

ЖИДКИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ПРОВОДНИК ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Т. С. ЗОЛЯН

Методом бесконтактного вращающегося поля рассмотрено влияние вязкости на определение электропроводности жидких металлов и полупроводников. Показано, что при малой вязкости расплавов погрешности измерений могут достигать значительных величин.

При исследовании жидких металлов и полупроводников довольно широко применяются бесконтактные способы измерения, и среди них довольно распространенным является метод вращающегося магнитного поля [1, 2]. Слабым местом последнего является отсутствие учета сил сцепления жидкости со стенками тигля, что при малой вязкости может привести к «скольжению» жидкости.

В настоящей работе делается попытка учета сил вязкости для жидкости с электропроводностью σ и вязкостью η , находящейся в тигле радиуса R . Объект измерения помещается во вращающееся магнитное поле

$$H_0(t) = (H_{01} + iH_{02}) e^{-i\omega_0 t}.$$

Поле поляризовано по кругу и в каждый момент однозначно определяется двумя взаимно перпендикулярными векторами одинаковой длины

$$H_{01} = H_{02} = H_0.$$

Считается, что поле квазистационарно, т. е. что длина волны $\lambda \gg R$, что позволяет применить уравнения статического поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0.$$

Число Рейнольдса, характеризующее ламинарность движения жидкости, полагается малым, так же, как и число Гартмана, характеризующее соотношение приложенного и индуцированного полей.

Тогда уравнение непрерывности вместе с уравнением Навье-Стокса полностью определяют движение внутри расплава с граничными условиями для скорости $v=0$ при $r=0$ и $r=R$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}, \quad (2)$$

где $\mathbf{f} = [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]$ — объемная плотность сторонних (электромагнитных) сил, ξ и η — два коэффициента вязкости.

Поскольку рассматривается несжимаемая жидкость с $\rho \neq \rho(t, x, y, z)$, то $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Вектор скорости потока жидкости направлен по касательной к окружности с центром на оси вращения, т. е. находится в плоскости вращения магнитного поля (xy), что в силу аксиальной симметрии приводит

к условию $\text{grad } p = 0$ ввиду взаимной компенсации сил давления, возникающих в слоях с различными скоростями.

Учитывая стационарность движения $\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0\right)$ и пренебрегая членом $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ по сравнению с $\frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}$, согласно условиям [3] получаем

$$-\frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] = 0. \quad (3)$$

В направлении, перпендикулярном к скорости вращения жидкости $\mathbf{v}$ и напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$, возникает радиальный ток j_r , однако в силу симметрии задачи этот ток взаимно компенсируется на противоположных концах диаметра цилиндра: $\Sigma j_r = 0$ [4]. Частота вращения поля ω_0 уменьшается с увеличением частоты вращения расплава ω .

При принятых условиях для однородного поляризованного по кругу вращающегося магнитного поля в цилиндрической системе координат имеем

$$B_r = B_0 \exp \{-i[(\omega_0 - \omega)t + \varphi]\}, \quad B_z = 0,$$

$$B_\varphi = B_0 \exp \left\{ -i \left[(\omega_0 - \omega)t + \varphi + \frac{\pi}{2} \right] \right\},$$

$$E_r = 0, \quad E_z = -B_0(\omega_0 - \omega)r \exp \{-i[(\omega_0 - \omega)t + \varphi]\}, \quad E_\varphi = 0.$$

Поле $\mathbf{E}$ вызывает в расплаве ток с плотностью $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ и, следовательно, $j_z = \sigma r(\omega_0 - \omega)B_r$.

Составляющие $\mathbf{f}$ есть

$$F_r = -j_z B_\varphi = -\sigma r B_r B_\varphi (\omega_0 - \omega),$$

$$F_\varphi = j_z B_r = \sigma r (\omega_0 - \omega) B_r^2,$$

$$F_z = 0.$$

Усредняя по периоду колебания, получаем

$$\bar{F}_r = \frac{1}{2} \text{Re} \{ -j_z \dot{B}_\varphi \} = -i \frac{\sigma}{2} B_0^2 \text{Re} \{ r(\omega_0 - \omega) \} = 0,$$

$$\bar{F}_\varphi = \frac{1}{2} \text{Re} \{ j_z \dot{B}_r \} = \frac{1}{2} \sigma r B_0^2 (\omega_0 - \omega).$$

$\bar{F}_\varphi$ вызывает вращение расплава по координате φ , которая ввиду симметрии задачи не является функцией v_φ , что позволяет представить уравнение Навье-Стокса в скалярном виде по координате φ :

$$(\Delta v)_\varphi = \Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi},$$

