma_1}{3e_1} e_{yz}, \quad \sigma_1 = E e_1 [1 - \omega(e_1)],$$

$$\text{где } \sigma_1 = \sqrt{\sigma_z^2 + 3(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}, \quad e_1 = \sqrt{e_{zz}^2 + \frac{1}{3}(e_{xz}^2 + e_{yz}^2)}.$$

Варьируя эти соотношения, имеем:

$$\delta\sigma_z = \frac{d\sigma_i}{de_i} \delta e_i \frac{e_{zz}}{e_i} - \frac{\delta_i}{e_i^2} e_{zz} \delta e_i + \frac{\sigma_i}{e_i} \delta e_{zz},$$

$$\delta\tau_{xz} = \frac{1}{3} \frac{d}{de_i} \left(\frac{\sigma_i}{e_i} \right) e_{xz} \delta e_i + \frac{\sigma_i}{3e_i} \delta e_{xz},$$

$$\delta\tau_{yz} = \frac{1}{3} \frac{d}{de_i} \left(\frac{\sigma_i}{e_i} \right) e_{yz} \delta e_i + \frac{\sigma_i}{3e_i} \delta e_{yz}.$$

Используя здесь (1.1), (1.3) и (1.5), получаем:

$$\delta\sigma_z = \frac{d\sigma_i}{de_i} \delta e_{zz},$$

$$\delta\tau_{xz} = \frac{\sigma_i}{3e_i} \delta e_{xz}, \quad (1.6)$$

$$\delta\tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3e_i} \delta e_{yz}.$$

В областях разгрузки и упругих деформаций связь между вариациями напряжений и деформаций находим из (1.6), положив

$$\varepsilon_i = 3Ge_i = Ee_i :$$

$$\delta\sigma_z = E\delta e_{zz}, \quad \delta\tau_{xz} = G\delta e_{xz}, \quad \delta\tau_{yz} = G\delta e_{yz}.$$

Поверхность, разделяющая области нагружения и разгрузки, определяется из условия равенства нулю вариации интенсивности деформаций

$$\delta e_i = \delta |e_{zz}| = 0 \quad \text{или} \quad \delta e_{zz} = 0.$$

Относительное удлинение деформированной оси стержня обозначим через ε , ее кривизны в плоскостях XZ и YZ—через κ' и $\kappa_0 + \kappa$, а поворот поперечного сечения вокруг оси Z—через θ . Тогда исходя из представления о деформированном состоянии, обычном для теории тонких стержней, имеем:

$$\delta e_{zz} = \varepsilon - \kappa y + \kappa' x,$$

$$\delta e_{xz} = \left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} - y \right) \frac{d\theta}{dZ},$$

(1.7)

$$\delta e_{yz} = \left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} + x \right) \frac{d\theta}{dZ}.$$

Внося (1.7) в (1.6) и используя (1.3), для вариаций напряжений в областях нагружения, где до потери устойчивости материал находился за пределами упругости, получаем:

$$\delta\sigma_z = \frac{d\sigma_i}{de_i} (\varepsilon - \kappa y + \kappa' x),$$

$$\begin{aligned}\delta\tau_{xz} &= G\dot{\theta} (1-\omega) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y \right), \\ \delta\tau_{yz} &= G\dot{\theta} (1-\omega) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x \right).\end{aligned}\quad (1.8)$$

Здесь $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dZ}$, $G(1-\omega) = \frac{\sigma_i}{3e_i}$.

Для областей разгрузки и упругих деформаций выражения вариаций напряжений примут вид:

$$\begin{aligned}\delta\sigma_z &= E(\varepsilon - \kappa y + \kappa' x), \\ \delta\tau_{xz} &= G \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y \right) \dot{\theta}, \\ \delta\tau_{yz} &= G \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x \right) \dot{\theta}.\end{aligned}\quad (1.9)$$

Обозначая перемещения точек центральной оси стержня в направлении осей X и Y через $U_1 = U(Z)$ и $V_1 = V_0(Z) + V(Z)$ и используя (1.2), имеем:

$$\kappa' = \frac{d^2 U}{dZ^2}, \quad \kappa = \frac{d^2 V}{dZ^2}. \quad (1.10)$$

Предполагая, что внешний момент M при потере устойчивости сохраняет прежнее значение, из условий равновесия части стержня, находящейся между концом $Z=0$ и произвольным сечением $Z=\text{const}$, находим:

$$\begin{aligned}\iint \delta\sigma_z \, dx dy &= 0, \\ \iint y \delta\sigma_z \, dx dy &= 0, \\ \iint x \delta\sigma_z \, dx dy &= 0M, \\ \iint (x \delta\tau_{yz} - y \delta\tau_{xz}) \, dx dy &= - \frac{dU}{dZ} M.\end{aligned}\quad (1.11)$$

Интегрирование здесь производится по всему сечению $Z=\text{const}$. Каждый из этих интегралов должен быть разбит на несколько частей, так как в области разгрузки и упругих деформаций справедливы соотношения (1.9), а в областях нагружения — (1.8). Уравнения (1.11) являются уравнениями потери устойчивости за пределами упругости.

Как известно, уравнения потери устойчивости в пределах упругости имеют вид:

$$B^* \frac{d^2 U}{dZ^2} = 0M, \quad C^* \frac{d\theta}{dZ} = - \frac{dU}{dZ} M, \quad (1.12)$$

где B^* — боковая упругая жесткость на изгиб, а C^* — упругая жесткость на кручение.

