

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ В ЗАДАЧАХ ИЗЛУЧЕНИЯ

Э. А. БЕГЛОЯН, Э. Д. ГАЗАЗЯН, В. Г. КОЧАРЯН, Э. М. ЛАЗИЕВ

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 5 июля 1997 г.)

В работе развит метод характеристических матриц для использования в задачах об излучении сгустков заряженных частиц в регулярных волноводах произвольного поперечного сечения, заполненного слоистой диэлектрической средой. Такой подход позволяет свести систему из $2N$ линейных уравнений к двум уравнениям с двумя неизвестными и представить выражения для полей и энергии излучения в удобном аналитическом виде. Рассмотрены вопросы формирования полей излучения и синхронного сложения волн, излученных разными сгустками на разных гармониках слоистой среды. Проанализирован случай мелкослойной среды.

1. Рассмотрим регулярный волновод произвольного сечения, заполненный слоистой средой конечной толщины, состоящей из N чередующихся диэлектрических пластин толщины d и воздушных прослоек толщины a . Вдоль оси волновода со скоростью $v=v_z=\text{const}$ движется релятивистский сгусток с зарядом q . Согласно условиям задачи в волноводе возбуждаются лишь ТМ волны с отличной от нуля E_z составляющей поля излучения, которую и выберем в качестве потенциальной функции.

Значения произвольной n -ой распространяющейся моды поля на каждой j -ой границе стопки можно выразить через два неизвестных коэффициента: $B_n^{(j)}$, описывающих волны, распространяющиеся по направлению движения сгустка, и $A_n^{(j)}$, описывающих волны, распространяющиеся против направления движения сгустка. Коэффициенты $A_n^{(j)}$ и $B_n^{(j)}$ определяются граничными условиями, записанными на всех границах стопки.

Граничные условия, записанные для $2N$ границ стопки, приводят к системе из $4N$ уравнений со столькими же неизвестными. Эту систему можно свести к двум уравнениям с двумя неизвестными, если обобщить метод характеристических матриц [1] для решения задач об излучении заряженных частиц. Характеристической матрицей M одного периода слоистой среды (диэлектрическая и воздушная пластинки) называется матрица, которая однозначно связывает значения полей на первой и последней границах периода, с элементами

$$M_{11} = \cos \gamma_n d \cos \Gamma_n a - \left(\frac{\gamma_n}{\varepsilon \Gamma_n} \right) \sin \gamma_n d \sin \Gamma_n a,$$

$$M_{12} = \frac{1}{\varepsilon \Gamma_n} \cos \gamma_n d \sin \Gamma_n a - \frac{1}{\gamma_n} \sin \gamma_n d \cos \Gamma_n a,$$

$$M_{21} = i\gamma_n \sin \gamma_n d \cos \Gamma_n a - i\epsilon \Gamma_n \cos \gamma_n d \sin \Gamma_n a, \quad (1)$$

$$M_{22} = \cos \gamma_n d \cos \Gamma_n a - \sin \gamma_n d \sin \Gamma_n a,$$

где $\gamma_n^2 = (\omega^2/c^2)\epsilon - \lambda_n^2$, $\Gamma_n^2 = (\omega^2/c^2) - \lambda_n^2$, ϵ — диэлектрическая проницаемость пластины, λ_n^2 — собственные волновые числа, n — индекс моды. Матрица (1) определяет закон преобразования волн, проходящих через один период слоистой среды

$$\hat{T}_{mL} = \hat{M} \hat{T}_{(m+1)L}, \quad (2)$$

где $\hat{T}_{mL}$ — матрицы-столбцы с неизвестными коэффициентами $A_n^{(j)}$, $B_n^{(j)}$ с соответствующими фазовыми множителями

$$\hat{T}_{mL} = \begin{vmatrix} e^{-i\Gamma_n mL} & e^{-i\Gamma_n mL} \\ -\epsilon \Gamma_n e^{-i\Gamma_n mL} & \epsilon \Gamma_n e^{-i\Gamma_n mL} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_n^{(j)} \\ B_n^{(j)} \end{vmatrix}, \quad L = d + a. \quad (3)$$

