

УДК 537.851

ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ ФАРАДЕЯ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА

В.М. МЫХИТАРЯН

Институт физических исследований им. М.Л. Тер-Микаеляна НАН Армении,
Аштарак, Армения

e-mail: vm@ipr.sci.am

(Поступила в редакцию 15 июля 2015 г.)

Обобщен закон электромагнитной индукции Фарадея для произвольно движущегося заряда и получено выражение для силы, действующей на заряд в переменном магнитном поле. Показано, что на заряд, кроме перпендикулярной к скорости движения частицы силы Лоренца, действует также параллельная скорости и пропорциональная ей сила Фарадея. Выведены уравнения движения заряженной частицы и магнитного момента в переменном во времени магнитном поле. Рассмотрены вопросы индукционного ускорения заряженных частиц (бетатрон) и индукционного нагрева среды (плазма, плазменный бетатрон).

1. Заряд в переменном магнитном поле

Вопросы теории движения заряда в переменном магнитном поле помимо теоретического имеют важное прикладное значение в областях ускорения частиц (бетатрон, линейный индукционный ускоритель и т.п.) [1,2], физики плазмы [3], индукционного разряда и обработки материалов [4]. В последние годы ведутся интенсивные исследования в области физики и техники индукционного разряда, ускорения плазмы и возбуждения сред индукцией магнитного поля с целью создания мощных плазмотронов [5], плазмореактивных двигателей [6], источников излучения [7] и лазеров [8,9].

Хотя индукционный разряд известен уже 130 лет [10], а индукционный ускоритель электронов бетатрон – 95 лет [11], имеющаяся на сегодня теория движения и ускорения зарядов в переменном магнитном поле неудовлетворительно описывает реальные процессы ускорения и нагрева зарядов индуцированным электрическим полем. В частности, условие Видероэ для кругового движения заряда в бетатроне при соотношении полей 2:1 так и не было подтверждено, и теория ускорения заряда индуцированным электрическим полем в бетатроне не нашла соответствующего развития; решались только задачи устойчивости движения [1,10]. При индукционном разряде необъясним также разряд в центральной части соленоида, где индуцированное электрическое поле и ток равны нулю [7].

Последовательное построение теории движения зарядов в электромагнитных полях базируется на уравнениях электромагнитных полей и уравнении движения зарядов. Если рассматривается движение одной заряженной частицы в заданном поле, то можно считать, что токи и поля самой частицы, в известных пределах, не влияют на движение частицы. В такой постановке решение задачи можно разделить на два этапа:

1. Нахождение электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{B} полей при заданных граничных условиях и источниках;
2. Решение уравнения движения частицы с массой m и зарядом q в полях \mathbf{E} и \mathbf{B} .

Электромагнитные поля описываются уравнениями Максвелла, которые в представлении Герца–Хевисайда имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Поля \mathbf{E} и \mathbf{B} являются решениями этих уравнений при заданных граничных условиях и источниках ρ и \mathbf{j} . Эти поля существуют независимо от наличия рассматриваемой частицы и состояния ее движения. Из уравнений Максвелла направления и величины полей определяются только симметрией и граничными условиями задачи.

Следующий этап – это решение уравнения движения заряженной частицы при заданных полях

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}(q, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{E}, \mathbf{B}), \quad (2)$$

в котором еще предстоит определить, как зависит действующая на движущийся заряд сила \mathbf{F} от скорости частицы \mathbf{v} , заряда q и полей \mathbf{E} и \mathbf{B} . Ни эта зависимость, ни само уравнение движения уже не связаны с уравнениями Максвелла (поля \mathbf{E} и \mathbf{B} уже заданы и присутствуют), поэтому для определения силы в формуле (2) следует использовать другие законы. Обычно, это закон Фарадея, который формулируется следующим образом: работа силы индукции \mathbf{F}_I над зарядом q по замкнутой кривой L определяется скоростью изменения потока Φ магнитного поля \mathbf{B} через площадь S замкнутой кривой

$$\oint_L \mathbf{F}_I \cdot d\mathbf{L} = -\frac{q}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{q}{c} \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3)$$

вне зависимости от причин изменения этого потока.

Считается, что такая формулировка объединяет два различных явления: возникновение электрического поля в некоторой точке пространства при изме-

нении во времени магнитного поля в этой точке и возникновение силы, действующей на заряженную частицу при ее движении в переменном или постоянном магнитном поле.

Закон Фарадея описывает не только свойство самих полей \mathbf{E} и \mathbf{B} , выраженное из формулы (1) в интегральной форме в виде

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{или} \quad \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (4)$$

когда изменение одного поля порождает (индуцирует) другое. Соотношения (4) с частной производной под интегралом представляют только свойства самих полей и для выражения этих свойств нет нужды в посторонней частице с зарядом q и массой m или ее движении по какой-то замкнутой кривой L . Это есть свойство самих полей, а не свойство взаимодействия полей с заряженной частицей или эффект движения частицы. Вопрос о том, какими свойствами обладает взаимодействие полей с частицей, не может быть обсужден в рамках уравнений Максвелла, так как в уравнениях полей рассматриваемая частица просто не существует.

Фейнман, описывая попытки объединения закона Фарадея (3) и свойств полей (4), пишет [12], что «такое объединение должно исходить из глубокого единого основополагающего принципа. Но в данном случае какого-либо особого глубокого принципа не видно. Мы должны воспринимать «правило» как совместный эффект двух совершенно различных явлений».

Предложенный еще в 1922 г. Видероз индукционный ускоритель электронов бетатрон [1,11] должен был напрямую подтвердить формулу силы Лоренца

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (5)$$

в случае переменных магнитных полей. Из формулы (5) следует, что для обеспечения кругового движения электрона по орбите в переменном магнитном поле среднее значение отклоняющего поля должно находиться со значением поля на циклической орбите (т.е. с ускоряющим полем) в отношении 2:1 – соотношение Видероз.

Но на своей точно собранной установке Видероз «ни одного ускоренного электрона не увидел» и отказался от дальнейших попыток осуществить свой замысел [11]. За последующие 20 лет ученым так и не удалось получить хоть один виток ускоренного индукцией магнитного поля электрона, хотя условие кругового движения Видероз напрямую следовало из формулы Лоренца (5).

И только в 1941 г. Д.В. Керст и Р. Сербер сообщили о создании работающего бетатрона с энергией ускорения 2.3 МэВ [13,14]. Они решили задачу с помощью магнитного барьера – создали неравномерное распределение магнитного поля (яму) на орбите и выяснили, что для удержания электрона на орбите нужны

поля, спадающие в зависимости от радиуса r вблизи орбиты как r^{-k} , где $0 < k < 1$. Устойчивость орбиты в неоднородном магнитном поле уже не определялась условием Видероз, а современные бетатроны работают почти при всяком соотношении полей – соответствующим выбором неоднородности магнитного поля на орбите всегда можно получить устойчивое движение.

Расчеты Р. Видероз и В.В. Ясинского по ускорению электрона индуцированным электрическим полем (трансформаторный подход) так и не дали соответствующих результатов и от таковых отказались. Д.В. Керст, Р. Сербер, Я.П. Терлецкий и другие развили теорию индукционного ускорения, рассматривая только условия устойчивого движения одного электрона при его малых отклонениях от равновесной орбиты в неоднородном магнитном поле (барьере) [1]. И то, что при соотношении полей 2:1 не обеспечивается хоть какое-то многократное ускорение (даже один устойчивый виток), наводит на мысль о принципиальном ограничении в самой основе вывода условия Видероз – в формуле силы Лоренца (5) в случае переменных магнитных полей.

