

С. С. ДАРБИНЯН, М. В. ОГАНЕСЯН

КОЛЕБАНИЯ СООРУЖЕНИЯ С УЧЕТОМ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ И ПОДАТЛИВОСТИ ОСНОВАНИЯ

На практике при расчете сооружений на действие сейсмических сил (спектральный метод сейсмостойкости) динамическую нагрузку чаще всего определяют без учета податливости неоднородного основания и предполагают чисто упругую работу конструкции, а сечения определяют по предельным состояниям [2]. Такой подход для определения сейсмических сил в сооружениях приводит к завышенным их значениям, которые становятся причиной неоправданных затрат на специальные антисейсмические мероприятия. В связи с этим возникает необходимость учета таких факторов, которые могут выявить действительные запасы прочности сооружения. Ими могут оказаться: податливость основания сооружения, упруго-пластические свойства конструкции и влияние отдельных локальных разрушений. С этой целью в плоскости (x_1, x_3) рассмотрим колебания сооружения в виде вертикального бруса с сосредоточенной массой на верхнем конце и нижним концом, защемленным в фундаментной плите, которая в условиях полного прилипания лежит на поверхности линейно-деформируемого многослойного основания, находящегося под заданным воздействием по закону $U_1^2(x_1, 0, t) = U_1^2(t)$. В такой постановке система совершает горизонтальные поступательные перемещения по оси x_1 и поворот относительно точки $(0,0)$ (рис. 1). Вычисления $V(t)$, $\varphi(t)$ и $U_1(t)$ как функции от времени полностью определяют сейсмические колебания системы, которые и являются искомыми факторами задачи.

В условиях сейсмического воздействия в слоистой среде наряду с источником сейсмических волн сооружения при взаимодействии с основанием становятся новым источником волн. Сумма двух волновых полей записывается в следующем виде [4] $U_1^{(0)} = \sum_{i=2}^3 U_1^{(i)}(t)$, где $U_1^{(i)}(t)$ — компоненты относительного перемещения между сооружением и основанием на контактной поверхности $x_3=0$, $|x_1| < d$.

Дифференциальное уравнение движения сооружения согласно гипотезе Фойгта запишется в следующем виде:

$$\ddot{V}(t) + 2\varepsilon\dot{V}(t) + \omega^2 V(t) + Z\ddot{\varphi}(t) + \ddot{U}_1^{(0)}(t) = -\ddot{U}_1^{(0)}(t), \quad (1)$$

где $\omega^2 = 1/m \delta_{11}$, δ_{11} — перемещения сосредоточенной массы бруса, защемленного в основании под воздействием единичной силы, приложенной в точке ее защемления, $\varepsilon = \eta/2m$, η — коэффициент затухания.

Уравнение содержит три неизвестных $V(t)$, $\varphi(t)$, $U_1^{(0)}(t)$. Для замыкания уравнения (1) необходимо использовать контактные условия на границе $x_3=0$ и составить уравнения равновесия сил по x_1 и моментов сил относительно точки $(0,0)$.

