ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ: ԱՐՅԱՆ ՇՐՋԱՆԱՌՈՒԹՅՈՒՆ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР, КРОВООБРАЩЕНИЕ

XIV, № 3, 1981

УДК 612.13.001

Б. Г. БЕРШАДСКИЙ

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УЧАСТКА СИСТЕМЫ КРОВООБРАЩЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЮЩАЯ ПРИНЦИП ВЫСВОБОЖДЕНИЯ СВЯЗЕЙ

В настоящее время математическое моделирование системы кровообращения приобрело особое значение как метод анализа и обобщения экспериментальных данных. Сложность этого направления находит свое отражение в разнообразии моделей [3, 7] и определяет целесообразность разработки специальных методов моделирования сердечно-сосудистой системы.

Полная мысленная физическая модель сосудистого русла представляет собой гидравлический проводник, параметры любого сечения которого зависят от расстояния до начала проводника и величины давления. Математическая модель подобной системы вследствие большого количества и сложности связей, а также неполноты морфологической и функциональной информации относится к моделям «серого ящика» [3]. Между тем методы моделирования преимущественно развиты для моделей «белого» и «черного ящика», когда в руках исследователя сосредоточено достаточное количество, соответственно морфологических и функциональных сведений, а моделируемый объект не является чрезмерно сложным. Вследствие того, что сосудистое русло системы кровообращения представляет собой систему высокого уровня сложности, морфологические модели с трудом поддаются идентификации из-за большого числа параметров, а функциональные не допускают их интерпретации из-за произвольности выбора. Кроме того, эти модели описывают только те сосудистые области, свойства которых были учтены при их построении. В то же время сама сложность моделируемого объекта является фактором, способствующим использованию специальных методов построения математических моделей.

В данной работе предлагается основанная на процедуре высвобождения связей низкочастотная динамическая модель произвольного участка системы кровообращения. Условием адекватности модели является возможность описания физиологических закономерностей, не использованных при ее разработке, а также интерпретируемость параметров и возможность их определения в реальном эксперименте.

Морфологические сведения, на основании которых строилась низкочастотная модель, являются общими для различных участков сосудистой системы в диапазоне частот от 0,001 до 1 Гц. Они сводятся к существованию нелинейных резистивно-емкостных характеристик, распределенных по длине гидравлического проводника. Полагая все зависимости аналитическими, а гидравлический проводник однородным, можно описать динамику малых отклонений переменных от их установившихся значений с помощью системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial p(t, l)}{\partial l} = -Rq(t, l)$$

$$\frac{\partial q(t, l)}{\partial l} = -C \frac{\partial p(t, l)}{\partial t},$$

где $p(t, l)$ и $q(t, l)$ — значения изменений давления и скорости кровотока в момент времени t на расстоянии $l \in [0.1]$ от начала проводника, R и C — сопротивление и емкость единицы длины гидравлического проводника в режиме малых отклонений переменных от их стационарных значений.

Модель, предназначенная для описания различных сосудистых областей, должна определять не распределение давления и скорости кровотока внутри каждой из них, а уравнения связей внешних переменных — граничных условий в начале и на конце гидравлического проводника. Физиологические соображения подсказывают целесообразность использования в качестве независимых переменных скорости кровотока на входе $q_0(t)$ и давления на выходе $p_1(t)$, а в качестве зависимых — скорости кровотока на выходе $q_1(t)$ и давления на входе $p_0(t)$ сосудистой области. В этом случае связь внешних переменных осуществляется согласно векторной диаграмме, приведенной на рис. 1А. Независимые переменные (начало стрелок) подвергаются динамическому преобразованию, а затем складываются, образуя зависимые переменные (конец стрелок). Характер динамического преобразования для однородного линейного гидравлического проводника определяется следующим векторным уравнением:

$$\begin{bmatrix} p_0(s) \\ q_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\,\mathrm{th}\sqrt{ST} & 1/\mathrm{ch}\sqrt{ST} \\ 1/\mathrm{ch}\sqrt{ST} & -\mathrm{th}\sqrt{ST}/z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0(s) \\ p_1(s) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $T=RC$ — постоянная времени, $z=R/\sqrt{ST}$ — волновое сопротивление, s — операторный аналог времени t.

Уравнение (1), определяющее четыре связи (рис. 1А) между внешними переменными, учитывает самые общие морфологические свойства различных сосудистых областей и удовлетворительно описывает их функционирование при отсутствии обратной связи. Обратная связь является математическим аналогом механизмов барорефлекторной и миогенной регуляции системной и регионарной гемодинамики соответственно [3, 6, 7]. В частности, зависимость $p_0(q_0)$ модели описывает основные особенности входного импеданса на частотах ниже частоты сокращений сердца [5, 8—10], а зависимость $q_1(q_0)$ может быть использована для оценки емкостных свойств сосудистого русла малого круга кровообращения [2]. Относительно соответствия связей $p_0(p_1)$ и $q_1(p_1)$ модели экспериментальным данным ничего сказать нельзя, так как не удалось найти необходимой информации.

