

УДК 535.016

РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В ФУНКЦИЯХ ЭЙРИ

А.М. ИШХАНИЯН

Инженерный центр НАН Армении

(Поступила в редакцию 1 ноября 2002 г.)

Представлены два новых семейства потенциалов, обладающих дискретным энергетическим спектром, для которых точное решение одномерного стационарного уравнения Шредингера задается в функциях Эйри. Найдены соответствующие уровни энергии и стационарные волновые функции квантовой системы, движущейся в полях с данными потенциалами.

1. Введение

Нахождение энергетического спектра и соответствующих волновых функций физической системы, управляемой стационарным уравнением Шредингера

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + (E - U) \psi = 0 \quad (1)$$

с подходящим потенциалом $U(x)$, является одним из основных задач нерелятивистской квантовой механики. К сожалению, известны лишь немногочисленные специфические виды потенциалов, для которых решение задачи находится точно. Среди всех интегрируемых случаев особое значение имеют четыре семейства, когда решение определяется через гипергеометрические функции Гаусса [1,2] (члены класса Натансона [3]) и еще четыре семейства, когда решение задается с помощью вырожденных гипергеометрических функций [1,2] (класс вырожденных натансоновских потенциалов [3]). Три из последних четырех семейств (а именно, обобщенный гармонический осциллятор или потенциал Гольдмана-Кривченко, обобщенный кулоновский потенциал, включающий в себя центробежный барьер, и обобщенный осциллятор Морзе), как известно, обладают дискретным спектром. В четвертом же случае, в задаче о движении частицы в однородном поле с потенциалом $U = F_0 x$, из-за отсутствия потенциальной ямы локализация системы невозможна. Интересно, что в данном случае решение можно выразить в функциях Эйри,

которые можно представить как специфическую комбинацию двух обобщенных гипергеометрических функций (см., например, [4]):

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{3^{2/3} \Gamma(2/3)} {}_0F_1\left(\frac{2}{3}; \frac{z^3}{9}\right) - \frac{1}{\sqrt{3} \Gamma(1/3)} {}_0F_1\left(\frac{4}{3}; \frac{z^3}{9}\right). \quad (2)$$

Это обстоятельство, вносящее некоторую разницу между данным классом и всеми остальными, служит стартовой точкой настоящей работы. Как будет показано ниже, поиск решений уравнения Шредингера с подобной структурой выявляет еще одно семейство, определяющее потенциальные ямы. Далее, мы применяем преобразование Дарбу [5] к потенциалу однородного поля и получаем другое семейство, которое также задает потенциальные ямы, но другой формы. На больших расстояниях потенциалы первого семейства стремятся к нулю, в то время как потенциалы второго семейства ведут себя примерно как $U \sim F_0 x$. (Очевидно, что потенциалы последнего семейства могут быть применены в задачах, где на систему наложено внешнее однородное поле, например, гравитационное или магнитное.) Ниже мы представляем общее решение задачи, определяем стационарные состояния и соответствующие энергетические спектры. Уровни энергии оказываются неэквидистантными и проявляют необычную зависимость от главного квантового числа.

2. Первое семейство

Новый класс потенциалов, допускающих решение уравнения Шредингера (1) в функциях Эйри, можно найти, применив стандартную замену зависимой и независимой переменных [3,6]:

$$\psi(x) = \varphi(z)u(z), \quad z = z(x) \Leftrightarrow dz/dx = \rho(z), \quad (3)$$

и потребовав совпадения полученного уравнения с несколько видоизмененным, для удобства, уравнением Эйри [4]

$$u_{zz} - s^3(z + z_0)u = 0. \quad (4)$$

В результате получится следующая система уравнений:

$$2 \frac{\varphi_z}{\varphi} + \frac{\rho_z}{\rho} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\varphi_{zz}}{\varphi} + \frac{\rho_z}{\rho} \frac{\varphi_z}{\varphi} + \frac{\varepsilon - V}{\rho^2} = -s^3(z + z_0), \quad (6)$$

где введены обозначения

$$\varepsilon = 2mE/\hbar^2, \quad V = 2mU/\hbar^2. \quad (7)$$

Тривиальное решение этой системы, $\rho = \varphi = 1$, задает известный потенциал однородного поля $V = V_0 + V_1 x$. Другое решение получается,

если положить $\rho = 2/(3\sqrt{z})$. Нетрудно проверить, что тогда получим семейство потенциалов

$$V = V_0 + \frac{V_1}{x^{2/3}} - \frac{5/36}{x^2}, \quad (8)$$

встречающихся при изучении взаимодействия кварк-антикварк.

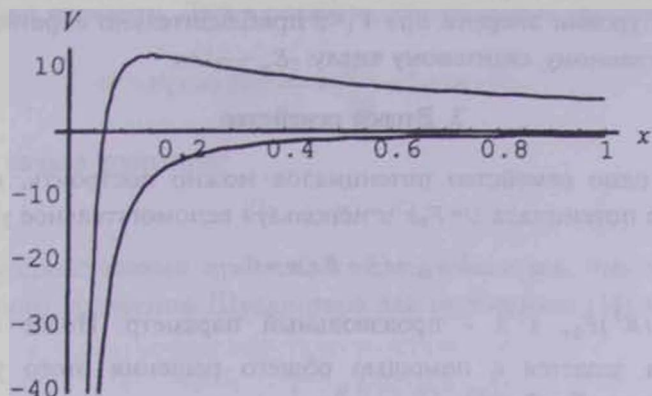


Рис. 1. Потенциалы (8) при $V_0=0$: $V_1=5$ – верхняя кривая, $V_1=-0.1$ – нижняя кривая.

Качественный вид этих потенциалов показан на рис.1.

Соответствующее общее решение уравнения Шредингера (1) при $V_0 - \varepsilon \neq 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \psi &= x^{1/6} \left(C_1 \text{Ai}[s(x^{2/3} + z_0)] + C_2 \text{Bi}[s(x^{2/3} + z_0)] \right), \\ s &= [9(V_0 - \varepsilon)/4]^{1/3}, \quad z_0 = V_1/(V_0 - \varepsilon), \end{aligned} \quad (9)$$

а при $V_0 - \varepsilon = 0$

$$\psi_0 = x^{1/6} \left[C_1 \exp[-3/2\sqrt{V_1}x^{2/3}] + C_2 \exp[+3/2\sqrt{V_1}x^{2/3}] \right]. \quad (10)$$

Определим уровни энергии. Легко видеть, что при $V_0=0$ дискретный спектр возможен только для отрицательных энергий. При этом аргумент функций Эйри в (9) при $x \rightarrow +\infty$ стремится к $+\infty$ и ввиду экспоненциального роста функции Bi следует положить $C_2=0$. Тогда условие квадратичной интегрируемости радиальной волновой функции ψ/x [1] (или эквивалентное условие $\lim(\psi/\sqrt{x})=0$, см. [7]), так как $\psi(x \rightarrow 0) \sim C_1 [\text{Ai}(sz_0)x^{1/6} + (3/2)^{2/3} \text{Ai}'(sz_0)x^{5/6}]$, сводится к следующему уравнению для определения энергетического спектра:

$$\text{Ai}(sz_0) = \text{Ai} \left[V_1 \left(\frac{3}{-2\varepsilon} \right)^{2/3} \right] = 0. \quad (11)$$

В результате, с учетом известного разложения для нулей функции Эйри

(см.[4]), получаются следующие уровни энергии (должно быть $V_1 < 0$):

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{(-V_1)^{3/2}}{n-1/4} \pi \left(1 + \frac{5}{48} \frac{1}{\xi^2} - \frac{5}{36} \frac{1}{\xi^4} + \frac{77125}{82944} \frac{1}{\xi^6} + \dots \right)^{-3/2}, \quad (12)$$

где $\xi = 3\pi(4n-1)/8$, $n=1,2,3,\dots$. С точностью до одного процента, можно пользоваться только первым членом разложения. Таким образом, можно считать, что уровни энергии при $V_1 < 0$ приблизительно обратно пропорциональны главному квантовому числу: $E_n \sim -1/n$.

3. Второе семейство

Еще одно семейство потенциалов можно построить, исходя из однородного потенциала $U=F_0x$ и используя вспомогательное уравнение

$$v_{xx} + (\lambda - Fx)v = 0, \quad (13)$$

где $F = (2m/\hbar^2)F_0$, а λ — произвольный параметр. Новое семейство потенциалов задается с помощью общего решения этого уравнения (преобразование Дарбу [5]):

$$V = Fx - 2 \left(\frac{v_x}{v} \right)_x, \quad (14)$$

$$v = V_1 \text{Ai} \left(\frac{Fx - \lambda}{F^{2/3}} \right) + V_2 \text{Bi} \left(\frac{Fx - \lambda}{F^{2/3}} \right), \quad (15)$$

где V_1, V_2 — произвольные постоянные. Качественный вид потенциала (14) приведен на рис.2.

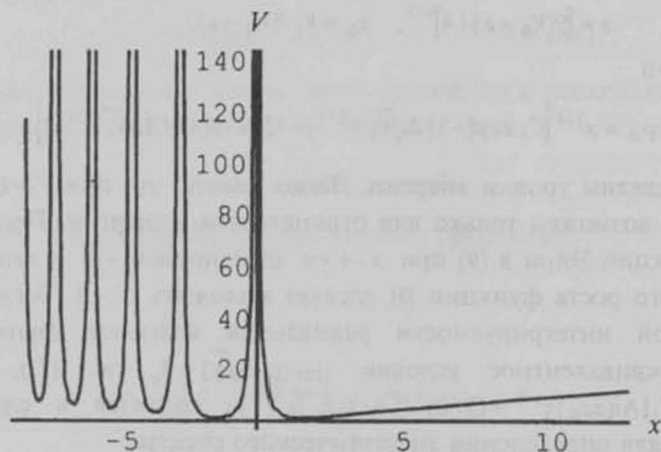


Рис.2. Вид потенциала (14) при $V_1 = -\sqrt{3}V_2$, $\lambda=0$.

Как видно, имеется ряд потенциальных ям. Для того, чтобы первая справа потенциальная яма лежала в области $x > 0$, следует, например,

в формуле (15) выбрать $V_1 = -\sqrt{3}V_2$, $\lambda=0$. Тогда полученный класс потенциалов будет определяться формулой

$$V = -Fx + \frac{2}{x^2} \left(\frac{{}_0F_1(1/3, Fx^3/9)}{{}_0F_1(4/3, Fx^3/9)} \right)^2, \quad (16)$$

где ${}_0F_1$ — обобщенная гипергеометрическая функция, имеющая лишь один нижний параметр. Легко показать, что на малых расстояниях

$$V(x \rightarrow 0) \approx \frac{2}{x^2} + \frac{5F^2}{56}x^4 + O(x^7), \quad (17)$$

а вдали от начала координат

$$V(x \rightarrow +\infty) \approx Fx. \quad (18)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что общее решение исходного уравнения Шредингера для потенциала (16) задается выражением

$$\psi = F^{1/3} [C_1 \text{Ai}'(\chi) + C_2 \text{Bi}'(\chi)] - \frac{1}{z} \frac{{}_0F_1(1/3, Fx^3/9)}{{}_0F_1(4/3, Fx^3/9)} [C_1 \text{Ai}(\chi) + C_2 \text{Bi}(\chi)], \quad (19)$$

где $\chi = (Fx - \varepsilon) / F^{2/3}$.

Определим стационарные состояния системы в первой справа потенциальной яме. Так как функции Эйри второго рода $\text{Bi}(x)$ и $\text{Bi}'(x)$ неограниченно растут при $x \rightarrow +\infty$, следует положить $C_2=0$. Тогда второе граничное условие, $\psi(x \rightarrow 0) = 0$, приводит к простому уравнению для определения энергетического спектра:

$$\text{Ai}\left(\frac{-\varepsilon}{F^{2/3}}\right) = 0. \quad (20)$$

Таким образом, уровни энергии системы в первой справа потенциальной яме (16) соответствуют нулям функции Эйри. Вновь пользуясь известным разложением для нулей функции Эйри (см.[4]), получаем следующее окончательное выражение:

$$E_n = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{1/3} \left(\frac{3\pi F_0}{8}(4n-1)\right)^{2/3} \left(1 + \frac{5}{48} \frac{1}{\xi^2} - \frac{5}{36} \frac{1}{\xi^4} + \frac{77125}{82944} \frac{1}{\xi^6} + \dots\right), \quad (21)$$

где $\xi = 3\pi(4n-1)/8$, $n=1,2,3,\dots$. Отметим, что, как и в предыдущем случае, уже первый член этого разложения определяет энергетический спектр с ошибкой менее 1%. Как непосредственно видно из формулы (21), зависимость уровней энергии от номера n имеет вид $E_n \sim n^{2/3}$. Подобная структура энергетических уровней не имеет известных аналогов. Волновые функции основного ($n=1$) и первого возбужденного ($n=2$) состояний приведены на рис.3.

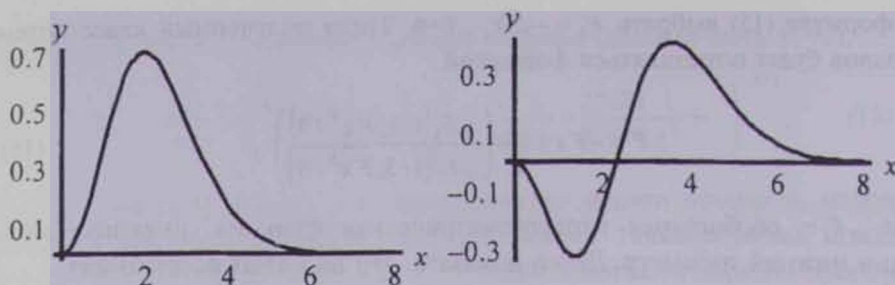


Рис.3. Волновые функции первых двух уровней энергии при потенциале (16).

4. Заключение

Таким образом, мы представили два новых семейства потенциалов, для которых решение одномерного стационарного уравнения Шредингера задается с помощью функций Эйри. Как непосредственно видно из (8) и (17), коэффициенты асимптотик потенциалов в нуле строго зафиксированы и, следовательно, данные потенциалы относятся к так называемому, по терминологии [7,8], классу “условно” интегрируемых моделей. Мы построили общее решение задачи и нашли стационарные состояния системы. (Следует отметить, что приведенное в работе [8] решение задачи о связанных состояниях частицы в поле потенциала (8), как показано в [7], в силу применения некорректных граничных условий, неверно.) Полученные энергетические спектры по виду зависимости от главного квантового числа существенно отличаются от ранее известных типов.

Работа выполнена при поддержке грантов Фонда гражданских исследований и разработок США (CRDF) No.NFSAT PH 100-02/12042 и Армянского Национального Фонда Науки и Образования (ANSEF) No.PS13.

ЛИТЕРАТУРА

1. L.D.Landau and E.M.Lifshitz. Quantum Mechanics. Oxford, Pergamon Press, 1981.
2. I.I.Gol'dman and V.D.Krivchenkov. Problems in Quantum Mechanics. New York, Dover, 1993.
3. Г.А.Натанзон. Ж. Теор. Мат. Физ., 38, 146 (1979); Г.А.Натанзон. Вестник ЛГУ, 10, 22 (1971); P. Cordero and S. Salamo. J. Phys. A, 24, 5299 (1991).
4. M.Abramowitz and I.A.Stegun. Handbook of Mathematical Functions. New York, Dover, 1965; L.J.Slater. Generalized Hypergeometric Functions. Cambridge, Cambridge University Press, 1966.
5. G.Darboux. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 94, 1343 (1882); V.B.Matveev and M.A.Salle. Darboux transformations and solitons. Berlin, Springer, 1991.
6. A.M.Ishkhanyan. Optics Commun., 176, 155 (2000); A.M.Ishkhanyan and K.-A.Suominen. J. Phys. A, 34, 6301 (2001).
7. M.Znojil. Phys. Rev. A, 61, 066101 (2000); C.Grosche. J. Phys A, 28, 5889 (1996); C.Grosche. J. Phys A, 29, 365 (1996).
8. A. de Souza Dutra. Phys. Rev. A, 47, R2435 (1993).

ՇՐՅՈՂԻՆԳԵՐԻ ՄԻԱՇԱՓ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԸ
ԷՅՐԻԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐՈՎ

Ա.Մ. ԻՇԽԱՆՅԱՆ

Ներկայացված է դիսկրետ էներգիական սպեկտր ունեցող պոտենցյալների երկու նոր ընտանիք, որոնց համար Շրյոդինգերի միաչափ ստացիոնար հավասարման ճշգրիտ լուծումները տրվում են Էյրիի ֆունկցիաներով: Գտնված են տվյալ պոտենցյալների դաշտում շարժվող քվանտային համակարգի էներգիայի մակարդակները եւ ստացիոնար ալիքային ֆունկցիաները:

SOLUTIONS OF THE ONE-DIMENSIONAL SCHRÖDINGER EQUATION
IN TERMS OF AIRY FUNCTIONS

A.M. ISHKHANYAN

Two new families of potentials having discrete energy spectrum, for which the exact solutions to the one-dimensional stationary Schrödinger equation are given in terms of Airy functions, are presented. The corresponding energy levels and stationary wave functions are found for quantum systems moving in the field of these potentials.