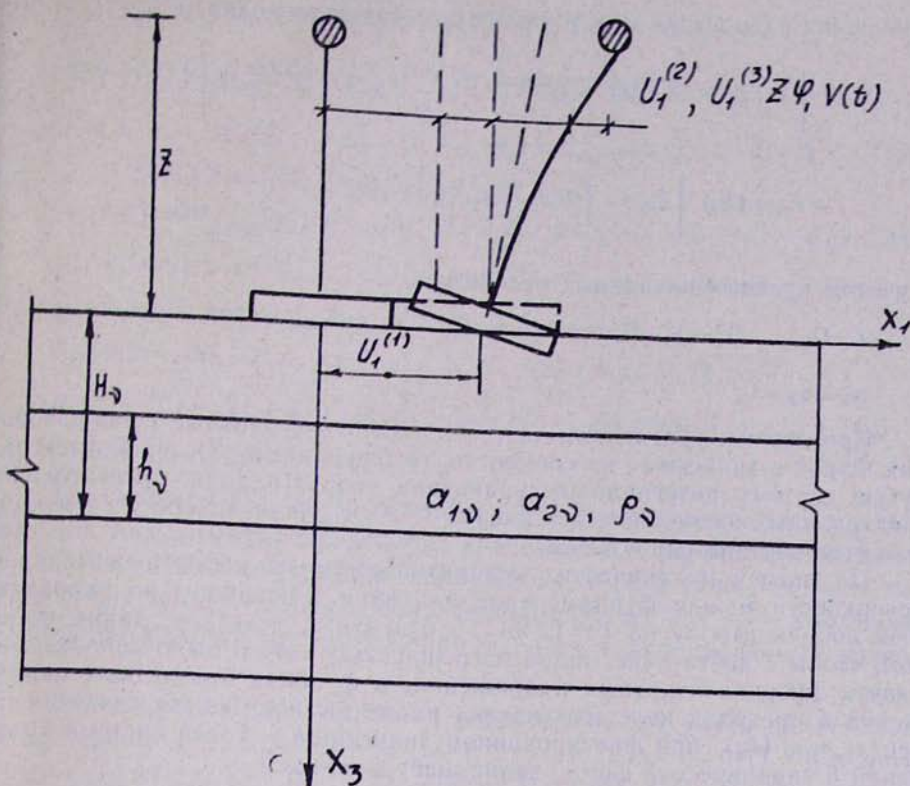


Рис. 1. Расчетная схема

На поверхности $x_3=0$ принимается, что заданы следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} U_1^{(2)}(x_1, 0, t) + U_1^{(3)}(x_1, 0, t) &= U_1^{(1)}(t) & |x_1| < d \\ \sigma_{31}(x_1, 0, t) &= 0 & |x_1| > d, \end{aligned} \quad (i = 1, 3) \quad (2)$$

Из принципа суперпозиции (по методу функции Грина) с учетом граничных условий задачи получим:

$$\begin{aligned} U_1(k_4) - U_1^{(2)}(k_4) &= \int_{-d}^d \sigma_{31}(\xi_1, 0, k_4) U_1^*(x_1 - \xi_1, 0, k_4) d\xi_1, \\ x_1 \varphi(k_4) &= \int_{-d}^d \sigma_{33}(\xi_1, 0, k_4) U_3(x_1 - \xi_1, 0, k_4) d\xi_1 \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения равновесия сил по координате x_1

$$\begin{aligned} -m \left[\ddot{V}(t) + Z \ddot{\varphi}(t) + \ddot{U}_1^{(1)}(t) + \frac{\eta}{m} \dot{V}(t) \right] - M \left[Z \Phi \ddot{\varphi}(t) + \ddot{U}_1^{(1)}(t) \right] = \\ = \int_{-d}^d \sigma_{31}(x_1, 0, t) dx_1, \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения равновесия моментов сил относительно точки (0,0)

$$-m \left[\ddot{V}(t) + Z \ddot{\varphi}(t) + \ddot{U}_1^{(1)}(t) + \frac{\tau_1}{m} \dot{V}(t) \right] Z - M \left[\ddot{U}_1^{(2)}(t) + \right. \\ \left. + Z \ddot{\varphi}(k_4) \right] Z_{\Phi} = \int_{-d}^d x_1 z_{33}(x_1, 0, t) dx_1 \quad (5)$$

с учетом нулевых начальных условий

$$t=0, \quad V=\dot{V}=0, \quad \varphi=\dot{\varphi}=0, \quad U_1^{(i)}=U_1^{(i)}, \quad i=1, 2, 3 \\ z_{3i}=\dot{z}_{3i}=0, \quad i=1, 3$$

Применяя к уравнениям (1), (4) и (5) интегральные преобразования Фурье и записывая их совместно с уравнениями (3), получим замкнутую систему интегральных уравнений первого рода относительно спектральных значений перемещений $U_1^{(i)}$, V , угла поворота φ и компонентов вектора напряжений.

По методу механических квадратур разобьем область контактной поверхности между фундаментной плитой и основанием по направлению координаты x_1 на $l=1, 2, \dots, L$ отдельных участков таким образом, чтобы с достаточно малой погрешностью можно было аппроксимировать эпюру контактных напряжений, а функция контактных напряжений в пределах каждого участка имела бы постоянные значения по оси x_1 , $z_{3i}(t)(k_4)$ при фиксированном значении k_4 . Тогда система уравнений в канонической форме записывается в виде:

$$\sum_{r=1}^{2L+3} \Delta_{pr}(k_4) Z_r(k_4) = B_p(k_4), \quad (6) \\ (p = 1, 2, \dots, 2L+3),$$

где внесены следующие обозначения:

$$\delta_{p,i}^{(i)}(k_4) = \int_{x_{1,i-1}}^{x_1} U_i^*(x_{1,t} - \xi_1, 0, k_4) d\xi_1 \\ Z_1(k_4) = V(k_4); \quad Z_2(k_4) = \varphi(k_4); \quad Z_3(k_4) = U_1^{(1)}(k_4) \\ Z_r(k_4) = z_{31(r-3)}(k_4); \quad r = 4, 5, \dots, L+3 \\ Z_r(k_4) = z_{33(r-L-3)}(k_4); \quad r = L+4, L+5, \dots, 2L+3 \\ B_p(k_4) = 0; \quad p = 1, 2, 3; \quad B_p(k_4) = U_1^{(2)}(k_4); \quad p = 4, 5, \dots, L+3 \\ B_p(k_4) = 0; \quad p = L+4, \dots, 2L+3; \quad \Delta_{11}(k_4) = k_1^2 + 2\epsilon k_4 + \omega^2 \\ \Delta_{12}(k_4) = k_1^2 Z; \quad \Delta_{13} = K_1^2; \quad \Delta_{1r}(k_4) = 0; \quad r = 4, \dots, 2L+3 \\ \Delta_{21}(k_4) = m k_1^2 + \tau_1 k_4; \quad \Delta_{22} = k_1^2 (m z + M Z_{\Phi}) \\ \Delta_{2r}(k_4) = k_1^2 (m + M); \quad \Delta_{2,r}(k_4) = z_{31(r-3)}(k_4); \quad r = 4, 5, \dots, L+3 \\ \Delta_{2,r}(k_4) = 0; \quad r = L+4, \dots, 2L+3; \quad \Delta_{31}(k_4) = z m k_1^2 (1 + \tau_1 / m k_4) \quad (7)$$

$$\Delta_{32}(k_4) = k_4^2 (mz^2 + Mz^2_{\phi}); \Delta_{33}(k_4) = k_4^2 (mz + Mz_{\phi})$$

$$\Delta_{3r}(k_4) = 0; r = 4, 5, \dots, L+3; \Delta_{3r}(k_4) = \frac{1}{2}(x^2_{1,r-L-4} - x^2_{1,r-L-3});$$

$$r = L+4, L+5, \dots, 2L+3; \Delta_{pr}(k_4) = 0; p = 4, 5, \dots, L+3; r = 1, 2$$

$$\Delta_{pr}(k_4) = -1; p = 4, 5, \dots, L+3; r = 3$$

$$\Delta_{pr}(k_4) = \delta_{p-3,r-3}^{(1)}(k_4); p = 4, 5, \dots, L+3; r = 4, \dots, L+3; (x_{1,0} = -d, x_{1,L} = d)$$

$$\Delta_{pr}(k_4) = 0; p = 4, 5, \dots, L+3; r = L+4, L+5, \dots, 2L+3$$

$$\Delta_{pr}(k_4) = 0; p = L+4, L+5, \dots, 2L+3; r = 1, 3$$

$$\Delta_{pr}(k_4) = -x_{1,p-L-4}; p = L+4, \dots, 2L+3; r = 2; \Delta_p(k_4) = 0;$$

$$p = L+4, \dots, 2L+3; r = 4, 5, \dots, L+3; \Delta_{rr}(k_4) = \delta_{p-L-3, r-L-3}(k_4)$$

$$p = L+4, \dots, 2L+3; r = L+4, \dots, 2L+3.$$

Из решения (6), состоящего из $(2L+3)$ алгебраических уравнений, для каждого фиксированного значения k_4 определяются спектральные значения деформаций сооружения $V(k_4)$, угол поворота системы $\varphi(k_4)$, общего перемещения фундамента по оси x_1 и компоненты вектора контактных напряжений $\sigma_{3i,l}(k_4)$ в фиксированных точках $x_{1,j}$.