В следующих параграфах мы укажем общий путь перехода от системы уравнений (1.11) к системе двух дифференциальных уравнений, аналогичной системе (1.12). Задача сводится к определению двух коэффициентов, аналогичных коэффициентам B^* и C^* в уравнениях (1.12), которые будут характеризовать жесткость стержня при потере устойчивости плоской формы изгиба за пределами упругости.

§ 2. *Определение жесткостей B и C .* Обозначим через $D_1, D_2, \dots$ области нагружения, где до потери устойчивости материал находился за пределами упругости, а через $D'_1, D'_2, \dots$ — области разгрузки и упругих деформаций. Подставляя значение $\delta\sigma_z$ из (1.8) и (1.9) в первые три уравнения системы (1.11), получаем:

$$\begin{aligned} \sum_j \iint_{D_j} \frac{d\sigma_i}{de_i} (\gamma - \alpha y + x) dx dy + \sum_k \iint_{D'_k} E (\gamma - \alpha y + x) dx dy &= 0, \\ \sum_j \iint_{D_j} \frac{d\sigma_i}{de_i} (\gamma - \alpha y + x) y dx dy + \sum_k \iint_{D'_k} E (\gamma - \alpha y + x) y dx dy &= 0, \\ \left[\sum_j \iint_{D_j} \frac{d\sigma_i}{de_i} (\gamma - \alpha y + x) x dx dy + \sum_k \iint_{D'_k} E (\gamma - \alpha y + x) x dx dy \right] \alpha' = \theta M. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\gamma = \frac{\varepsilon}{\alpha'}$, $\alpha = \frac{x}{\alpha'}$.

Решая первые два уравнения (2.1) для конкретно заданного поперечного сечения, внешнего момента и закона упрочнения материала относительно неизвестных величин γ и α , затем внося полученные значения γ и α в последнее уравнение (2.1), получаем:

$$B \frac{d^2 U}{dZ^2} = \theta M, \quad (2.2)$$

где B будет уже известной постоянной величиной:

$$B = \sum_j \iint_{D_j} \frac{d\sigma_i}{de_i} (\gamma - \alpha y + x) x dx dy + \sum_k \iint_{D'_k} E (\gamma - \alpha y + x) x dx dy. \quad (2.3)$$

Она будет характеризовать жесткость стержня на изгиб при потере устойчивости плоской формы изгиба за пределами упругости.

Внося (1.8) в последнее уравнение системы (1.11), получаем:

$$C \frac{d\theta}{dZ} = -M \frac{dU}{dZ}, \quad (2.4)$$

где

$$C = G \iint (1 - \omega) \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x^2 + y^2 \right) dx dy.$$

Величина C будет жесткостью на кручение при потере устойчивости плоской формы изгиба. Интегрирование здесь производится по всему сечению, причем функция $\omega(y)$ обращается в нуль в областях разгрузки и упругих деформаций.

Система двух дифференциальных уравнений (2.1) и (2.3) отличается от системы (1.12) только постоянными коэффициентами. После определения коэффициентов B и C задача об устойчивости плоской формы изгиба за пределами упругости сводится к соответствующей задаче в пределах упругости.

Для определения функции φ , через которую выражается жесткость на кручение C , мы используем уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad (2.5)$$

граничные условия, выражающие, что:

а) боковая поверхность стержня свободна от внешних усилий,
б) на линии раздела областей нагружения и разгрузки, а также на границе упругих и пластических областей, вариации напряжений сдвига меняются непрерывно,

и условие, что функции φ , представляющая вариации перемещений по направлению оси z , непрерывна.

Из (1.9) и (2.5) находим, что в областях разгрузки и упругих деформаций функция φ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0.$$

Для областей нагружения $D_1, D_2, \dots$ из (1.8) и (2.5), принимая во внимание, что в рассматриваемой задаче ω зависит только от y , для функции φ получаем уравнение:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{1-\omega} \frac{d\omega}{dy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{1-\omega} \frac{d\omega}{dy}. \quad (2.6)$$

Здесь φ_j — значение функции φ в области D_j , а φ'_k — в области D'_k .

Из граничных условий имеем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = y \cos(\nu, x) - x \cos(\nu, y) \text{ — на контуре сечения,} \quad (2.7)$$

где ν — внешняя нормаль к контуру поперечного сечения,

$$\frac{\partial \varphi'_k}{\partial \nu} = (1-\omega) \frac{\partial \varphi_j}{\partial \nu} + \omega [y \cos(\nu, x) - x \cos(\nu, y)] \text{ —} \quad (2.8)$$

на линиях, являющихся границами между областями нагружения D_j и разгрузки D'_k .

Для определения величины C удобнее будет ввести функцию

напряжения, аналогичную функции напряжения Прандтля в теории кручения упругих стержней.

Введем функцию $F(x, y)$ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\delta\tau_{xx} &= \dot{\theta} \frac{\partial F}{\partial y} = G(1-\omega) \dot{\theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \\ \delta\tau_{yx} &= -\dot{\theta} \frac{\partial F}{\partial x} = G(1-\omega) \dot{\theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right),\end{aligned}\quad (2.9)$$

где ω зависит только от y в областях D_j и обращается в нуль в областях разгрузки и упругих деформаций (фиг. 2).