При описании явлений магнитного резонанса, когда рассматривается движение магнитного момента в переменном магнитном поле, тоже возникают принципиальные трудности. Известно, что уравнение движения магнитного момента в виде

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -[\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{L}], \quad (6)$$

где \mathbf{L} – момент импульса, $\boldsymbol{\omega}_L = (q/2mc)\mathbf{B}$ – ларморовская угловая скорость вращения, относится к случаю постоянного магнитного поля (теорема Лармора) [15]. Если умножить уравнение (6) на \mathbf{L} скалярно, то получается $\mathbf{L}^2 = \text{const}$, и становится очевидным, что данное уравнение никак не описывает возбуждение момента в переменном магнитном поле. Несмотря на это в 1946 г. Ф. Блох для описания ядерного магнитного резонанса добавил в уравнение (6) релаксационные члены и использовал его для случая переменных полей [16]:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \frac{\mathbf{L} - \mathbf{L}_0}{\hat{\tau}} = -[\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{L}], \quad (7)$$

где $\hat{\tau}$ – характерные времена продольной и поперечной релаксаций, а \mathbf{L}_0 – равновесное значение момента. В сущности, Ф. Блох и другие [16] рассматривали уравнения (6) и (7) как уравнения для момента частицы \mathbf{L} , а не уравнения для обобщенного момента \mathbf{J} в магнитном поле (как обычно делается в импульсном представлении – рассматривается уравнение движения обобщенного импульса).

Но такое рассмотрение неверно, так как уравнение для момента частицы \mathbf{L} имеет указанный вид только в случае постоянного магнитного поля. В случае переменного поля в уравнения (6) и (7) должен входить очевидный член, пропорциональный SdB/dt , отвечающий за возбуждение любой токовой петли

площадью S (магнитного момента) индукцией переменного магнитного поля B . Этот член обычно феноменологически вводится в задачах нагрева плазмы индукцией магнитного поля [17].

На основе традиционно используемого выражения силы Лоренца (5) можно вывести точное уравнение движения для момента в переменном во времени однородном магнитном поле. В этом случае электрическое поле задается в виде $\mathbf{E} = (1/2c)[\mathbf{r} \times d\mathbf{B}/dt]$, и из (5) имеем

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{q}{2c} \left[\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right] + \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (8)$$

Умножая уравнение (8) на \mathbf{r} векторно, после преобразования и перегруппировки получим

$$\frac{d}{dt} \left(m[\mathbf{r} \times \mathbf{v}] + \frac{q}{2c} [\mathbf{r} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{r}]] \right) = -\frac{q}{2c} [\mathbf{B} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{v}]]. \quad (9)$$

Для частицы, у которой масса и заряд распределены в объеме с одной и той же закономерностью, для элемента массы dm и заряда $dq = (q/m)dm$ имеем

$$\frac{d}{dt} \left([\mathbf{r} \times \mathbf{v}] dm + \frac{q}{2mc} [\mathbf{r} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{r}]] dm \right) = -\frac{q}{2mc} [\mathbf{B} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{v}]] dm. \quad (10)$$

В результате интегрирования по объему V имеем

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{L} + \hat{I}\boldsymbol{\omega}_L) = -[\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{L}]. \quad (11)$$

где $\hat{I} = I_{i,k} = \int_V [r_i^2 \delta_{i,k} - r_i r_k] dm$ – тензор моментов инерции частицы. В случае сферического волчка момент инерции $\hat{I} = I$ – скаляр, и уравнение движения принимает вид

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -[\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{L}] - I \frac{d\boldsymbol{\omega}_L}{dt}. \quad (12)$$

Умножив уравнение (12) скалярно на \mathbf{L} , получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{L}^2}{2I} \right) = -\mathbf{L} \frac{d\boldsymbol{\omega}_L}{dt} = -\mathbf{M} \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad (13)$$

где $\mathbf{M} = (q/2mc)\mathbf{L}$ – магнитный момент частицы. Отсюда видно, почему и как меняется кинетическая энергия вращения $\mathbf{L}^2/2I$ частицы с магнитным моментом \mathbf{M} в переменном магнитном поле \mathbf{B} . Как видим, в случае переменного магнитного поля в уравнениях Блоха (7) отсутствует член, отвечающий за возбуждение магнитного момента индукцией переменного магнитного поля.

То, что эффективное взаимодействие лазерного излучения с магнитоактивной средой происходит при условии параллельности магнитного момента среды

и направления магнитного поля лазерного излучения, было показано в работе [18].

В настоящей работе на основе обобщения закона электромагнитной индукции Фарадея для произвольно движущегося заряда в переменном во времени магнитном поле выведены выражения для силы индукции и полной силы, действующих на заряд во внешнем электромагнитном поле.

2. Закон электромагнитной индукции для произвольно движущегося заряда

Рассмотрим движение частицы по произвольной траектории с зарядом q и массой m в переменном магнитном поле $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Движение заряда в каждый момент времени можно представить как движение по вписанному в рассматриваемой точке траектории кругу с радиусом кривизны ρ и перемещением центра \mathbf{R} этого круга (рис.1).

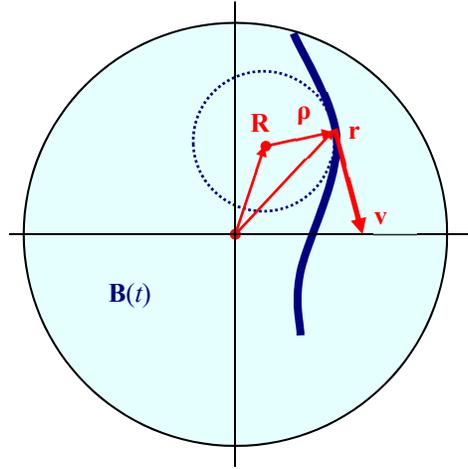


Рис.1. Представление движения частицы в рассматриваемой точке траектории \mathbf{r} вращением по вписанному кругу с радиусом кривизны ρ и перемещением его центра \mathbf{R} .

При таком представлении, исходя из закона индукции Фарадея, закон индукции для произвольно движущегося заряда в переменном магнитном поле сформулируем следующим образом.

Работа силы магнитной индукции \mathbf{F}_I над зарядом q по вписанному в рассматриваемой точке траектории кругу L определяется скоростью изменения потока Φ , действующего в данный момент значения магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ в рассматриваемой точке траектории через площадь S вписанного круга

$$\oint_L \mathbf{F}_I \cdot d\mathbf{L} = -\frac{q}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{q}{c} \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (14)$$

Поверхностный интеграл с переменной во времени областью интегрирования можно представить в виде выражения [19]

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \oint_L [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{L} + \iint_S (\operatorname{div} \mathbf{B}) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (15)$$

В данном случае действующее значение магнитного поля $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ на поверхности S не зависит от переменных интегрирования $\boldsymbol{\rho}$ и \mathbf{S} , и в любом случае для вектора магнитного поля $\operatorname{div} \mathbf{B} \equiv 0$. Используя представление $d\mathbf{S} = [\boldsymbol{\rho} \times d\mathbf{L}]/2$ для преобразования поверхностного интеграла в криволинейный, имеем

$$\oint_L \mathbf{F}_I \cdot d\mathbf{L} = \oint_L \left(\frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \frac{q}{2c} \left[\boldsymbol{\rho} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \right) \cdot d\mathbf{L}. \quad (16)$$

Так как это соотношение выполняется всегда для каждой точки любой траектории, то для силы индукции в рассматриваемой точке траектории получим дифференциальную форму закона Фарадея

$$\mathbf{F}_I = \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \frac{q}{2c} \left[\boldsymbol{\rho} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right]. \quad (17)$$

Выражение (17) определено с точностью силы \mathbf{f} , порождаемой произвольным потенциальным полем U , для которого всегда $\oint_L \mathbf{f} \cdot d\mathbf{L} = \oint_L \operatorname{grad}(U) \cdot d\mathbf{L} \equiv 0$.