Далее рассмотрим колебания сооружения без учета податливости основания, т. е. при $a_{ik} \rightarrow \infty$ ($i=1, 2; k=1, 2, \dots, n+1$). Следовательно, $U_{3i} \rightarrow 0; \sigma_{3i}(x_1, 0, t) \rightarrow 0; U_{i\alpha}^{(3)} \rightarrow 0; (\alpha=1, 3), \varphi(t) \rightarrow 0$. При этом левые и правые части уравнений (3), (4) и (5) стремятся к нулю, то есть уравнения превращаются в тождества и теряют свой физический смысл. А уравнение (1) принимает вид

$$\ddot{V}(t) + 2\epsilon \dot{V}(t) + \omega^2 V(t) = -\ddot{U}_1^{(3)}(t) \quad (8)$$

и является обычным уравнением движения сооружения в виде системы с одной степенью свободы, без учета податливости основания.

При упругом расчете такой системы из решения (8) [1] находят максимальные значения сейсмической силы $S_{\text{упр}}^{\text{max}}$ и перемещения $V_{\text{упр}}^{\text{max}}$, которые и принимаются в основу расчета. Однако предположим, что начиная с какого-то значения $V_1 = \eta V_{\text{упр}}^{\text{max}}$, $\eta > 1$ в рассматриваемой системе начинают проявляться пластические деформации (рис. 2), поэтому связь между силой и перемещением после этого момента подчиняется другому закону. С этой целью рассмотрим решения задачи методом непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений движения для разных стадий упруго-пластического нагружения и разгружения.

Связь между восстанавливающей силой и перемещением (рис. 2) для всех зон нагружения и разгружения представляется следующим образом [1, 2].

$$R(t) = k[(1 - \beta_i \lambda_k) V(t) + \beta_i \lambda V_i - (1 - \beta_i) \bar{V}_i - \beta_i \bar{V}_{i-1}], \quad (9)$$

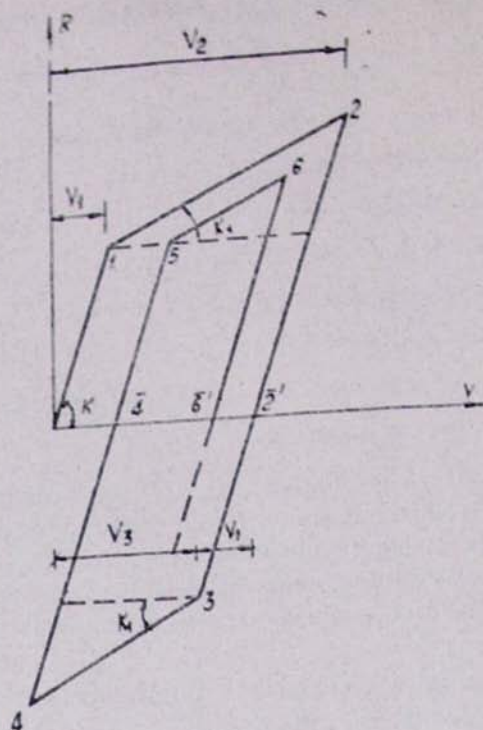


Рис. 2. Диаграмма сила—перемещение

где β_i — постоянный параметр, принимающий значения 0 или 1 в зависимости от того, в какой стадии находятся колебательные процессы.

$$\beta_i = 0, \quad \beta_{i-1} = 1; \quad \lambda = 1 - \varphi = 1 - \frac{k_1}{k}.$$

Здесь V_i представляет собой величину деформаций в нечетных точках диаграммы (рис. 2) и определяется выражением:

$$V_i = (-1)^{\frac{i-1}{2}} \bar{V}_1 + \bar{V}_{i-1}, \quad i = 1, 3, 5, \dots$$

Значение остаточной деформации после $i/2$ полуцикла колебания имеет вид:

$$\bar{V}_i = \lambda \sum_{p=1}^{i/2} [V_{2p} - V_{2p-1}], \quad i = 2, 4, 6, \dots$$

С учетом вышеизложенных обозначений уравнения движения системы можно записать в следующей обобщенной форме:

$$m\ddot{V}(t) + R(t) + \gamma \dot{V}(t) = -m\dot{U}_0^{(2)}(t). \quad (10)$$

Это уравнение является кусочно-линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, интегрирование которого осуществляется с использованием условий неразрывности смещений и скоростей в точках перехода от одной зоны к другой.

Для вычисления на ЭВМ решения (10) для всех зон загрузки и разгрузки представим одной общей формулой:

$$V(t) = e^{-\varepsilon\omega_{1k}(t-t_k)} \left[V_k \cos\omega_{1k}(t-t_k) + \frac{1}{\omega_{1k}} (\dot{V}_k + \varepsilon\omega_{1k} V_k) \times \right. \\ \left. \times \sin\omega_{1k}(t-t_k) \right] - \frac{1}{\omega_{1k}^2} \int_0^t \left[\dot{U}_1(\tau) + \omega_{1k}^2 (1-\varphi) \beta_k V_k - \right. \\ \left. - (1-\varphi)(1-\beta_k)(V_k - V_{k-1}) - \bar{V}_k \right] e^{-\varepsilon\omega_{1k}(t-\tau)} \sin\omega_{1k}(t-\tau) d\tau,$$

где $\omega_{1k}^2 = \omega^2 |1 - \beta_k(1 - \varphi)|$.

Для численных расчетов [3] в основу вычисления взята горизонтальная компонента ускорения колебания на свободной поверхности Земли, зарегистрированная 21/XII 1954 г. на станции «Eureka», находящейся в 7 км от эпицентра. Интенсивность землетрясения в пункте регистрации была оценена 8 баллов с максимальным значением ускорения $\ddot{j}_{\max}^{(2)}(t) = 0,225 g$ (рис. 3).

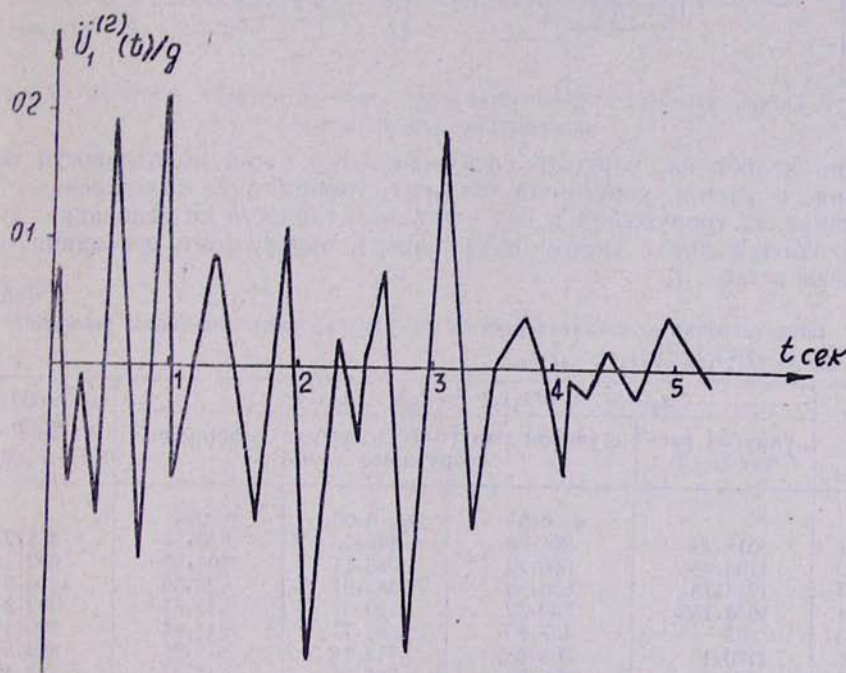


Рис. 3. Акселерограмма горизонтальной компоненты ускорения колебания грунта землетрясения от 21 XII 1954 г., зарегистрированная на станции «Eureka»

Характер изменения перемещений во времени $V(t)$ с учетом упруго-пластических деформаций сооружения при $a_{p\nu}$ ($p = 1, 2; \nu = 1, 2, \dots, n$) приведен на рис. 4.