Из (2.6) и (2.9) находим, что функция F в областях D_j должна удовлетворять уравнению

$$\Delta F + \frac{1}{1-\omega} \frac{d\omega}{dy} \frac{\partial F}{\partial y} = -2G(1-\omega). \quad (2.10)$$

Положив в (2.10) $\omega = 0$ получим дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция F в областях D'_k

$$\Delta F = -2G. \quad (2.11)$$

Используя соотношения (2.9) и известные формулы $\cos(\nu, x) = \frac{dy}{ds}$,

$\cos(\nu, y) = -\frac{dx}{ds}$, где ds — дифференциал дуги кривой, являющейся границей всего поперечного сечения, из условия (2.7) получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{\partial F}{\partial s} = 0$$

или $F = \text{const}$ на контуре сечения. (2.12)

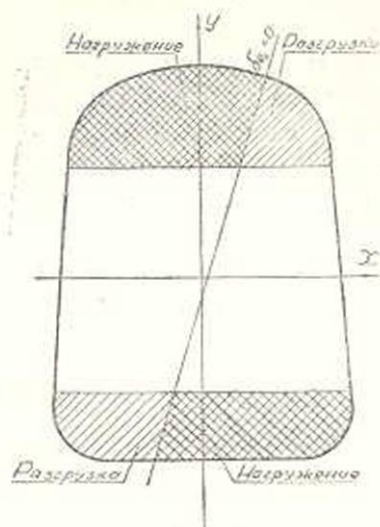
Обозначая через F_1 и F'_k значения функции F , соответствующие φ_1 и φ'_k , из (2.8) и (2.9) находим:

$$F_j = F'_k = \text{const} = c_{jk} \text{ на границах } D_j \text{ и } D'_k. \quad (2.13)$$

Из условия непрерывности функции φ и соотношений (2.9) получаем второе условие, которому должна удовлетворять функция F

$$\frac{1}{1-\omega} \frac{\partial F_j}{\partial \nu} = \frac{\partial F'_k}{\partial \nu} \text{ на границах } D_j \text{ и } D'_k. \quad (2.14)$$

В рассматриваемой задаче границы областей нагружения всегда имеют общую часть с границей области поперечного сечения, поскольку как линии раздела областей нагружения и разгрузки, так и граница упругих и пластических областей, которыми отделяются



Фиг. 2.

области нагружения от остальной части поперечного сечения, суть прямые, пересекающие контур поперечного сечения. В этом случае постоянные $c_{jk} = 0$.

Действительно, для этого достаточно, чтобы условие $F_j - F'_k = 0$ выполнялось для одной точки границы областей D_j и D'_k . Такой точкой может служить точка пересечения линии раздела этих областей с контуром поперечного сечения, так как на контуре, согласно (2.12),

$$F_j = F'_k = F = C_0.$$

Тогда вместо (2.13) будем иметь:

$$F_j = F'_k \text{ на границе } D_j \text{ и } D'_k. \quad (2.15)$$

Легко заметить, что любая постоянная удовлетворяет однородным уравнениям, соответствующим (2.10), (2.11) и условиям (2.14), (2.15). Но, как видно из (2.9), функцию F достаточно определить с точностью до произвольной постоянной. Поэтому можно положить

$$C_0 = 0.$$

Таким образом, вместо (2.12) будем иметь условие:

$$F = 0 \text{ на контуре сечения.} \quad (2.16)$$

Для жесткости C через функцию F будем иметь выражение:

$$C = - \iint \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2.17)$$

Чтобы упростить выражение (2.17), представим его в виде:

$$C = - \sum \iint_{D_j} \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy - \sum \iint_{D'_k} \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy.$$

Так как функция F в каждой из областей D_j , D'_k непрерывна со своими производными, мы можем произвести интегрирование по частям:

$$C = - \sum \int_{L_j} F [x \cos(\nu, x) + y \cos(\nu, y)] ds - \sum \int_{L'_k} F [x \cos(\nu, x) + y \cos(\nu, y)] ds + 2 \sum \iint_{D_j} F dx dy + 2 \sum \iint_{D'_k} F dx dy. \quad (2.18)$$

Здесь в первых двух суммах L_j и L'_k обозначают контуры областей D_j и D'_k . Часть контурных интегралов в (2.18) обращается в нуль вследствие (2.16). По остальной части контуров интегрирование совершается два раза в противоположных направлениях. Контурные интегралы, распределенные по этой части контуров, вслед-

ствие непрерывности функции F взаимно уничтожаются. Поэтому из (2.18) получаем:

$$C = 2 \iint F dx dy. \quad (2.19)$$

Здесь интегрирование производится по всему поперечному сечению.

Таким образом, мы доказали, что обычная формула, связывающая жесткость на кручение с функцией напряжения, справедлива и в данном случае.

Определение жесткости на кручение при потере устойчивости свелось, таким образом, к нахождению функции F , определяемой уравнением (2.10) в областях D_1 , уравнением (2.11) в областях D'_k и условиями (2.14), (2.15) и (2.16).

§ 3. Устойчивость стержня прямоугольного сечения. Уравнение (2.1) значительно упрощается при $\varepsilon = \gamma = 0$, т. е. когда линия раздела областей разгрузки и нагружения проходит через центр тяжести поперечного сечения. Это условие выполняется, например, при потере устойчивости плоской формы изгиба стержня, поперечное сечение которого имеет две оси симметрии.

В качестве примера рассмотрим устойчивость плоской формы чистого изгиба стержня прямоугольного поперечного сечения (фиг. 3).