Если вдоль волновода движется сгусток, то в слоистой среде возникают дополнительные поля, связанные с изменением собственного поля сгустка при пересечении им границ раздела диэлектрических сред. Это изменение, определяемое из соответствующих граничных условий для n -ой моды, можно представить в виде матрицы-столбца

$$\hat{b}_n^{(m)} = -q(\epsilon - 1) F_n(\omega) \begin{vmatrix} \omega^2 \\ d_n c^2 \\ \omega a_n \\ \gamma d_n \end{vmatrix} e^{-i(\omega/\gamma) mL}, \quad (4)$$

$d_n = (\omega^2/\gamma^2 - \gamma_n^2)(\omega^2/\gamma^2 - \Gamma_n^2)$, $a_n = (1 - \beta^2)\omega^2/\gamma^2 - \gamma_n^2$, $F_n(\omega)$ — форм-фактор сгустка.

В произвольном m -ом периоде сгусток пересекает две границы раздела. Изменения поля при переходе из вакуума в диэлектрик и из диэлектрика в вакуум описываются матрицами $\hat{a}(\gamma_n)$ и $\hat{a}(\Gamma_n)$, получающимися из матрицы $\hat{M}$, если соответственно $a=0$ и $d=0$. Окончательно уравнение (2) обобщается в виде

$$\hat{T}_{mL} = \hat{M} \hat{T}_{(m+1)L} + \hat{M} \hat{b}_n^{(m)} - \hat{p}(\gamma_n) \hat{b}_n^m e^{-i(\omega/\gamma)d}. \quad (5)$$

Выражая значения полей излучения на последующих границах через их значения на предыдущих границах, придем к связи полей на любых двух границах слоистой среды. В частности, для первой и последней границ стопки получим

$$\hat{T}_{NL} = \hat{M}^N \hat{T}_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \hat{M}^{N-k} (1 - \hat{p}^{-1}(\gamma_n) e^{-i(\omega/\gamma)d}) \hat{b}_n^{(k)}. \quad (6)$$

Для вычисления полей излучения в произвольном m -ом отсеке нужно записать уравнения, связывающие значения полей на границах m -го отсека с полями на первой и последней границах стопки:

$$\hat{T}_{ml} = \hat{M}^m \hat{T}_0 + \sum_{k=0}^{m-1} \hat{M}^{m-k} (1 - \hat{p}^{-1}(\gamma_n) e^{-i(\omega/\gamma) d}) \hat{p}_n^{(k)},$$

$$\hat{T}_{ml} = \hat{M}^{N-m} \hat{T}_0 + \sum_{k=m}^{N-1} \hat{M}^{m-k} (1 - \hat{p}^{-1}(\gamma_n) e^{-i(\omega/\gamma) d}) \hat{p}_n^{(k)}.$$
(7)

Решения этой системы уравнений и будут определять поля излучения в произвольном m -ом отсеке, когда сгусток пролетел всю стопку. Система (7) упрощается, если учесть, что матрицы $\hat{M}$ выражаются через полиномы Чебышева второго рода, равенство нулю аргумента ξ_n которых и является дисперсионным уравнением в слоистой среде:

$$\xi_n = \cos k_z L = \cos \gamma_n d \cos \Gamma_n a - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_n}{\varepsilon \Gamma_n} + \frac{\varepsilon \Gamma_n}{\gamma_n} \right) \sin \gamma_n d \sin \Gamma_n a. \quad (8)$$

В полосе прозрачности стопки пластин для частот, удовлетворяющих условию Брюстера в волноводе [2]

$$\gamma_n = \varepsilon \Gamma_n, \quad (9)$$

выражения для полей еще более упрощаются.