Отметим, что здесь не учтена зависимость взаимодействия и изменения действующих значений полей от скорости движения частицы, поэтому движение частицы следует считать нерелятивистским.

Процедура вывода формулы (17) из (14) не отличается от изложенной в работе [20] процедуры, но с целью получения формулы именно для силы индукции \mathbf{F}_I выражения (15) представлены в виде криволинейных интегралов (16), а не поверхностными интегралами для $\operatorname{rot} \mathbf{F}_I$. Отметим, что вывод формулы силы в работе [20] относится к случаю движения частицы с постоянной скоростью.

Радиус-вектор кривизны траектории $\boldsymbol{\rho}$ в рассматриваемой точке \mathbf{r} можно определить из формулы представления нормальной составляющей ускорения \mathbf{a}_\perp через скорость \mathbf{v} и радиус-вектор кривизны $\boldsymbol{\rho}$: $\mathbf{a}_\perp = -\boldsymbol{\rho} v^2/\rho^2$, где $v = |\mathbf{v}|$. Возводя в квадрат, имеем $\rho^2 = v^4/a_\perp^2$, и для представления радиус-вектора кривизны получим $\boldsymbol{\rho} = -\mathbf{a}_\perp \rho^2/v^2 = -\mathbf{a}_\perp v^2/a_\perp^2$.

Нормальная составляющая ускорения \mathbf{a}_\perp представляется через векторы скорости \mathbf{v} и ускорения \mathbf{a} в виде $\mathbf{a}_\perp = \mathbf{a} - \mathbf{a}_\parallel = \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}/v^2 = -[\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{a}]]/v^2$, так что представление радиус-вектора кривизны $\boldsymbol{\rho}$ через скорость \mathbf{v} и ускорение \mathbf{a} имеет вид

$$\boldsymbol{\rho} = -\frac{v^2}{a_\perp^2} \mathbf{a}_\perp = \frac{v^4}{[\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{a}]]^2} [\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{a}]] = \frac{v^2}{[\mathbf{v} \times \mathbf{a}]^2} [\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{a}]]. \quad (18)$$

С учетом (18) для силы индукции из формулы (17) получим

$$\mathbf{F}_I = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_F = \frac{q}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \frac{q}{2c} \frac{v^2}{[\mathbf{v} \times \mathbf{a}]^2} \left[[\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{a}]] \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right]. \quad (19)$$

Как видно, единственная причина возникновения силы индукции это движение заряда как в случае переменного магнитного поля, так и в случае постоянного. Естественно, вне зависимости от состояния движения заряженной частицы на заряд действует также сила электрического поля $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$.

Таким образом, сумма сил \mathbf{F} , действующих на заряд в электрическом \mathbf{E} и магнитном \mathbf{B} полях, есть сумма сил электрического поля \mathbf{F}_E , Лоренца \mathbf{F}_L и Фарадея \mathbf{F}_F (рис.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_I = q\mathbf{E} + \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_F = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \frac{q}{2c} \left[\boldsymbol{\rho} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \\ &= q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \frac{q}{2c} \frac{v^2}{[\mathbf{v} \times \mathbf{a}]^2} \left[[\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{a}]] \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Мощность, выделяемая при движении частицы, равна

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} - \frac{q}{2c} [\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v}] \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (21)$$

где $\mathbf{j} = q\mathbf{v}$ – ток, а

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} [\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{j}] = \frac{q}{2c} [\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v}] = \frac{q}{2c} \frac{v^4}{[\mathbf{v} \times \mathbf{a}]^2} [\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \quad (22)$$

– магнитный момент.

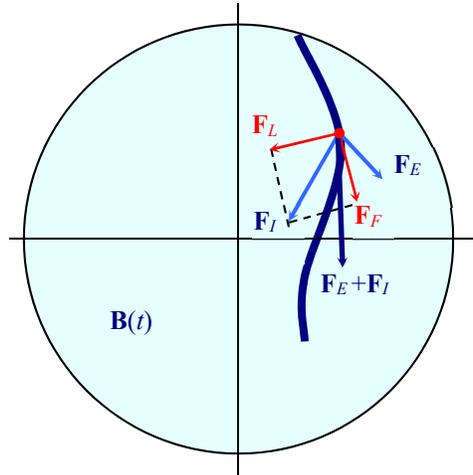


Рис.2. Представление действующей на заряд силы \mathbf{F} как суммы сил электрического поля \mathbf{F}_E , Лоренца \mathbf{F}_L и Фарадея \mathbf{F}_F .

Если движение происходит в перпендикулярной к \mathbf{B} плоскости, то из (20) имеем

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] - \frac{q}{2c} \frac{v^2}{[\mathbf{v} \times \mathbf{a}]^2} \left([\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \mathbf{v}. \quad (23)$$

Умножая уравнение (23) на \mathbf{v} векторно и учитывая, что в данном случае векторы $[\mathbf{v} \times \mathbf{E}]$ и \mathbf{B} параллельны, для $[\mathbf{v} \times \mathbf{a}]$ получим

$$\begin{aligned} [\mathbf{v} \times \mathbf{a}] &= \frac{q}{mc} [\mathbf{v} \times c\mathbf{E}] + \frac{q}{mc} [\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]] = -\frac{q}{mc} \frac{[c\mathbf{E} \times \mathbf{v}] \cdot \mathbf{B}}{B^2} \mathbf{B} - \frac{q}{mc} v^2 \mathbf{B} \\ &= -\frac{q}{mc} v^2 \left(1 + \frac{c\mathbf{E} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]}{v^2 B^2} \right) \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя полученное выражение в исходное уравнение (23), получим

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \frac{1}{2B} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{m\mathbf{v}}{1 + \frac{c\mathbf{E} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]}{v^2 B^2}}, \quad (25)$$

$$\boldsymbol{\rho} = -\frac{mc}{q} \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]}{B^2 + \frac{c\mathbf{E} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]}{v^2}}. \quad (26)$$

3. Силы в поле соленоида

Для выявления ясной физической картины и дальнейшего изложения рассмотрим плоское движение частицы в переменном магнитном поле внутри соленоида с радиусом индуктора R_S при отсутствии других внешних воздействий, для которого $\mathbf{B} = B(t)\mathbf{z}$ и $d\mathbf{B}/dt \parallel \mathbf{B}$, т.е. $d\mathbf{B}/dt = (dB/dt)\mathbf{B}/B$. Переменное во времени магнитное поле в соленоиде индуцирует электрическое поле \mathbf{E} , которое описывается уравнениями Максвелла.

Такое поле описывается в цилиндрических координатах и представляется векторным потенциалом $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\mathbf{B}(t) \times \mathbf{r}], & r \leq R_S \\ \frac{R_S^2}{2(x^2 + y^2)} [\mathbf{B}(t) \times \mathbf{r}], & r > R_S. \end{cases} \quad (27)$$

Для полей соленоида имеем

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \begin{cases} \mathbf{B}, & r \leq R_S \\ 0, & r > R_S, \end{cases} \quad (28a)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \begin{cases} \frac{1}{2c} \left[\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right], & r \leq R_s \\ \frac{R_s^2}{2c(x^2 + y^2)} \left[\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right], & r > R_s. \end{cases} \quad (286)$$

Представленные таким образом электрическое \mathbf{E} и магнитное \mathbf{B} поля удовлетворяют уравнениям Максвелла в случае линейной зависимости магнитного поля от времени в виде $B(t) = a + bt$, где a и b – постоянные. Это означает, что ток индуктора должен изменяться с такой же закономерностью. Возможными решениями являются форма тока в виде треугольника, трапеции, ступеньки или их суммы в виде рядов и предельные представления. В случае, когда характерные времена изменений поля $T \gg R_s/c$, магнитное поле в соленоиде можно считать однородным при возбуждении токами произвольной формы. И точно так же при движении частицы по ларморовской орбите с радиусом ρ , когда характерные времена изменений поля $T \gg \rho/c$, магнитное поле в области движения частицы можно считать однородным.