Для докритического состояния имеем:

$$e_{xx} = -\kappa_0 y, \quad e_i = |e_{xx}| = \kappa_0 |y|, \quad e_s = \kappa_0 \eta.$$

Прямые $y = \pm \eta$ разделяют упругие и пластические области поперечного сечения.

При потере устойчивости вариации деформации растяжения будут иметь вид:

$$\delta e_{xx} = \kappa' x - \kappa y.$$

Линия раздела областей нагружения и разгрузки определяется уравнением

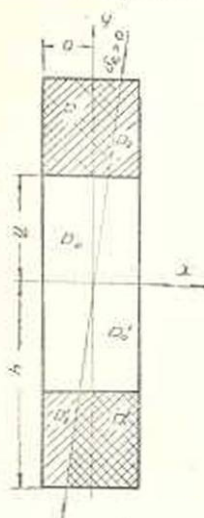
$$x = \alpha y,$$

где

$$\alpha = \frac{\kappa}{\kappa'}.$$

Первое уравнение (2.1) для рассматриваемой задачи обращается в тождество. Исходя из второго уравнения этой же системы, можно показать, что линия раздела $x = \alpha y$ всегда проходит через области пластических деформаций.

Остается рассмотреть два случая: а) когда линия раздела пересекается со сторонами прямоугольника $y = \pm b$, и б) когда линия раздела пересекается со сторонами прямоугольника $x = \pm a$.



Фиг. 3.

Обозначим через D_0 и D_2 области разгрузки и упругих деформаций, а через D_1 — область нагружения верхней половины поперечного сечения. Соответствующие области нижней половины сечения обозначим через D'_0 , D'_1 , D'_2 .

Второе уравнение (2.1) и формула (2.3) для рассматриваемого распределения областей нагружения и разгрузки после некоторых преобразований примут вид:

$$\beta^2 \int_{\zeta}^1 \lambda \rho^2 d\rho - 2\beta \left(\frac{2}{3} - \int_{\zeta}^1 \lambda \rho^2 d\rho \right) + \int_{\zeta}^1 \lambda \rho d\rho = 0, \quad (3.1)$$

$$B = k_1 B^* = B^* \left(1 - \frac{1}{2} \int_{\zeta}^1 \lambda d\rho - \frac{3\beta}{4} \int_{\zeta}^1 \lambda \rho d\rho + \frac{\beta^2}{4} \int_{\zeta}^1 \lambda \rho^2 d\rho \right), \quad (3.2)$$

где введены обозначения:

$$\lambda = 1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma_1}{d\epsilon_1}, \quad \zeta = \frac{\eta}{h}, \quad \beta = \frac{h}{a} \alpha, \quad \rho = \frac{y}{h},$$

а $B^* = \frac{4}{3} E a^3 h$ — упругая жесткость на изгиб.

Соотношения (3.1) и (3.2) вместе со вторым уравнением (1.4), которое в принятых обозначениях для рассматриваемой задачи будет иметь вид:

$$M = M_s \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{3}{\zeta} \int_{\zeta}^1 \omega \rho^2 d\rho \right), \quad (3.3)$$

определяют искомую величину B для прямоугольного поперечного сечения. Здесь $M_s = \frac{4}{3} E e_s a h^2$ — предельный изгибающий момент, при котором в плоско-изогнутом стержне начинают появляться пластические деформации.

Нам остается определить функцию φ или F , чтобы установить значение жесткости на кручение C при потере устойчивости плоской формы изгиба за пределами упругости для нахождения критической длины или критического момента.

Точное определение функции F (или φ) для прямоугольной области, удовлетворяющей (2.12) в областях D_0 , D'_0 , D_2 , D'_2 , (2.11) в областях D_1 , D'_1 , краевому условию (2.17) и условиям (2.15), (2.16) на линиях раздела областей нагружения и областей разгрузки и упругих деформаций для произвольного отношения сторон прямоугольного сечения и произвольного закона упрочнения, представляет большие математические затруднения.

Для приближенного определения функции F с успехом могут быть применены методы численного интегрирования, — как метод сеток, так и метод прямых, так как вся граница составлена из прямолинейных отрезков.

С целью нахождения общего выражения для жесткости накручение при произвольном законе упрочнения, мы несколько упростим постановку задачи определения функции F , предполагая, что поперечное сечение стержня достаточно узко, так что, можно не считаться с условиями на участках границы $y = \pm h$ ($-a \leq x \leq a$) и пренебречь величинами, имеющими порядок $\frac{a}{h}$ по сравнению с единицей.

Таким образом, требуется построить непрерывную функцию в прямоугольнике $[-a \leq x \leq a; -h \leq y \leq h]$, удовлетворяющую уравнению Пуассона

$$\Delta F = -2G \quad (3.4)$$

в областях D_0, D'_0, D_2, D'_2 ,

$$\text{уравнению} \quad \Delta F + \frac{1}{1-\omega} \frac{d\omega}{dy} \frac{\partial F}{\partial y} = -2G(1-\omega) \quad (3.5)$$

в областях D_1, D'_1 ,

$$\text{краевому условию} \quad F = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a \quad (3.6)$$

$$\text{и условию} \quad \frac{1}{1-\omega} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_2 \quad (3.7)$$

Здесь под $\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_1$ подразумевается значение нормальной к линии раздела производной F в областях D_1 и D'_1 , а под $\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_2$ — значение этой же производной в областях D_2 и D'_2 .