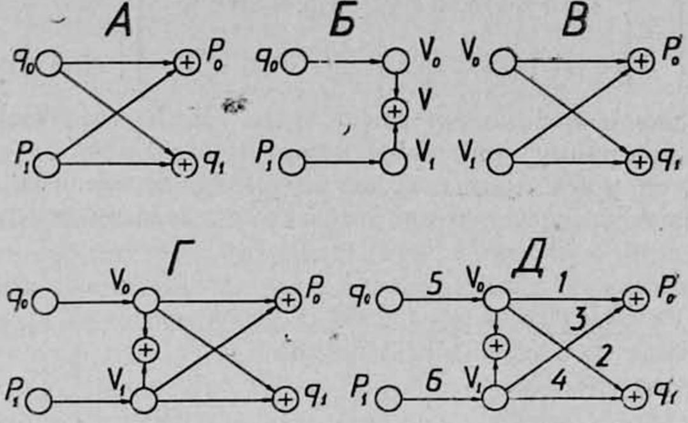

Рис. 1. Векторные диаграммы преобразования независимых переменных во внутренние и зависимые в динамической модели участка системы кровообращения. Независимые переменные—q_0 и p_1 (начало стрелок), внутренняя переменная—v, координаты вектора внутренних переменных—v_0 и v_1, зависимые переменные—p_0 и q_1 (конец стрелок). На А—Д—преобразование переменных на разных стадиях построения модели. Остальные объяснения в тексте.

Для того, чтобы модель описывала гемодинамические переменные при наличии обратной связи, ее необходимо усложнить. Не имея возможности проводить усложнение в области морфологического описания, так как конкретизация неизбежно влечет за собой потерю общности, проведем функциональное усложнение модели с помощью принципа высвобождения связей.

С этой целью необходимо выделить внутренние переменные, которые, опосредуя связь внешних переменных, формируют характер взаимодействия моделируемой системы со средой. При исследовании гидродинамических характеристик сосудистого русла существует единственный претендент на роль внутренней переменной—объем циркулирующей крови $v(s)$, который определяется как интеграл разности скоростей притока и оттока крови или в операторном виде $v(s) = (q_0(s) - q_1(s))/s$. После подстановки выражения для $q_1(s)$ из уравнения (1), объем крови может быть представлен в виде суммы двух слагаемых (рис. 1Б):

$$v(s) = v_0(s) + v_1(s), \tag{2}$$

где $v_0(s) = q_0(s)\,(\mathrm{ch}\sqrt{sT} - 1)/(s\,\mathrm{ch}\sqrt{sT})$ и $v_1(s) = p_1(s)\,\mathrm{th}\sqrt{sT}/(sz)$ могут рассматриваться как координаты вектора внутренних переменных.

Производя в уравнении (1) замену независимых переменных $q_0(s)$ и $p_1(s)$ на внутренние $v_0(s)$ и $v_1(s)$ согласно обозначениям к уравнению (2), можно записать векторное уравнение преобразования внутренних переменных в зависимые в следующем виде (рис. 1В):

$$\begin{bmatrix} p_0(s) \\ q_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sz\,sh\sqrt{sT}/(ch\sqrt{sT}-1) & sz/sh\sqrt{sT} \\ s/(ch\sqrt{sT}-1) & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0(s) \\ v_1(s) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Объединяя векторные диаграммы (рис. 1 Б, В), получаем новую векторную диаграмму (рис. 1 Г), которая отличается от исходной только тем, что в ней выделен вектор внутренних переменных. На этом этапе векторное уравнение связи независимых и зависимых переменных имеет вид:

$$\begin{bmatrix} p_0(s) \\ q_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{sz\,sh\sqrt{sT}}{ch\sqrt{sT}-1} & \dfrac{sz}{sh\sqrt{sT}} \\ \dfrac{s}{ch\sqrt{sT}-1} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{ch\sqrt{sT}-1}{s\,ch\sqrt{sT}} & 0 \\ 0 & \dfrac{th\overline{sT}}{sz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0(s) \\ p_1(s) \end{bmatrix} \tag{4}$$

В силу тождественности всех преобразований уравнение (4) эквивалентно уравнению (1) и описывает линейный однородный гидравлический проводник. Единственное, но крайне важное различие уравнений состоит в том, что передаточная матрица уравнения (1) в уравнении (4) разбита на произведение двух передаточных матриц, одна из которых описывает преобразование независимых переменных во внутренние, а другая—внутренних в зависимые.

Принцип высвобождения связей основан на предположении, что морфологические отличия реального сосудистого русла от модели однородного линейного гидравлического проводника функционально эквивалентны тому, что связи диаграммы, изображенной на рис. 1 Г, опосредуются не одним гидравлическим проводником, а шестью с различными значениями параметров. Проводя индексацию матриц в уравнении (4) согласно рис. 1Д и перемножая передаточные матрицы, получаем основное уровнение модели (5):

$$\begin{bmatrix} p_0(s) \\ q_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{z_1\,sh\sqrt{sT_1}\,(sh\sqrt{sT_5}-1)}{ch\sqrt{sT_5}\,(ch\sqrt{sT_1}-1)} & \dfrac{z_3\,sh\sqrt{sT_6}}{z_6\,sh\sqrt{sT_3}\,ch\sqrt{sT_6}} \\ \dfrac{ch\sqrt{sT_5}-1}{ch\sqrt{sT_5}\,(ch\sqrt{sT_2}-1)} & -\dfrac{th\sqrt{sT_6}}{z_6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_0(s) \\ p_1(s) \end{bmatrix} \tag{5}$$