Сопоставления результатов расчета максимальных значений уско-

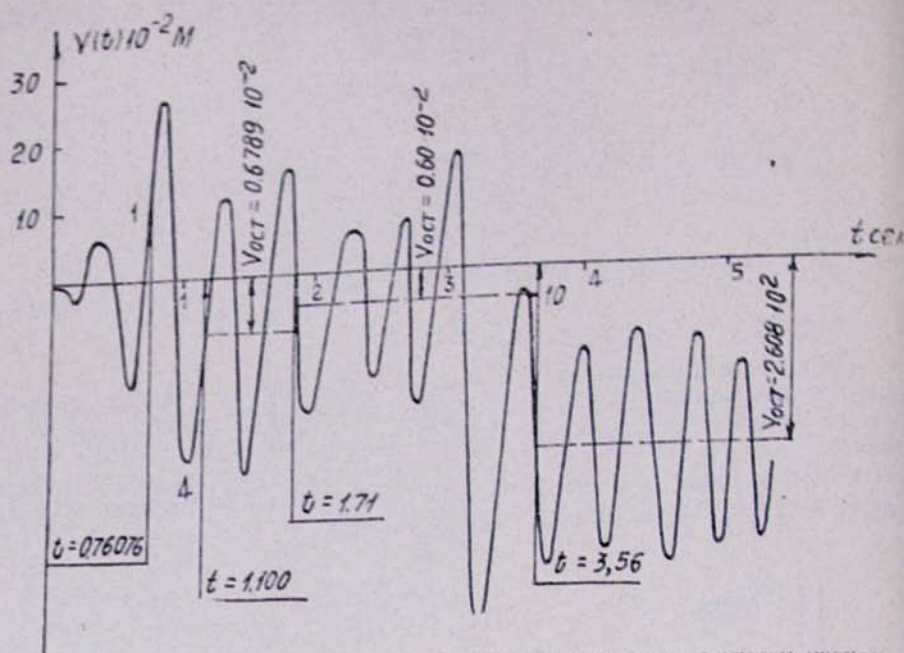


Рис. 4. График изменения перемещения сооружения во времени с учетом упруго-пластических деформаций

рений колебания: упругого сооружения без учета податливости основания, с учетом упруго-пластических деформаций, возникающих при колебаниях сооружения и без учета податливости ее основания, упругого сооружения с учетом податливости однородного основания, приведены в табл. 1.

Таблица

Сопоставление результатов расчета по максимальным значениям ускорения колебания $[\ddot{U}_1^{(v)}(t) + \ddot{V}(t) + \ddot{\varphi}(t)]_{\max}$

T	$a_{p2} \rightarrow \infty (P=1,2; v=1,2,\dots, n+1)$			$a_{1v} = 600 \text{ м/с}$ $a_{2v} = 350 \text{ м/с}$ $\rho_v = 1,7 \text{ кн.с}^2/\text{м}^4$
	упругий расчет ($\alpha=0$)	с учетом упруго-пластических деформаций сооружения $\varphi=0,5$		
		$\varphi=0,01$	$\varphi=0,05$	$\varphi=0,8$
0.1	518,22	264,05	436,55	476,51
0.2	1103,88	555,79	692,11	804,50
0.3	1253,75	630,86	683,91	923,55
0.4	1050,155	532,32	750,39	845,61
0.5	967	487,85	682,77	844,94
0.6	1130,1	568,95	714,15	873,96
0.7	846,8	426,06	536,25	645,27
0.8	325,1	163,56	218,67	266,60
0.9	240	121,43	166,08	209,62
1.0	161	81,61	94,29	127,54
1.2	94	49,99	80,92	85,12
1.4	127	66,79	107,99	122,38
1.6	182	92,46	134,99	160,31
1.8	214	108,11	142,92	176,27
2.0	182	91,89	127,35	151,13
2.5	128	64,88	98,78	144,57
3.0	88,8	44,87	57,21	79,05
3.5	57,3	28,92	40,86	49,89

Результаты расчетов показывают, что учет упруго-пластических деформаций сооружений при сейсмических воздействиях приводит к уменьшению максимальных ускорений в среднем на 38—40%, а учет податливости основания—на 18—22%. При этом с увеличением периода и колебания сооружения влияние податливости основания уменьшается (см. табл. 1).

Ордена Трудового Красного Знамена
Институт геофизики и инженерной
сейсмологии АН Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

- Завриев К. С., Назаров А. Г. и др. Основы теории сейсмостойкости зданий и сооружений. М., Стройиздат, 1970.
- Назаров А. Г. Метод инженерного анализа сейсмических сил. Ереван, Изд. АН АрмССР, 1959.
- Морозов В. А., Кирсанова Н. Н., Сысоев А. Ф. Комплекс алгоритмов быстрого преобразования Фурье дискретных рядов. Численный анализ на ФОРТРАНе. Изд. МГУ, 1976, вып. 15.
- Оганесян М. В., Саргсян А. Е. Взаимодействие фундамента сооружения с неоднородным многослойным основанием при одновременном действии сейсмических и динамических нагрузок. Экспресс-информация. Сейсмостойкое строительство. М., 1983, вып. 9.