Из самой постановки задачи непосредственно следует, что функция F должна удовлетворять условию

$$F(-x, -y) = F(x, y). \quad (3.8)$$

Поэтому достаточно построить функцию F только для одной половины области поперечного сечения. Условие (3.8) позволяет продолжать функцию F на другую половину области.

Рассмотрим в прямоугольнике $[-a \leq x \leq a, 0 \leq y \leq h]$ функцию, определяемую следующими соотношениями:

$$F = \begin{cases} F_0 = G(a^2 - x^2) & \text{в области } D_0, \\ F_1 = G(1-\omega) \left[a^2 + \omega \frac{(a^2 - x^2 y^2)(x+a)}{2a - \omega(a + \alpha y)} - x^2 \right] & \text{" } D_1, \\ F_2 = G \left[a^2 + \omega \frac{(a^2 - x^2 y^2)(x-a)}{2a - \omega(a + \alpha y)} - x^2 \right] & \text{" } D_2. \end{cases} \quad (3.9)$$

Функция F , определяемая соотношениями (3.9), непрерывна в прямоугольнике $[-a \leq x \leq a; 0 \leq y \leq h]$, точно удовлетворяет крайним условиям $F=0$ при $x = \pm a$, условию $\frac{1}{1-\omega} \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ при $x = \pm a$ и уравнению (3.4) в области D_0 .

Предположим, что величина $e_i^2 \frac{d^2 \omega}{de_i^2}$ имеет порядок единицы:

$$e_i^2 \frac{d^2 \omega}{de_i^2} = y^2 \frac{d^2 \omega}{dy^2} = O(1). \quad (3.10)$$

Физический смысл этого предположения состоит в том, что диаграмма $\omega - e_i$ не должна иметь сильно закругленных участков. Условие (3.10) имеет место, например, при законе линейного упрочнения.

Присоединим к (3.10) условия

$$1 > \omega > 0, \quad 1 > e_i \frac{d\omega}{de_i} > 0, \quad 1 - \omega = O(1), \quad \alpha = O\left(\frac{a}{h}\right). \quad (3.11)$$

Первые два условия являются непосредственными следствиями основных неравенств теории пластичности. Условие $1 - \omega = O(1)$ имеет место не только при неразвитых пластических деформациях, когда обычно пренебрегают величинами порядка ω , но и для достаточно широкого класса задач теории пластичности. Последнее условие (3.11) вытекает непосредственно из малости отношения $\left(\frac{a}{h}\right)$.

Непрерывная функция $F(x, y)$, определяемая соотношениями (3.8) и (3.9), при условиях (3.10) и (3.11) представляет приближенное решение поставленной задачи для узкого прямоугольника, так как все условия задачи (3.4), (3.5), (3.6) и (3.7) удовлетворяются или точно, или приближенно в том смысле, что, если при постановке функция F , например, в левую часть уравнения (3.4), пренебречь величинами, имеющими порядок $\frac{a^2}{h^2}$ по сравнению с величинами порядка величин правой части, это уравнение обратится в тождество.

Внося (3.9) в (2.19) и принимая во внимание (3.8), получаем:

$$C = k_2 C^* = C^* \left[1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \omega \rho d\rho - \frac{3\beta}{4} \int_0^1 \omega \rho^2 d\rho + \frac{\beta^2}{4} \int_0^1 \omega \rho^3 d\rho + \right. \\ \left. + \frac{3\beta}{2} \int_0^1 \frac{\omega(1-\beta^2 \rho^2)}{2-\omega(1+\beta \rho)} \rho d\rho - \frac{3}{8} \int_0^1 \frac{\omega^2(1-\beta^2 \rho^2)(1+\beta \rho)^2}{2-\omega(1+\beta \rho)} d\rho \right]. \quad (3.12)$$

Здесь $C^* = \frac{16}{3} G a^3 h$ — упругая жесткость на кручение стержня узкого прямоугольного поперечного сечения.

Для случая, когда линия раздела пересекается со сторонами прямоугольника, параллельными оси y , будем иметь следующие формулы, аналогичные формулам (3.1), (3.2), (3.12):

$$\beta^2 \int_{\zeta}^{\frac{1}{\beta}} \lambda \rho d\rho - 2\beta \left[\int_{\zeta}^{\frac{1}{\beta}} (2-\lambda) \rho^2 d\rho + 2 \int_{\frac{1}{\beta}}^1 \lambda \rho^2 d\rho + \frac{2}{3} \left(\zeta^3 + \frac{1}{\beta^3} - 1 \right) \right] + \int_{\zeta}^1 \lambda \rho d\rho = 0, \quad (3.13)$$

$$B = k_1 B^* = B^* \left[\frac{\beta^3}{4} \int_{\zeta}^{\frac{1}{\beta}} \lambda \rho^3 d\rho + \frac{\beta}{4} \int_{\zeta}^{\frac{1}{\beta}} (2-\lambda) \rho d\rho + \frac{1}{2} \int_{\zeta}^{\frac{1}{\beta}} (2-\lambda) d\rho - \int_{\frac{1}{\beta}}^1 \lambda d\rho + \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) + \zeta \right], \quad (3.14)$$

$$C = k_1 C^* = C^* \left[1 - \int_{\zeta}^1 \omega d\rho + \frac{1}{2} \int_{\zeta}^{\frac{1}{\beta}} \omega d\rho - \frac{3\beta}{4} \int_{\zeta}^{\frac{1}{\beta}} \omega \rho d\rho + \frac{\beta^3}{4} \int_{\zeta}^{\frac{1}{\beta}} \omega \rho^3 d\rho + \frac{3\beta}{2} \int_{\zeta}^{\frac{1}{\beta}} \frac{\omega(1-\beta^2 \rho^2) \rho d\rho}{2-\omega(1+\beta \rho)} - \frac{3}{8} \int_{\zeta}^{\frac{1}{\beta}} \frac{\omega^2(1-\beta^2 \rho^2)(1+\beta \rho)^2 d\rho}{2-\omega(1+\beta \rho)} \right]. \quad (3.15)$$

Заметим, что основные соотношения (4.2) работы [2] и (3.3) работы [3] получаются как частные случаи из соотношений (3.1), (3.2), (3.13) и (3.14).