Предполагается, что модель (5) описывает низкочастотные характеристики сосудистого русла лучше, чем модель (1). При этом уравнение I представляет собой частный случай уравнения 5 при единичной асимметрии связей ($T=T_1=T_2=T_3=T_5=T_6$, $z=z_1=z_3=z_6$). Большему отклонению морфологических характеристик сосудистой области от линейности и однородности соответствует большая асимметрия связей модели (5). Для проверки этого предположения рассмотрим основные черты модели (5).

Прежде всего, из недиагональности передаточной матрицы (различие выражений для связей $p_0(p_1)$ и $q_1(q_0)$) следует, что модель не может быть реализована пассивными R, С-элементами, а должна включать активные элементы [1]. Тем самым учитывается присутствие активных свойств в моделируемом объекте и предполагается возможность их описания с помощью модели. Кроме того, хорошо известно, что входной импеданс сосудистой области есть функция состояния артериальных сосудов, тогда как выходная проводимость определяется венозными сосудами. Это оправдывает различия параметров связей $p_0(q_0)$ и $q_1(p_1)$. Приведенные соображения являются лишь косвенным свидетельством отсутствия грубых ошибок при построении модели. Абсолютное доказательство адекватности модели должно основываться на сопоставлении с экспериментальными данными. Однако в литературе удалось найти количественную информацию только по одной связи модели—$p_0(q_0)$. Временные и частотные характеристики входного импеданса находятся в хорошем согласии с результатами экспериментальных исследований динамической миогенной ауторегуляции на органном уровне (отношение T_1/T_5 зависит от миогенного тонуса) [4—6, 10]. Кроме того, имеются данные [7], указывающие на возможность использования модели для описания барорефлекторной регуляции сосудистого тонуса на системном уровне. Необходимо отметить, что в рабочем диапазоне частот (ниже 1 Гц) количество параметров, конкретизирующих каждую связь, невелико (2—4) и идентификация модели не должна встретить затруднений.

Таким образом, предложенная модель удовлетворяет ранее сформулированным требованиям, что позволяет считать ее пригодной для описания свойств произвольного участка системы кровообращения.

Ленинградский I медицинский институт
Поступила 14/II 1980 г.

Բ. Գ. ԲԵՐՇԱԴՍԿԻ

ԱՐՅԱՆ ՇՐՋԱՆԱՌՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՏԵՂԱՄԱՍԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ՄՈԴԵԼԸ, ՈՐԸ ՕԳՏԱԳՈՐԾՈՒՄ Է ԿԱՊԵՐԻ ԱԶԱՏՄԱՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ

Ամփոփում

Քննարկվում է արյան շրջանառության համակարգի ընտրված տեղամասի սխեմային մորֆո-ֆունկցիոնալ մոդելի ցածր հաճախականության բնութագրերի նպատակահարմարությունը և մշակման հնարավորությունը։ Ցույց է տրված, որ կապերի ազատման սկզբունքի հիման վրա կառուցվող մոդելը բավարարում է նույնացման և միկնաբանության պահանջները։

B. G. Bershadsky

Dynamic Model of an Arbitrary Region of Circulation Using the Principle of Connections Detachment.

Summary

The advisability and the possibility of developing a system morpho-functional model of low-frequency properties of an arbitrary region of circulation are discussed. It is shown that the model based on the principle of connections detachment meets the requirements of interpretability and identifiability.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сигорский В. П.* Методы анализа электрических схем с многополюсными элементами. Киев. Издательство АН УССР, 1958, 402. 2. *Сыренский А. В., Бершадский Б. Г., Бондаренко Е. И.* К вопросу об оценке влияния фармакологических препаратов на емкостные свойства сосудистого русла малого круга кровообращения с использованием математической модели. Деп. ВИНИТИ 04.10.79, № 3492—79, Деп., 1979, 11. 3. *Шумаков В. И., Новосельцев В. Н., Сахаров М. П., Штенгольд Е. Ш.* Моделирование физиологических систем организма. М. Медицина, 1971, 352. 4. *Borgström P., Grände P.* Acta physiol. scand., 1979, 106, 411—523. 5. *Eggert P., Thiemann V. Weiss Ch.* Pflügers arch., 1979, 382, 63—66. 6. *Grände P. O., Borgström P., Mellanl der S.* Acta physiol. scand., 1979, 107, 365—376. 7. *Kenner T.* Dynamics, Control and Regulation, Berlin, 1978, 80—88. 8. *Nichols W. W., Pepine C. J., Geiser E. A., Conti C. R.* Feder. proc., 1980, 39, 195—201. 9. *O'Rourke M. F., Avolio A. P.* Circ. Research 1980, 46, 363—372. 10. *Spelman F. A., Pinter R. B.* Annals of biomed. eng., 1978, 6, 212—230.