2. Предположим теперь, что в волноводе движется система из N' одинаковых сгустков, отстоящих друг от друга на расстояние l . С учетом сделанных замечаний, для E_{zw} составляющих полей излучения в m -ом отсеке получим [3]:

$$E_{zw}^{(m)} = \sum_n \frac{2q_n^2 F_n(\omega)}{i\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N'\omega l}{2\gamma}}{\sin \frac{\omega l}{2\gamma}} e^{-i(N'-1)\frac{\omega l}{2\gamma}} \left\{ \frac{\sin m \left(\frac{\omega}{\gamma} - k_z \right) \frac{L}{2}}{\sin \left(\frac{\omega}{\gamma} - k_z \right) \frac{L}{2}} \cdot \right.$$

$$\cdot B_n \exp \left(i(m-1) \left((\Gamma_n - \gamma_n) d - \left(\frac{\omega}{\gamma} - k_z \right) \frac{L}{2} \right) - i\Gamma_n z \right) +$$

$$\left. + \frac{\sin(N-m) \left(\frac{\omega}{\gamma} + k_z \right) \frac{L}{2}}{\sin \left(\frac{\omega}{\gamma} + k_z \right) \frac{L}{2}} \right\} \quad (10)$$

$$\cdot A_n' \exp i m \left((\Gamma_n - \gamma_n) d - (N+m-1) \left(\frac{\omega}{\gamma} + k_z \right) \frac{L}{2} - i\Gamma_n z \right) - \frac{\omega^2 (1 - \beta^2) e^{-i \frac{\omega}{\gamma} z}}{\gamma_n^2 \gamma^2 \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} - \Gamma_n^2 \right)} \Bigg\} \times$$

$$\times \Psi_n(x, y) \Psi_n(x_0, y_0),$$

где $\Psi_n(x, y)$ — собственные функции поперечного сечения волновода, x_0, y_0 — координаты пролета сгустков в поперечном сечении волновода, B_n определяет поля излучения «вперед» от пластины, A_n — «назад». Полученные формулы справедливы для регулярного волновода произ-

вольного поперечного сечения. Первое слагаемое в (10) описывает поля излучения «вперед» от первых m пластин, а второе слагаемое — поля излучения «назад» от оставшихся пластин. Действительно, если положить $m=N$, второе слагаемое в (10) обратится в нуль. Механизм формирования полей излучения в стопке диэлектрических пластин следующий: каждый сгусток пучка генерирует в диэлектрических пластинках слоистой среды поля переходного излучения, которые распространяясь «вперед» и «назад», складываются друг с другом с соответствующими фазами. Если в диэлектрических пластинках выполняются условия возникновения излучения Вавилова-Черенкова, то оно также будет давать вклад в поля излучения. Такой процесс повторяется для всех сгустков пучка. Эта ситуация описывается в (10) множителями

$$f_1(\omega) = \frac{\sin \frac{N'\omega l}{2\nu}}{\frac{\omega l}{2\nu}}, \quad f_2(\omega) = \frac{\sin N \left(\frac{\omega}{\nu} \pm k_z \right) \frac{L}{2}}{\sin \left(\frac{\omega}{\nu} \pm k_z \right) \frac{L}{2}}. \quad (11)$$

Первый множитель $f_1(\omega)$ описывает интерференцию полей излучения от различных сгустков и имеет максимумы на частоте следования сгустков $f_0 = \nu/l$ и ее гармониках.

Второй множитель описывает интерференцию от разных пластин стопки. При N и $N' \gg 1$ они приобретают δ -образный вид и становятся существенно отличными от нуля на частотах, удовлетворяющих условиям

$$\frac{\omega}{\nu} \pm k_z = \frac{2\pi j}{L}, \quad \frac{\omega}{\nu} = \frac{2\pi k}{l}, \quad j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (12)$$

где k — номер гармоники частоты следования сгустков, j — номер пространственной гармоники слоистой среды. Если $j=0$, то первое условие в (12) приобретает вид

$$\omega = \nu k_z. \quad (13)$$

Поскольку k_z имеет смысл постоянной распространения волны в слоистой среде, то условие (13) эквивалентно условию возникновения излучения Вавилова-Черенкова, когда скорость источника равна скорости сопутствующей волны. Волны с частотой, удовлетворяющей условию (13), наиболее долго взаимодействуют с пучком с длительной трансформацией энергии пучка в энергию соответствующей волны. Случай $j=0$ соответствует гармоникам слоистой среды и определяет частоты, при которых возникает параметрическое излучение [4].