Используя решение рассматриваемой задачи в пределах упругости, имеем:

$$l_{кр} = \frac{\pi}{M} \sqrt{BC}. \quad (3.16)$$

Здесь $l_{кр}$ — критическая длина стержня.

Используя в (3.16) обозначения (3.2) и (3.12), получаем:

$$l_{кр} = k l_{кр}^*,$$

где $l_{кр}^*$ — критическая длина стержня при законе упругих деформаций, $k = \sqrt{k_1 k_2}$.

Таким образом, задача определения критической длины свелась к отысканию одного коэффициента k , зависящего от внешнего момента и закона упрочнения материала.

Коэффициенты k_1 и k_2 , через которые выражается коэффициент k , в случае а) определяются формулами (3.2) и (3.4), а параметры ξ и β , входящие в эти формулы, при заданном внешнем моменте M определяются формулами (3.1) и (3.3).

Проведем вычисление для мягкой стали, характеристики которой приведены в таблице 1 [5]. На диаграмме этой стали имеется резко выраженная площадка текучести.

Таблица 1

Характеристика стали

$$E = 2,17 \cdot 10^6, \quad \sigma_b = 6800, \quad \sigma_s = 3250, \quad \sigma_p = 2600 \text{ (кг/см}^2\text{)}$$

σ_1 кг/см ²	$\epsilon_1 \cdot 10^3$	$\frac{dz_1}{de_1} \cdot 10^{-6}$	$\lambda = 1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma_1}{de_1}$	ω
2600	1,20	2,17	0,000	0,000
2800	1,31	1,98	0,088	0,014
3000	1,43	1,54	0,291	0,034
3100	1,51	1,12	0,484	0,054
3240	1,92	0,06	0,973	0,212
3250	2,1—27	0,00	1,000	0,285—0,445
3260	2,90	0,042	0,982	0,482
3300	3,30	0,117	0,946	0,540
3500	4,70	0,140	0,936	0,657
4000	8,80	0,115	0,947	0,790

При вычислениях удобнее считать заданными значения ξ . Полагая в формулах (3.3), (3.1), (3.2) и (3.12)

$$\xi = 1; 0,9; 0,8; \dots 0,2$$

и используя таблицу 1, получаем соответствующие значения величин $\bar{M}$, β , k_1 , k_2 , k , которые приведены в таблице 2. Вычисление интегралов осуществлялось приближенно по правилу Симпсона. В процессе приближенного интегрирования промежуточные значения λ и ω были определены с помощью линейной интерполяции.

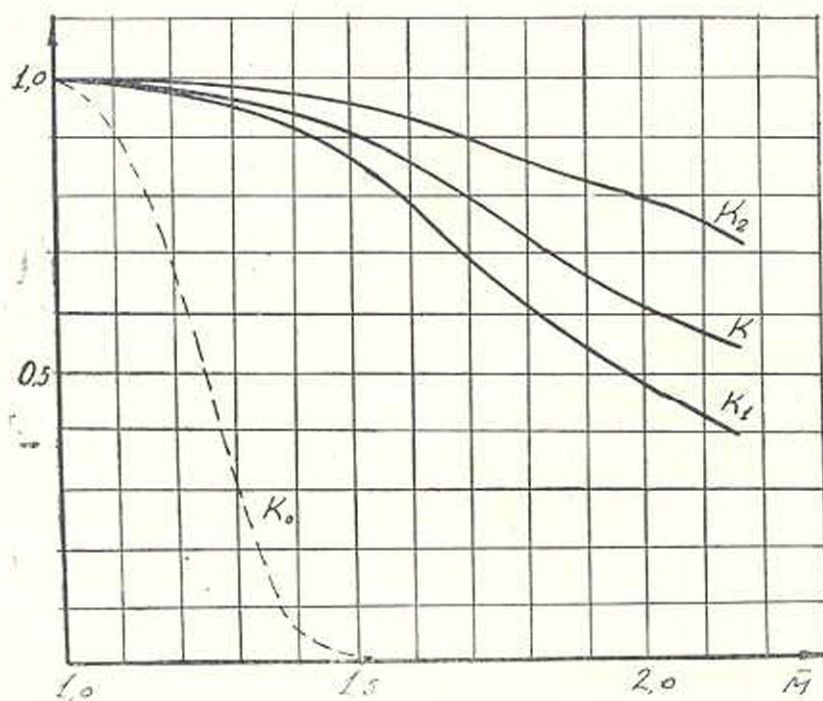
Графики коэффициентов k_1 , k_2 и k как функции внешнего безразмерного момента $\bar{M}$ показаны на фиг. 4.

Пунктирная кривая относится к касательному модулю k_0 , вычисленному по максимальной пластической деформации, как функция от внешнего безразмерного момента $\bar{M}$. Заметим, что модуль Кармана мало отличается от k_0 .