и так как $\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} = 0$, то $(\Delta v)_\varphi = \Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2}$,

где

$$\Delta v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_z) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}.$$

Уравнение движения расплава в цилиндрическом тигле для установившегося состояния $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ принимает вид

$$\frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{v_z}{r^2} \right) + \frac{1}{2\rho} \sigma r B_0^2 (\omega_0 - \omega) = 0. \quad (4)$$

Подставляя $v(r) = \omega(r) r$ и учитывая, что

$$\frac{dv}{dr} = \frac{d(\omega r)}{dr} = \omega + r \frac{d\omega}{dr},$$

получаем

$$\frac{d^2 v}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\omega + r \frac{d\omega}{dr} \right) = r \frac{d^2 \omega}{dr^2} + 2 \frac{d\omega}{dr}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в основное уравнение (4), имеем

$$\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\omega}{dr} + H_a^2 (\omega_0 - \omega) = 0,$$

где

$$H_a = \left(\frac{\sigma B_0^2}{2\eta} \right)^{1/2}.$$

При больших r член $\frac{3}{r} \frac{d\omega}{dr}$ можно отбросить, и получаем

$$\frac{d^2 \omega}{dr^2} + H_a^2 (\omega_0 - \omega) = 0.$$

Полагая $\omega - \omega_0 = e^{kr}$, имеем $k^2 e^{kr} = H_a^2 e^{kr}$, т.е. $k = \pm H_a$ и $\omega - \omega_0 = C_1 e^{H_a r} + C_2 e^{-H_a r}$. Имея в виду, что при больших r член $C_2 e^{-H_a r}$ теряет смысл, получаем $\omega - \omega_0 = C_1 e^{H_a r}$. Так как при $r = R$ $\omega = 0$, то $C_1 = -\omega_0 e^{-H_a R}$ и, следовательно,

$$\omega = \omega_0 [1 - e^{H_a (r - R)}]. \quad (6)$$

Сила трения dF , действующая на элемент поверхности dS жидкости с $\text{grad } v$ и вязкостью η , равна $dF = -\eta \text{ grad } v dS$, а соответствующий момент есть

$$M = -\eta \int_0^{2\pi} r \text{ grad } v dS,$$

где

$$dS = r l d\varphi,$$

$$\text{grad } v = \hat{e}_z r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \hat{e}_z \omega.$$

Поскольку при $r = R$ $\omega = 0$, то $\text{grad } v = e_z r \frac{\partial \omega}{\partial r}$ и, следовательно,

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = -\omega_0 H_a. \text{ Таким образом,}$$

$$M = 2\pi R^2 l \omega_0 R \gamma H_a = \omega_0 V R B_0 \gamma \sqrt{\frac{\gamma^2}{2}}, \quad (7)$$

где V — объем образца.

Считая для данного эксперимента

$$k = \omega_0 V B_0 R = \text{const},$$

получаем $\sigma = k \frac{M^2}{\gamma}$, что позволяет поднять точность измерений, проводимых обычно либо без учета сил вязкости проводящей жидкости [5], либо введением поправочных коэффициентов [6].

Институт радиофизики
и электроники АН АрмССР

Поступила 15.XII.1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Мотт, Э. Девис. Электронные процессы в некристаллических веществах, Изд. Мир, 1974.
2. А. Р. Ретель. ЖТФ, 18, 1511 (1948).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред, ГИТТЛ, 1954.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, 1957.
5. Я. И. Френкель. Электродинамика, ГОНТИ, 1935.
6. W. Braunbeck. Zs. Phys., 73, 312 (1932).

ՀԵՂՈՒԿ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՀԱՂՈՐԴԻՉԸ ՊՏՏՎՈՂ ՄԱԳՆԻՍՏԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ

Տ. Ս. ԶՈԼՅԱՆ

Ուսումնասիրված է մածուցիկության ազդեցությունը պտտվող մագնիսական դաշտի մեթոդով հեղուկ մետաղների և կիսահաղորդիչների էլեկտրահաղորդականության որոշման ճշտության վրա: Ցույց է տրված, որ համաձուլվածքի փոքր մածուցիկության դեպքում չափման սխալը կարող է հասնել զգալի մեծության:

LIQUID CYLINDRICAL CONDUCTOR IN ROTATING MAGNETIC FIELD

T. S. ZOLYAN

The influence of viscosity on the accuracy of determination of the conductivity of liquid metals and semiconductors is considered by means of the method of rotating field. In the case of small values of liquids viscosity the inaccuracy of the measurement is shown to be considerable.