Максимальный отбор энергии излучения пучка обеспечивается, когда излученные волны на данной частоте синфазны. Этого можно достигнуть оптимизацией параметров излучающего пучка, слоистой среды и волновода. Так, если определить размеры поперечного сечения волновода такими, чтобы удовлетворялось условие

$$\nu_n = \left(\frac{2\pi k^2}{L} \right) \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}}, \quad (14)$$

то частота ω_{nk} Бриюстера на n -ой моде, согласно (9) и (12), будет совпадать с частотой k -ой гармоники следования сгустков и для волн с этими частотами стопка станет прозрачной. При этом если толщины диэлектрических пластин d и воздушных прослоек a удовлетворяют соотношению

$$k \left(1 \pm \frac{\varepsilon(a + \varepsilon d)}{(d + a)\sqrt{\varepsilon+1}} \right) \frac{L}{2} = pL, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

(верхний знак соответствует волнам, распространяющимся «вперед», нижние «назад»), то волны, излученные на различных пластинках всеми сгустками пучка складываются в одинаковых фазах. При $p=0$ (аналог черенковского излучения в волноводе) (15) упрощается и принимает вид

$$\frac{a}{d} = \frac{\sqrt{\varepsilon+1}-\varepsilon}{\varepsilon^2 - \sqrt{\varepsilon+1}}. \quad (16)$$

Условие (15) реализуется для диэлектрических сред, проницаемость которых удовлетворяет условию

$$\varepsilon > \frac{(1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon^2})}{2\varepsilon^2}. \quad (17)$$

Для ультрарелятивистских частиц $\varepsilon > 1,61$. Отметим, что условие (17) справедливо для регулярных волноводов произвольного сечения. Соотношения (14)–(17) определяют оптимальные параметры излучателя, при которых отбор энергии от последовательности сгустков максимален.

Напряженность поля излучения в m -ом отсеке, после пролета системы сгустков через стопку пластин, может быть представлена в виде

$$E_z^m(x, y, z, t) = \sum_m \{mE_z^+(x, y, z, t) + (N-m)E_z^-(x, y, z, t)\}, \quad (18)$$

где $E_z^+(x, y, z, t)$ и $E_z^-(x, y, z, t)$ — поля излучения «вперед» и «назад» от одной пластины. Выражения для них получаются из (10) с учетом формул (14)–(17).

С увеличением номера отсека m первое слагаемое в (18) линейно растет. Оно описывает волны, распространяющиеся со скоростью сгустков в направлении их движения, а согласно изложенному выше, волны, излученные на каждой последующей пластине синфазно складываются с волнами, излученными на всех предыдущих пластинах, что и объясняет линейный рост $E_z^{(m)}$ с ростом номера ячейки m . Учет потерь энергии в диэлектрических пластинах и в стенках волновода

приведет к уменьшению роста величины напряженности полей излучения.

Заметим, что выражение (18) справедливо лишь для достаточно большой последовательности сгустков ($N \gg 1$), когда в основном усиливается частота, совпадающая с частотой следования сгустков ω_0 . При этом излучение носит резонансный характер и эффективный отбор энергии происходит на выбранной моде согласно (14). В случае небольшого количества сгустков, необходимо рассматривать весь спектр излучения согласно формулам (10).

В заключение рассмотрим случай мелкослонистой среды, когда

$$\gamma_n d \ll 1, \quad \Gamma_n a \ll 1. \quad (19)$$

Разлагая ξ_n в ряд по малым параметрам, с точностью до квадратичных членов получим

$$\xi_n = 1 + \delta_n, \quad (20)$$

$$\text{где } \delta_n = 0.5 \left((\gamma_n d)^2 + (\Gamma_n a)^2 - \frac{(\gamma_n d)(\Gamma_n a)}{\gamma_n (\varepsilon \Gamma_n + \varepsilon \Gamma_n / \gamma_n)} \right).$$

Если ввести обозначения

$$\varepsilon_z = \frac{\varepsilon L}{\varepsilon a + L}, \quad \varepsilon_r = \frac{a + \varepsilon d}{a + d}, \quad D = NL, \quad \hat{\gamma}_n = \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_z} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_z + \gamma_n^2 \right)}, \quad (21)$$