Сравнивая кривые k и k_0 , замечаем, что применение модуля k_0 (или модуля Кармана) к расчету на устойчивость плоской формы изгиба за пределами упругости, как предлагают некоторые авторы, дает резко пониженное значение для критической длины.

Таблица 2

τ	$\bar{M}$	β	k_1	k_2	k
1,0	1,000	0,000	1,000	1,000	1,000
0,9	1,108	0,011	0,987	0,999	0,987
0,8	1,231	0,048	0,956	0,996	0,975
0,7	1,384	0,118	0,914	0,987	0,950
0,6	1,515	0,231	0,845	0,975	0,907
0,4	1,740	0,413	0,644	0,885	0,755
0,3	1,963	0,666	0,526	0,811	0,653
0,2	2,137	0,854	0,391	0,714	0,528



Фиг. 4

§ 4. Устойчивость тонкостенного двутавра. Рассмотрим тонкостенный стержень двутаврового поперечного сечения, изгибаемый в плоскости стенки парами, приложенными на концах. Предположим, что концы двутавра закреплены так, как и в задаче, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Для докритического состояния двутавра будем иметь:

$$e_{zz} = -z_0 y, \quad e_1 = |e_{zz}| = z_0 |y|.$$

Соотношение, решающее задачу чистого изгиба двутаврового стержня, если напряженное состояние в полках принято однородным, будет иметь вид:

$$M = \frac{M_s}{\zeta} \left(1 - \frac{6\omega_0 q}{r+6q} - \frac{3r^3}{r+6q} \int_{\zeta}^1 \omega \rho^2 d\rho \right). \quad (4.1)$$

$$\text{Здесь } q = \frac{a}{h}, \quad r = \frac{t_2}{t_1},$$

$$\zeta = \frac{\eta}{h}, \quad \rho = \frac{y}{h}, \quad \omega_0 - \text{значение}$$

$$\text{функции } \omega \text{ в полках, } M_s = 2Ee_s h \left(2t_1 a + \frac{1}{3} t_2 h \right) -$$

предельный изгибающий момент, при котором начинаются пластические деформации. Размеры поперечного сечения и пластической области указаны на фиг. 5.

Для варьированного состояния стержня имеем:

$$\delta e_{zz} = \alpha' x - \alpha y, \quad \delta e_1 = \delta |e_{zz}|,$$

и $x = \alpha y$ — для линии раздела областей нагружения и разгрузки.

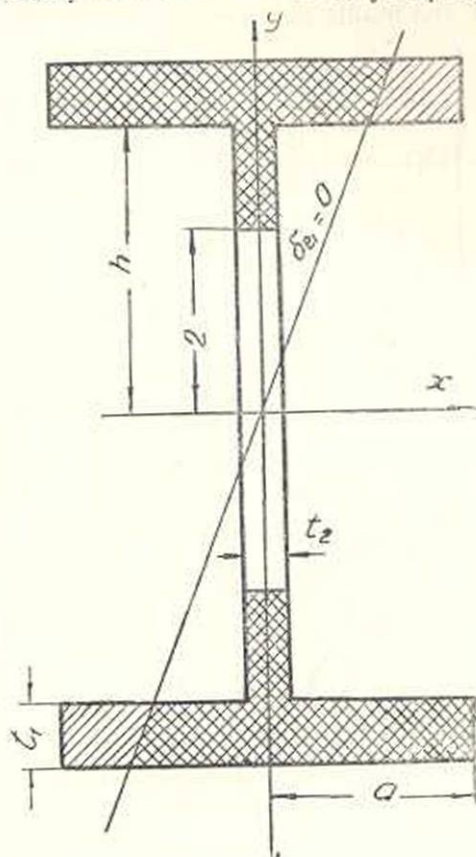
На основании формул (2.1) и (2.3), пренебрегая величинами порядка $\frac{t_2^2}{h^2}$, малыми относительно единицы, после некоторых преобразований находим:

$$\alpha^2 - \frac{2\alpha}{\lambda_0} \left(2q - \lambda_0 q - \frac{1}{3} r \zeta^3 + r \int_{\zeta}^1 \frac{1}{E} \frac{d\sigma_1}{d\epsilon_1} \rho^2 d\rho \right) + q^2 = 0, \quad (4.2)$$

$$B = k_1 B^* = B^* \left(1 - \frac{1}{2} \lambda_0 - \frac{3\lambda_0}{4q} + \frac{\alpha^3 \lambda_0}{4q^2} \right). \quad (4.3)$$

Здесь λ_0 — значение λ в полках, $B^* = \frac{4}{3} E \alpha' t_1$ — боковая упругая жесткость двутавра.

Для приближенного определения жесткости на кручение разобьем область поперечного сечения на прямоугольные области и построим функцию напряжения F для каждой узкой прямоугольной



Фиг. 5.

области отдельно. Таким образом, построенная функция F для верхней половины сечения будет иметь вид:

$$F = \begin{cases} G(1-\omega)(h-y)(y-h-t_1) & \text{при } -a < x < zh, h < y < h+t_1; \\ G(h-y)(y-h-t_1) & \text{„ } zh < x < a, h < y < h+t_1; \\ G(1-\omega) \left(\frac{t_2^2}{4} - x^2 \right) & \text{„ } -\frac{t_2}{2} < x < \frac{t_2}{2}, \eta < y < h; \\ G \left(\frac{t_2^2}{4} - x^2 \right) & \text{„ } -\frac{t_2}{2} < x < \frac{t_2}{2}, 0 < y < \eta. \end{cases} \quad (4.4)$$

Условие $F(x, y) = F(-x, -y)$, вытекающее из симметрического расположения областей нагружения, позволяет продолжать функцию F на нижнюю половину сечения $y < 0$.