Таким образом, для действующей на частицу силы индуцированного электрического поля \mathbf{F}_E внутри соленоида имеем

$$\mathbf{F}_E = \frac{q}{2c} \left[\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right] = \frac{q}{2cB} \frac{dB}{dt} [\mathbf{r} \times \mathbf{B}]. \quad (29)$$

В таком случае уравнение движения (20) можно представить в виде

$$\begin{aligned} m\mathbf{a} &= \frac{q}{2c} \left[\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right] + \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \frac{q}{2c} \left[\boldsymbol{\rho} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right] \\ &= \frac{q}{2c} \left[\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right] + \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] - \frac{q}{2c} \frac{v^2}{[\mathbf{v} \times \mathbf{a}]^2} \left([\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right) \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (30)$$

Умножая последнее уравнение на \mathbf{v} векторно, имеем

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{a}] = -\frac{q}{2mc} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) \frac{d\mathbf{B}}{dt} - \frac{q}{mc} v^2 \mathbf{B} = -\frac{q}{mc} v^2 \mathbf{B} \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{v^2} \left(\frac{1}{2B} \frac{dB}{dt} \right) \right), \quad (31)$$

где $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}$. Подставляя полученное выражение для $[\mathbf{v} \times \mathbf{a}]$ в исходное уравнение (30), получим

$$m\mathbf{a} = \frac{q}{2c} \left[\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right] + \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \left(\frac{1}{2B} \frac{dB}{dt} \right) \frac{m\mathbf{v}}{1 + \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{v^2} \right) \left(\frac{1}{2B} \frac{dB}{dt} \right)}. \quad (32)$$

Когда характерное время изменений поля T намного больше периода вращения частицы $2\pi R/v$ (адиабатическое приближение при медленно меняющихся, квазистационарных полях), то из (32) получим уравнение движения в виде

$$m\mathbf{a} = \frac{q}{2c} \left[\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right] + \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \left(\frac{1}{2B} \frac{dB}{dt} \right) m\mathbf{v}. \quad (33)$$

Полученное уравнение движения является полным дифференциалом и представляется в виде

$$\sqrt{B} \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{B}} \left(m\mathbf{v} + \frac{q}{c} [\mathbf{B} \times \mathbf{r}] \right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]}{\sqrt{\omega}} = \frac{\mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_0]}{\sqrt{\omega_0}}.$$

В сущности, при адиабатическом приближении индуцированное электрическое поле действует на заряд, но мало влияет на радиус кривизны движения – он определяется силой Лоренца. Действительно, сравнивая выражение силы Фарадея в формулах (30) и (33), имеем $\frac{q}{2c} \left[\boldsymbol{\rho} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] = \left(\frac{1}{2B} \frac{dB}{dt} \right) m\mathbf{v}$, откуда получаем $\boldsymbol{\rho} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}] / \omega^2$, где $\boldsymbol{\omega} = q\mathbf{B}/mc$.

Перечислим характеристики действующих на движущийся заряд сил индукции в поле внутри соленоида при отсутствии других внешних воздействий (рис.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_I &= q\mathbf{E} + \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \frac{q}{2c} \left[\boldsymbol{\rho} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \\ &= \underbrace{\frac{q}{2c} \left[\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right]}_{\text{Сила электрического поля}} + \underbrace{\frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]}_{\text{Сила Лоренца}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2B} \frac{dB}{dt} \right) m\mathbf{v}}_{\text{Сила Фарадея}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Сила Лоренца \mathbf{F}_L в законе индукции определяется как компонента силы индукции \mathbf{F}_I , действующая перпендикулярно скорости движения. Она определяется скоростью движения, значением магнитного поля в рассматриваемой точке траектории и зависит от заряда частицы. Сила Лоренца определяет радиус кривизны траектории $\boldsymbol{\rho}$. Вне соленоида и при нулевой скорости частицы она равна нулю.

Сила Фарадея \mathbf{F}_F в законе индукции определяется как компонента силы индукции \mathbf{F}_I , действующая параллельно скорости движения. Она определяется значением скорости изменения магнитного поля в рассматриваемой точке траектории, радиусом кривизны траектории $\boldsymbol{\rho}$ и не зависит (явно) от заряда. Эта сила не зависит от заряда и пропорциональна скорости движения (импульсу), так как радиус кривизны $\boldsymbol{\rho}$ определяется силой Лоренца, и обратно пропорциональна заряду частицы. Сила Фарадея вне соленоида и при нулевой скорости частицы равна нулю.

Сила индуцированного электрического поля \mathbf{F}_E определяется из уравнений Максвелла, перпендикулярна радиус-вектору пространственных координат \mathbf{r} и зависит от заряда. Она не равна нулю вне соленоида и не зависит от скорости

движения частицы.

Как указывают характеристики, невозможно идентифицировать силы индукции как силы индуцированного электрического поля, являющиеся решением уравнений Максвелла. Следуя характеристикам, силами индукции следует считать все силы, возникающие при движении заряда, включая и движение в постоянном магнитном поле.

Сила Лоренца \mathbf{F}_L является перпендикулярной компонентой к скорости движения \mathbf{v} , а сила Фарадея \mathbf{F}_F – параллельной скорости силой индукции \mathbf{F}_L , возникающей только при движении заряда ($\mathbf{v} \neq 0$).

4. Уравнение движения магнитного момента

Рассмотрим твердое вращение системы заряженных частиц в переменном магнитном поле с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$. При твердом вращении в системе координат с началом в центре инерции системы радиус-вектор \mathbf{r} совпадает с радиус-вектором кривизны траектории движения $\mathbf{\rho}$. В этом случае уравнение движения частицы (30) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} + [\mathbf{\omega} \times \mathbf{r}]) = 0. \quad (35)$$

Для нахождения уравнения движения момента умножим уравнение (35) на радиус-вектор \mathbf{r} векторно и представим его в виде

$$\frac{d}{dt}([\mathbf{r} \times \mathbf{v}] + [\mathbf{r} \times [\mathbf{\omega} \times \mathbf{r}]]) = [\mathbf{v} \times [\mathbf{\omega} \times \mathbf{r}]]. \quad (36)$$

Представив скорость частицы \mathbf{v} с помощью угловой скорости вращения системы $\mathbf{\Omega}$ в виде $\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]$, для правой части уравнения (36) получим

$$\begin{aligned} [[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}] \times [\mathbf{\omega} \times \mathbf{r}]] &= -(\mathbf{\omega} \cdot [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}])\mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\omega}])\mathbf{r} \\ &= r^2 [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\omega}] - [\mathbf{r} \times [[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\omega}] \times \mathbf{r}]], \end{aligned}$$

и уравнение движения (36) представится в виде

$$\frac{d}{dt}([\mathbf{r} \times [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]] + [\mathbf{r} \times [\mathbf{\omega} \times \mathbf{r}]]) = r^2 [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\omega}] - [\mathbf{r} \times [[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\omega}] \times \mathbf{r}]]. \quad (37)$$

Если система состоит из одинаковых частиц m_i , то суммируя по всем частицам системы, получим

$$\frac{d}{dt} \hat{I}(\mathbf{\Omega} + \mathbf{\omega}) = (I_0 - \hat{I})[(\mathbf{\Omega} + \mathbf{\omega}) \times \mathbf{\omega}], \quad (38)$$

где $\hat{I} = I_{ik} = \sum m_i (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k)$ – тензор моментов инерции системы, а $I_0 = \sum m_i r_i^2$ – скаляр. В случае сферического волчка с радиусом r_0 и массой

$m = \sum m_i$ момент инерции – скаляр $\hat{I} = I = \frac{2}{5}mr_0^2$ и $I_0 = \frac{3}{5}mr_0^2$, поэтому уравнение движения сферического волчка примет вид

$$\frac{d}{dt}I(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) = \left(\frac{3}{2}I - I\right)[(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}] = \frac{1}{2}[I(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}]. \quad (39)$$

Для механического момента импульса $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\Omega}$, поэтому получаем

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L} + I\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{L} + I\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}]. \quad (40)$$

Для обобщенного момента импульса $\mathbf{J} = \mathbf{L} + I\boldsymbol{\omega}$ уравнение (40) представляется в виде

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{1}{2}[\mathbf{J} \times \boldsymbol{\omega}]. \quad (41)$$

Как видно, момент определяется вращением с циклотронной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_C = \boldsymbol{\omega}$, а прецессия – с ларморовской $\boldsymbol{\omega}_L = \boldsymbol{\omega}/2$. При этом величина обобщенного момента импульса \mathbf{J} сохраняется:

$$\mathbf{J}^2 = (\mathbf{L} + I\boldsymbol{\omega})^2 = \text{const}. \quad (42)$$

Уравнение движения момента с релаксационным членом Блоха примет вид

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \frac{\mathbf{L} - \mathbf{L}_0}{\hat{\tau}} + I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{1}{2}[\mathbf{L} \times \boldsymbol{\omega}]. \quad (43)$$

Умножая уравнение (43) на $\gamma = q/2mc$, получим уравнение движения магнитного момента $\mathbf{M} = (q/2mc)\mathbf{L}$ в виде

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} + \frac{\mathbf{M} - \mathbf{M}_0}{\hat{\tau}} + \gamma I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{1}{2}[\mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}]. \quad (44)$$

5. Уравнение движения

Рассмотрим уравнение движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Обозначим $\boldsymbol{\omega} = q\mathbf{V}/mc$ и перепишем уравнение (30) в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{r} \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right] + [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}] + \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\rho} \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right] + \mathbf{a}_{\text{ext}}, \quad (45)$$

где $\mathbf{a}_{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{ext}}/m$ – ускорение сил несоленоидальных воздействий на заряд. Представим движение как вращение с радиусом кривизны $\boldsymbol{\rho}$ по ларморовской орбите с центром \mathbf{R} и его перемещение в виде $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}$ (рис.1).

Подставляя $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{R}$, представим уравнение (42) в виде

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]) = -\frac{1}{2}\left[\mathbf{R} \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right] + \mathbf{a}_{\text{ext}}. \quad (46)$$

Подстановка решения в виде $\mathbf{r} = \mathbf{R} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}]/\omega^2$ и $\boldsymbol{\rho} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}]/\omega^2$, где $\mathbf{v} = -[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}]$, приводит к представлению движения как вращение по кругу и перемещение его центра. Соответственно уравнение разбивается на два односторонне связанных уравнения – уравнение движения радиуса кривизны ларморовской орбиты $\boldsymbol{\rho}$, связанное со скоростью движения центра ларморовской орбиты, и независимое уравнение движения центра ларморовской орбиты \mathbf{R} :

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} + [\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\omega}] = -\frac{d\mathbf{R}}{dt}, \quad \frac{d}{dt}[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}] = \frac{1}{2} \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{R} \right] + \mathbf{a}_{\text{ext}}, \quad (47)$$

или же

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} + [\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\omega}] = -\frac{d\mathbf{R}}{dt}, \quad (48)$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = -\frac{1}{2\omega} \frac{d\omega}{dt} \mathbf{R} + \frac{1}{\omega^2} [\mathbf{a}_{\text{ext}} \times \boldsymbol{\omega}]. \quad (49)$$

Первое уравнение получается дифференцированием соотношения $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{R}$ и подстановкой скорости в виде $\mathbf{v} = -[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}]$. Общее решение для движения центра ларморовской орбиты \mathbf{R} есть

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}} + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\omega}} [\mathbf{a}_{\text{ext}} \times \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}] dt', \quad (50)$$

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{r}_0 - \boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{r}_0 - \frac{1}{\omega_0^2} [\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}_0].$$

При отсутствии несоленоидальных воздействий имеем

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}}, \quad \mathbf{R}_0 = \mathbf{r}_0 - \boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{r}_0 - \frac{1}{\omega_0^2} [\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}_0]. \quad (51)$$

Как видим, при увеличении магнитного поля направление вектора центра ларморовской орбиты \mathbf{R} не меняется и по величине уменьшается. Центр ларморовской орбиты приближается к центру соленоида, и заряд стремится двигаться по кругу вокруг оси соленоида (по силовым линиям индуцированного электрического поля). При нулевой начальной скорости заряд вращается относительно центра соленоида по кругу с постоянным радиусом, соответствующим начальному положению заряда.

5.1. Движение по ларморовской орбите

Умножив уравнение (48) скалярно на радиус-вектор кривизны, имеем $d\rho/dt = -\cos\theta dR/dt$, где θ – угол между векторами радиуса кривизны $\boldsymbol{\rho}$ и центра ларморовской орбиты \mathbf{R} . Исключая явную зависимость от времени и представляя уравнение в виде параметрического уравнения от угла $d\rho/dR = -\cos\theta$, имеем

$$\left. \frac{d(R + \rho)}{dR} \right|_{\theta=0} = 1 - \cos \theta \Big|_{\theta=0} = \frac{dr_{\max}}{dR} = 0. \quad (52)$$

Это означает, что ларморовская орбита всегда проходит во внешнем касании с начальной орбитой и только увеличивается в размерах (рис.3).

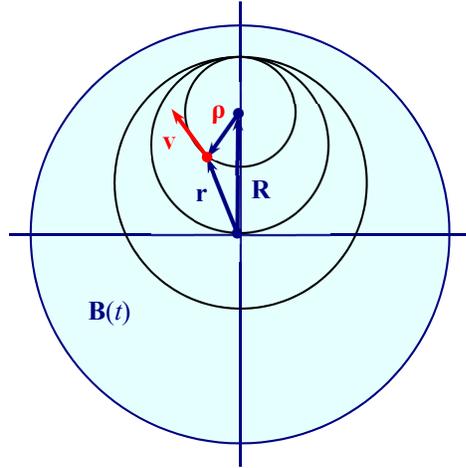


Рис.3. Касательные ларморовские орбиты движения заряда в переменном магнитном поле.

В пределе, при больших полях, ларморовские орбиты стремятся к силовым линиям электрических полей, проходящим во внешнем касании с начальной ларморовской орбитой, т.е. при больших полях все заряды движутся относительно центра соленоида с радиусом, равным начальному максимальному удалению от центра соленоида.

5.2. Бегатрон

При цилиндрической симметрии и круговом движении нетрудно обобщить уравнение движения для неоднородных полей, что приводит к представлению

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{r} \times \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}}{\partial t} \right] + [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}] + \frac{1}{2} \left[\mathbf{r} \times \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \right], \quad (53)$$

где $\bar{\boldsymbol{\omega}} = q\bar{\mathbf{B}}/mc$, а $\bar{\mathbf{B}}$ – среднее значение магнитного поля $\overline{B(r)} = \frac{2}{r^2} \int_0^r r' B(r') dr'$, определяющее значение индуцированного электрического поля \mathbf{E} в рассматриваемой точке \mathbf{r} .

Условие устойчивого кругового движения можно представить в виде

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]) &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{r} \times \left(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \right) \right] - \left[\mathbf{r} \times \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right] \\ &= [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}}) + v_r \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial r} \right) = 0,\end{aligned}\quad (54)$$

откуда имеем

$$\boldsymbol{\omega}(r, t) = \bar{\boldsymbol{\omega}}(r, t) + \boldsymbol{\omega}_0(r), \quad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial r} = 0. \quad (55)$$

Устойчивая во времени орбита находится на участке максимума магнитного поля. Соответствующий анализ условий устойчивости орбиты [1] приводит к тому, что для удержания электрона нужны поля, спадающие в зависимости от радиуса r вблизи орбиты как r^{-k} , где $0 < k < 2$.

6. Индукционный ток и нагрев среды

Чтобы выяснить механизмы возбуждения среды при индукции, умножим уравнение движения (34) на nq/m и усредним по скоростям частиц среды. Для плотности тока \mathbf{j} получим

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{\mathbf{j}}{\tau_v} = \frac{nq^2}{m} \mathbf{E} + \frac{q}{mc} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] + \left(\frac{1}{2B} \frac{\partial B}{\partial t} \right) \mathbf{j}, \quad (56)$$

где второй член описывает столкновительную релаксацию по скорости с характерным временем τ_v , а n – плотность заряженных частиц. Для квазистационарного режима, когда $\tau_v \ll T$, имеем

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \alpha [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] + \left(\frac{\tau_v}{2B} \frac{\partial B}{\partial t} \right) \mathbf{j}, \quad (57)$$

где $\sigma = n\tau_v q^2/m$ – проводимость среды, а $\alpha = \tau_v q/mc$. Если умножить уравнение (57) на \mathbf{B} векторно и подставить полученное выражение для $[\mathbf{j} \times \mathbf{B}]$ в исходное уравнение (57), то получим

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma}{(1 + \alpha^2 B^2) \left(1 - \frac{\tau_v}{2B} \frac{\partial B}{\partial t} \right)} (\mathbf{E} + \alpha [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]). \quad (58)$$

Если движение зарядов по направлению радиус-вектора ограничено стенками соленоида (трубки), то возникает компенсирующее обратное напряжение $\mathbf{E}_r = -\alpha [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$ (эффект Холла). Учет этого дополнительного поля в выражении (58) в виде $\mathbf{E} + \mathbf{E}_r + \alpha[(\mathbf{E} + \mathbf{E}_r) \times \mathbf{B}] = (1 + \alpha B^2)\mathbf{E}$ приводит к результату

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma \mathbf{E}}{1 - \frac{\tau_v}{2B} \frac{\partial B}{\partial t}}. \quad (59)$$

Умножая уравнение движения (34) на $n\mathbf{v}$ скалярно и усредняя по скоростям частиц среды, для средней мощности, выделяемой при индукционном нагреве, получим

$$\frac{dW}{dt} + \frac{W - W_0}{\tau_W} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + W \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial t} \right) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (60)$$

где \mathbf{M} – приобретенный магнитный момент заряда по ларморовской орбите, τ_W – время релаксации по энергии и W_0 – энергия при равновесии. Для стационарного режима из формул (59) и (60) имеем

$$\frac{W - W_0}{\tau_W} = \frac{\sigma}{1 - \frac{\tau_v}{2B} \frac{dB}{dt}} \mathbf{E}^2 + W \left(\frac{1}{B} \frac{dB}{dt} \right). \quad (61)$$

Для энергии в стационарном режиме получаем

$$W = \frac{\sigma \tau_W}{\left(1 - \frac{\tau_v}{2B} \frac{dB}{dt}\right) \left(1 - \frac{\tau_W}{B} \frac{dB}{dt}\right)} \mathbf{E}^2 + \frac{W_0}{1 - \frac{\tau_W}{B} \frac{dB}{dt}}. \quad (62)$$

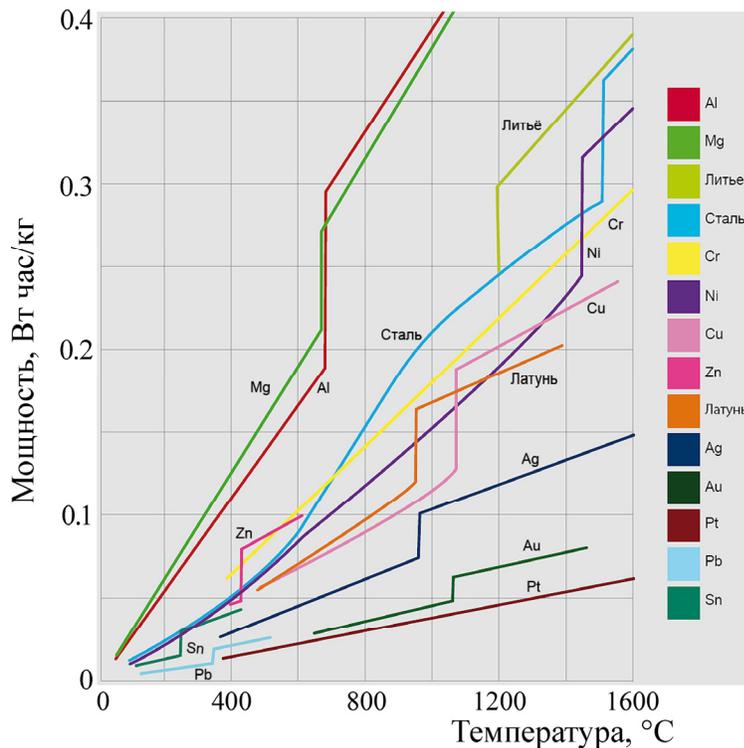


Рис.4. Коэффициент поглощения мощности индукционного нагрева различными материалами в зависимости от температуры [21].

В случае, когда

$$\frac{\tau_v}{2B} \frac{dB}{dt} \approx \frac{\tau_v}{T} \geq 1, \quad \frac{\tau_W}{B} \frac{dB}{dt} \approx \frac{\tau_W}{T} \geq 1, \quad (63)$$

стационарные состояния отсутствуют, а энергия со временем неограниченно возрастает по мере увеличения магнитного поля (условие плазменного бетатрона). При этом определяющим оказывается время релаксации по энергии τ_W , так как всегда $\tau_W > \tau_v$. При условиях (63) нестационарные процессы описываются решениями исходных уравнений (56) и (60).

Формула (62) выражает также характерную особенность поведения проводников при индукционном нагреве – чем выше температура проводника W_0 , тем больше эффективность индукционного нагрева (рис.4) [21]. А при омическом нагреве, как известно, с повышением температуры эффективность уменьшается.

Таким образом, при индукции ускорение и нагрев зарядов происходят двумя механизмами: первый – работой электрического поля при направленном движении зарядов $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$, и второй – работой силы индукции по ларморовской орбите $W \left(\frac{1}{B} \frac{dB}{dt} \right) = -\mathbf{M} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}$.

Если движение зарядов (рис.5) происходит: а) вне магнитного поля, когда $r > R_s$, $\mathbf{E} \neq 0$, $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ и $dW/dt = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$, нагрев носит чисто электрически-омический – трансформаторный характер, б) в центре, когда $r = 0$, $\mathbf{E} = 0$, $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0$ и $dW/dt = W \left(\frac{1}{B} \frac{dB}{dt} \right) = -\mathbf{M} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}$, нагрев носит чисто индукционно-ускорительный, бетатронный характер.

Именно вихревые микроскопические токи индукционного (бетатронного) нагрева обеспечивают разряд в центральной части соленоида, где индуцированное электрическое поле и макроскопический ток равны нулю.

Работа трансформатора хорошо описывается только индуцированным электрическим полем. Находящиеся вне магнитного поля катушки электроны движутся по всем направлениям и с малой средней скоростью, из-за чего пропорциональная скорости сила индукции почти не проявляется. За период изменения магнитного поля электроны не успевают обойти даже сотую часть одного витка трансформатора. Лишь индуцированное электрическое поле создает на концах катушки трансформатора разность потенциалов (напряжение) и направленное движение зарядов (ток). Индуцированное поле и основанная на этом работа трансформатора описываются уравнениями Максвелла.

При движении заряда величина и направление силы индукции и её компоненты никак не связаны с величиной и направлением индуцированного электрического поля в этой точке. Эта сила возникает в переменном магнитном поле только при ненулевой скорости и возрастает со скоростью изменения индукции

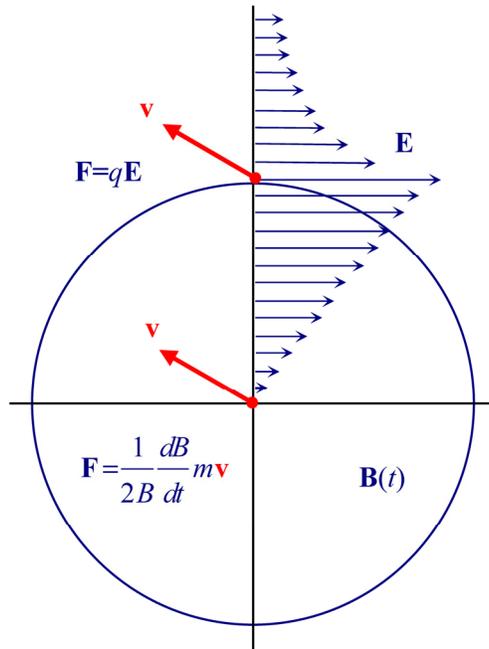


Рис.5. Механизм нагрева зарядов при индукции вне магнитного поля носит чисто электрически-омический, трансформаторный характер, а в центре – чисто индукционно-ускорительный, бетатронный характер.

при движении. При сильных полях и низких давлениях в газе, когда происходит многократное ускорение вращения заряда в промежутках между столкновениями, индукционный (бетатронный) нагрев может существенно превысить обычный электрический (трансформаторный) нагрев.

Сила индукции пропорциональна скорости, поэтому работа силы индукции может превысить потери при столкновениях и этим обеспечить, как предсказывал Г. Будкер [22], ускорение плазмы. Индуцированное электрическое поле, по природе своей не пропорциональное скорости частицы, не может превышать потери и ускорять плазму. Поэтому ТОКАМАК, являющийся вторичным витком трансформатора, в действительности не обеспечивает ускорение и эффективный нагрев плазмы, это обеспечивается в плазменных бетатронах.

Существование независимых и одновременно действующих сил индуцированного электрического поля $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$ и силы индукции $\mathbf{F}_F = \frac{1}{2B} \frac{dB}{dt} m\mathbf{v}$ можно наглядно продемонстрировать с помощью высокочастотного трансформатора с зазором и вторичного витка в виде некороткозамкнутой широкой шайбы (рис.6). Вдали от зазора (положение I) во вторичном витке возникают напряжение u_1 и ток i_1 через нагрузку R , а в первичной обмотке при напряжении U течет ток I_1 и

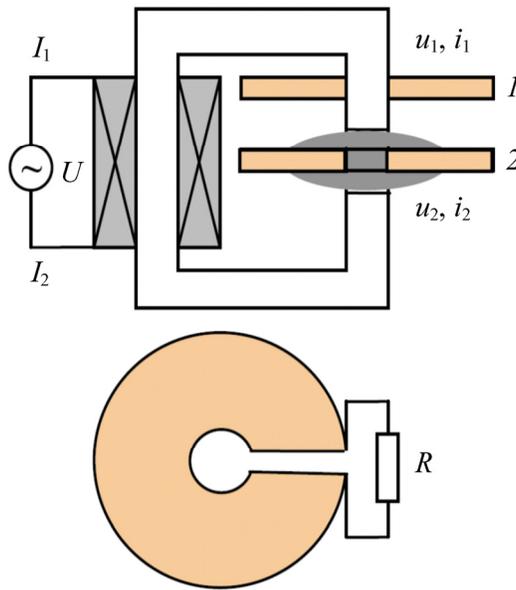


Рис.6. Демонстрация независимых и одновременно действующих силы индуцированного электрического поля и силы индукции в проводнике с помощью высокочастотного трансформатора с зазором и вторичного витка в виде некороткозамкнутой широкой шайбы.

выделяется мощность $P_1 = UI_1 = u_1 i_1$. При этом шайба не нагревается, так как ее омическое сопротивление намного меньше R и вся энергия выделяется в нагрузке. Когда шайба находится в зазоре (положение 2) и магнитное поле частично проникает в шайбу, общий магнитный поток через вторичный виток остается неизменным. Поэтому индуцированное электрическое напряжение, ток и выделяющаяся мощность в нагрузке R не изменяются: $u_1 = u_2$, $i_1 = i_2$ и $u_2 i_2 = P_1$.

В первичной обмотке при напряжении U уже течет ток I_2 и выделяется мощность $P_2 = UI_2 > P_1$, так как добавляется работа силы индукции в объеме шайбы, находящейся в магнитном поле зазора. При этом шайба начинает нагреваться, а мощность нагрева никак не связана с напряжением и током нагрузки. Мощность индукционного нагрева будет такой даже при отключенной нагрузке, когда ток во вторичном витке равен нулю.

В низкочастотных трансформаторах с сердечником из изолированных металлических пластин устраняется только поступательное движение зарядов по направлению индуцированного электрического поля, а объемный индукционный нагрев продолжает действовать и с повышением частоты увеличивается (с учетом скин-слоя). В случае ферритовых сердечников, обычно являющихся хорошими диэлектриками, потери обусловлены лишь наличием гистерезиса намагничивания у ферромагнитного материала сердечника.

7. Заключение

1. На основе обобщения закона электромагнитной индукции Фарадея для произвольно движущегося заряда в переменном во времени магнитном поле получено выражение силы, действующей на заряд во внешнем электромагнитном поле в виде (20)

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \frac{q}{2c} \left[\boldsymbol{\rho} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \\ &= q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \frac{q}{2c} \frac{v^2}{[\mathbf{v} \times \mathbf{a}]^2} \left[[\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{a}]] \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right]. \end{aligned}$$

2. В случае квазистационарного соленоидального магнитного поля эту формулу можно представить в виде (33)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \left(\frac{1}{2B} \frac{dB}{dt} \right) m\mathbf{v}.$$

На заряд кроме перпендикулярной к скорости движения частицы силы Лоренца действует также параллельная скорости и пропорциональная ей сила Фарадея. Сила Фарадея \mathbf{F}_F в законе индукции (34) определяется как компонента силы индукции \mathbf{F}_I , действующая параллельно скорости движения. Она определяется значением скорости изменения магнитного поля в рассматриваемой точке траектории, радиусом кривизны траектории $\boldsymbol{\rho}$ и не зависит (явно) от заряда. Эта сила не зависит от заряда и пропорциональна скорости движения (импульсу), так как радиус кривизны $\boldsymbol{\rho}$ определяется силой Лоренца и обратно пропорционален заряду частицы.

3. Уравнение движения обобщенного момента импульса $\mathbf{J} = \mathbf{L} + I\boldsymbol{\omega}$ имеет вид (41)

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{1}{2}[\mathbf{J} \times \boldsymbol{\omega}].$$

Момент определяется вращением с циклотронной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_C = \boldsymbol{\omega}$, а прецессия – с ларморовской $\boldsymbol{\omega}_L = \boldsymbol{\omega}/2$. Уравнение движения момента с релаксационным членом Блоха имеет вид (43)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \frac{\mathbf{L} - \mathbf{L}_0}{\hat{\tau}} + I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{1}{2}[\mathbf{L} \times \boldsymbol{\omega}].$$

4. Мощность, выделяемая при движении частицы в переменном магнитном поле, равна (21)

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} - \frac{q}{2c}[\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v}] \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + W \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial t} \right).$$

5. Движение частицы в соленоидальном переменном магнитном поле представляется как вращение по ларморовской орбите с радиусом кривизны ρ , а перемещение ее центра \mathbf{R} в виде (48) и (49). С ростом величины магнитного поля направление вектора центра ларморовской орбиты \mathbf{R} не изменяется и по величине уменьшается. Центр ларморовской орбиты приближается к центру соленоида, и заряд стремится двигаться по кругу вокруг оси соленоида (по силовым линиям индуцированного электрического поля). Ларморовская орбита всегда проходит во внешнем касании с начальной орбитой. При нулевой начальной скорости заряд вращается относительно центра соленоида по кругу с постоянным радиусом, соответствующим начальному положению заряда.

6. Условие устойчивой работы бетатрона определяется соотношениями (55)

$$B(r,t) = \bar{B}(r,t) + B_0(r), \quad \frac{\partial B}{\partial r} = 0.$$

Устойчивая во времени орбита в бетатроне находится на участке пространственного максимума магнитного поля и для удержания электрона нужны поля, спадающие в зависимости от радиуса r вблизи орбиты как r^{-k} , где $0 < k < 2$.

7. При индукции ускорение и нагрев зарядов происходят двумя механизмами. Во-первых, работой электрического поля при направленном движении зарядов $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$; во-вторых, работой силы индукции по ларморовской орбите $(W/B)dB/dt = -\mathbf{M} \cdot d\mathbf{B}/dt$. Если движение зарядов в поле соленоида происходит вне магнитного поля, то нагрев носит чисто электрически-омический, трансформаторный характер. В центре соленоида нагрев носит чисто индукционно-ускорительный, бетатронный характер.

8. Сила индукции пропорциональна скорости, и работа силы индукции может обеспечить превышение над потерями при столкновениях и этим обеспечить ускорение плазмы. Индуцированное электрическое поле, по природе своей не пропорциональное скорости частицы, не может обеспечивать превышение над потерями и ускорение плазмы. В частности, ТОКАМАК, являющийся вторичным витком трансформатора, в действительности не обеспечивает ускорение и эффективный нагрев плазмы – это обеспечивается в плазменных бетатронах.

Ввиду исторической, методической и практической ценности закона магнитной индукции Фарадея, в настоящей работе задача изложена и решена в исторически установленных традициях, вне рамок строгих современных подходов. Конечно, полученные результаты должны быть рассмотрены и обоснованы в рамках подходов, основанных на фундаментальных принципах современной физики. Такие общие и фундаментальные подходы, учитывающие зависимость взаимодействия от скорости движения частицы во внешнем поле, изложены в

работах [23,24]. Конкретное обоснование закона электромагнитной индукции Фарадея и вывод выражения для силы, действующей на движущийся заряд во внешнем электромагнитном поле в рамках указанных подходов, будут изложены в дальнейшем.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Л.М. Ананьев, А.А. Воробьев, В.И. Горбунов.** Индукционный ускоритель электронов – бетатрон. Госатомиздат, Москва, 1961.
2. **Ю.П. Вахрушин, А.И. Анацкий.** Линейные индукционные ускорители. Москва, Атомиздат, 1978.
3. **J. Hopwood.** Plasma Sources Sci. Technol., **1**, 109 (1992).
4. **M.A. Lieberman, A.J. Lichtenberg.** Principles of Plasma Discharges and Materials Processing. New York, Wiley, 1994.
5. **B. Bottin et al.** Predicted and Measured Capability of the VKI 1.2 MW Plasmatron Regarding Re-entry Simulation. SP-426, ESA, 1998.
6. **M.R. LaPointe, P.G. Mikellides.** High-Power Magnetoplasmadynamic and Pulsed Inductive Thrusters. Project ASTP, NASA Glenn Research Center, 2002.
7. **G.G. Lister, J.E. Lawler, W.P. Lapatovich, V.A. Godyak.** Rev. Mod. Phys., **76**, 542 (2004).
8. **А.М. Ражев, В.М. Мхитарян, Д.С. Чуркин.** Письма в ЖЭТФ, **82**, 290 (2005).
9. **А.М. Razhev, D.S. Churkin.** Optics and Precision Engineering, **19**, 237 (2011).
10. **W. Hittorf.** Ann. Phys. und Chem., **21**, 90 (1884).
11. Развитие ускорителей элементарных частиц – жизнь и работа Рольфа Видероз, 1902–1996, под ред. П. Валошек. Москва, ФИАН, 1998.
12. **Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сендс.** Фейнмановские лекции по физике, т. 6. Москва, Мир, 1977.
13. **D.W. Kerst.** Phys. Rev., **60**, 47 (1941).
14. **D.W. Kerst, R. Serber.** Phys. Rev., **60**, 53 (1941).
15. **Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.** Теория поля. Москва, Физматлит, 2003.
16. **F. Bloch.** Phys. Rev., **70**, 460 (1946).
17. **И.А. Котельников.** Лекции по физике плазмы. Москва, Бинум, 2014.
18. **Р.М. Мартиросян, А.О. Макарян, В.М. Мыхитарян, В.Р. Татевосян.** Письма в ЖЭТФ, **99**, 505 (2014).
19. **Э. Маделунг.** Математический аппарат физики – справочное руководство. Москва, Физматлит, 1968.
20. **В.Г. Левич.** Курс теоретической физики, т. 1. Москва, Наука, 1969.
21. Применение индукционного нагрева – технологии, оборудование, преимущества. Германия, EFD Induction, 2015.
<http://www.efd-induction.com/ru/~media/PDF/Russian/Applications.ashx>
22. **G.J. Budker.** CERN Symposium, **1**, 68 (1956).
23. **В.М. Мыхитарян.** Известия НАН Армении, Физика, **47**, 379 (2012).
24. **В.М. Мыхитарян.** Известия НАН Армении, Физика, **48**, 3 (2013).

ՖԱՐԱԴԵՅԻ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԻՆՊՈՒԿՑԻԱՅԻ ՕՐԵՆՔԸ
ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ՇԱՐԺՎՈՂ ԼԻՑՔԻ ՀԱՄԱՐ

Վ.Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Ընդհանրացված է Ֆարադեյի էլեկտրամագնիսական ինդուկցիայի օրենքը կամայական շարժվող լիցքի համար և ստացված է փոփոխական մագնիսական դաշտում լիցքի վրա ազդող ուժի արտահայտությունը: Ցույց է տրված, որ մասնիկի արագության ուղղահայաց Լորենցի ուժից բացի, ազդում է նաև արագությանը զուգահեռ և նրան համեմատական Ֆարադեյի ուժը: Դուրս են բերված ժամանակի ընթացքում փոփոխվող մագնիսական դաշտում լիցքավորված մասնիկի և մագնիսական մոմենտի շարժման հավասարումները: Դիտարկված են լիցքավորված մասնիկների ինդուկցիայով արագացման (բետատրոն) և միջավայրի ինդուկցիայով տաքացման (պլազմա, պլազմային բետատրոն) հարցերը:

FARADAY'S LAW OF ELECTROMAGNETIC INDUCTION
FOR AN ARBITRARILY MOVING CHARGE

V.M. MEKHITARIAN

Faraday's law of electromagnetic induction for an arbitrarily moving charge is generalized and the expression for the force, acting on a charge in an alternating magnetic field is obtained. It is shown that on charge, besides Lorentz force perpendicular to the velocity of the particle, the Faraday force acts the parallel to the particle velocity and proportional to it. The equations of motion of the charged particle and magnetic moment, in time-varying magnetic field are derived. The problems of induction acceleration of charged particles (betatron) and induction heating of medium (plasma, plasma betatron) are considered.