то характеристическую матрицу стопки можно представить в виде:

$$M = \begin{vmatrix} \cos \hat{\gamma}_n D & \frac{i}{\varepsilon_r \hat{\gamma}_n} \sin \hat{\gamma}_n D \\ i \varepsilon_r \hat{\gamma}_n \sin \hat{\gamma}_n D & \cos \hat{\gamma}_n D \end{vmatrix} - \frac{\sin \hat{\gamma}_n D}{\hat{\gamma}_n D} \begin{vmatrix} M_{11} - 1 & 0 \\ 0 & M_{22} - 1 \end{vmatrix}. \quad (22)$$

Первая матрица в (22) совпадает с характеристической матрицей одной анизотропной пластины, если под $\hat{\gamma}_n$ понимать постоянную распространения волн в этой пластине, а под D — толщину пластины. Выясним условие, при котором можно пренебречь второй матрицей (22). Для этого сравним коэффициенты отражения и прохождения для стопки из N тонких пластин с соответствующими выражениями одиночной пластины. Они совпадают для области частот, в которой выполняется условие

$$(\sqrt{\gamma_n / \varepsilon \Gamma_n} + \sqrt{\varepsilon \Gamma_n / \gamma_n}) \gamma_n d \ll 1. \quad (23)$$

В указанной области частот мелкослонистую среду конечной толщины можно рассматривать как одну анизотропную пластину с проницаемостью

$$\hat{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (24)$$

Данная работа проведена при поддержке гранта А-087 ISTC.

1. М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики, М., Наука, 1973.
2. Х. С. Арутюнян, Э. А. Беглоян, Э. М. Лазиев, Г. Г. Оксюзян. Условия Брюстера в волноводе. Научное сообщение ЕрФИ-285(11)-78.
3. Э. А. Беглоян, Э. Д. Газазян, Э. М. Лазиев. Радиотехника и электроника, 21, 164(1976).
4. А. Хижияк. Радиотехника и электроника, 5, 413(1960).

ԲՆՈՒԹԱԴՐԻԶ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ԵԳԱՆԱԿԸ ՀԱՌԱԿԱՅԹՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Է. Ա. ԲԵԳԼՈՅԱՆ, Է. Դ. ԳԱԶԱԶՅԱՆ, Վ. Գ. ԲՈԶԱՐՅԱՆ, Է. Մ. ԼԱԶԻԵՎ

Աշխատանքում մշակված է բնութագրիչ մատրիցների եղանակը՝ կիրառված լիցքավորված թանձրուկների ճառագայթման խնդիրներում՝ կամավոր լայնական կտրվածք ունեցող կանոնավոր ալիքատարի մեջ, որը լցված է շերտավոր դիէլեկտրական միջավայրով: Այս մոտեցումը բույլ է տալիս 2N թվով դժային հավասարումների համակարգը հանգեցնել երկու անհայտով երկու հավասարումների և դաշտերի և էներգիայի արտահայտությունները ներկայացնել հարմար վերլուծական տեսքով: Դիտարկված են ճառագայթման դաշտերի ձևավորման և շերտավոր միջավայրի տարրեր հարմոնիկների վրա տարրեր թանձրուկների ճառագայթման դաշտերի սինթեզն վերադրման հարցերը: Վերլուծված է մանրաշերտ միջավայրի դեպքը:

THE METHOD OF CHARACTERISTIC MATRIXES AS USED IN RADIATION PROBLEMS

E. A. BEGHLOYAN, E. D. GAZAZIAN, V. G. KOCHARIAN, E. M. LAZIEV

This work presents a development of the characteristic matrix method to use in the problems on charged particle bunch radiation in arbitray cross-section regular waveguides filled with a laminated dielectric medium. This approach enables to reduce a set of 2N linear equations to two equations with two unknowns and present the expressions for fields and energy in a suitable analytical form. The questions concerning radiation field formation as well as synchronous interference of waves emitted by different bunches at different laminated medium harmonics are considered.