Внося выражение функции F из (4.4) в формулу (2.19) и переходя к безразмерным величинам, получаем:

$$C = k_1 C^* = C^* \left(1 - \frac{\omega_0(q+z)}{2q+r^2} - \frac{r^2}{2q+r^2} \int_0^1 \omega d\rho \right). \quad (4.5)$$

$$\text{Здесь } C^* = \frac{2}{3} G(2t_1^3 a +$$

$+ t_2^3 h)$ — упругая жесткость на кручение стержня двутаврового сечения.

Используя решение соответствующей задачи в пределах упругости, имеем:

$$l_{кр} = \frac{\pi}{M} \sqrt{BC} = k l_{кр}^*. \quad (4.6)$$

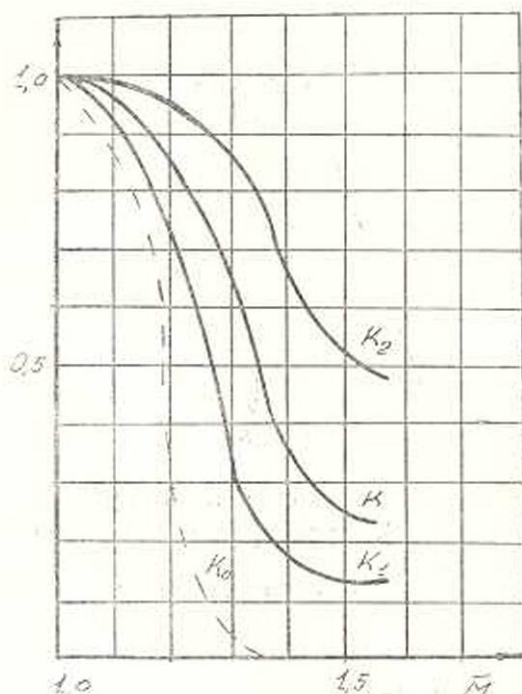
Формула (4.6) определяет критическую длину через соответствующую упругую величину,

умноженную на коэффициент $k = \sqrt{k_1 k_2}$.

Величины k_1 и k_2 определяются формулами (4.3), (4.5), а параметры ζ и z — из уравнений (4.1), (4.2) при заданном внешнем моменте и законе упрочнения материала. При вычислениях удобнее в формуле (4.1) считать заданным значения параметра ζ .

В таблице 3 приведены значения ζ , $\bar{M} = \frac{M}{M_s}$, z , k_1 , k_2 и k для

мягкой стали в случае $q = \frac{1}{4}$, $r = \frac{1}{2}$.



Фиг. 6.

Графики величин k_1 , k_2 и k , как функции от внешнего безразмерного момента $\bar{M}$, показаны на фиг. 6.

Таблица 3

ζ	$\bar{M}$	α	k_1	k_2	k
1	1,000	0,00	1,000	1,000	1,000
0,9	1,089	0,012	0,928	0,991	0,960
0,8	1,194	0,061	0,735	0,978	0,845
0,7	1,285	0,101	0,489	0,925	0,641
0,6	1,342	0,128	0,211	0,840	0,422
0,5	1,361	0,139	0,144	0,776	0,346
0,4	1,333	0,138	0,151	0,675	0,335
0,3	1,436	0,148	0,142	0,561	0,278
0,2	1,574	0,160	0,132	0,463	0,248

Пунктирная кривая дает график касательного модуля k_0 . Сравнивая графики величин k и k_0 , приходим к тому же выводу, что и в предыдущем параграфе.

Армянский сельскохозяйственный
институт

Поступило 13 IV 1953

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. Гостехиздат, 1946.
2. Качанов Л. М. ПММ, 1951, т. XV, вып. 2.
3. Качанов Л. М. Там же, вып. 5.
4. Качанов Л. М. Там же, вып. 6.
5. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.

Կ. Ս. ՉՈՐԱՆԿՅԱՆ

ՀԱՐԹ ԶԵՎԻ ԶՈՒՏ ԾՈՒՄԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ
ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻՑ ԴՈՒՐՄ՝ ԱՄՐԱՊՆԴՄԱՆ ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ՕՐԵՆՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատության մեջ քննարկվում է հարթ ձևի զուտ ծաման կայունությունը առաձգականության սահմաններից դուրս՝ ամբողջական կամայական օրենքի դեպքում: Որպես մասնավոր դեպքեր, լուծված են ուղղանկյուն և երկտավր լայնական հատվածք ունեցող ձողերի հարթ ձևի զուտ ծաման կայունության խնդիրներ: Կրկաթե կապի հերկարության որո-

շումը բերվում է համապատասխան խնդրի լուծմանը առաձգականությամբ սահմաններում և Կ գործակցի որոնմանը: Կ գործակցի գրաֆիկի և շոշափման մոդուլի կամ կարմանի մոդուլի գրաֆիկի համեմատությամբ ևրևվում է, որ այդ մոդուլների կիրառումը առաձգականությամբ սահմաններից դուրս հարթ ձևի վրա ծոման կայունությամբ հաշվարկներում՝ խիստ նվազեցնում է կրիտիկական երկարությամբ արժեքը: