

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В ВОЛНОВОДЕ С НЕСТАЦИОНАРНЫМ И НЕОДНОРОДНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

К. А. БАРСУКОВ, Э. А. ГЕВОРКЯН

Теоретически исследуется излучение заряженной частицы, равномерно движущейся в регулярном идеальном волноводе. Предполагается, что волновод заполнен диэлектриком с постоянной, меняющейся по закону бегущей волны. Подобная модуляция среды может быть создана либо мощной лазерной, либо ультразвуковой волной. В приближении слабой модуляции среды находятся поле и спектр излучения, а также потери энергии движущейся частицы.

Возможность применения излучения движущихся частиц в неоднородных и нестационарных средах для целей детектирования ультрарелятивистских частиц и генерации излучения сверхкоротких волн в СВЧ довольно широко обсуждалась в литературе (см., напр., [1—3] и указанную там литературу). С этой точки зрения представляют интерес задачи об излучении движущихся частиц в волноводах и резонаторах с неоднородным и нестационарным заполнением. Создание подобных систем может быть осуществлено путем модуляции среды мощным лазерным излучением или ультразвуковой волной достаточно простыми экспериментальными средствами.

Ниже исследуется излучение заряженной частицы, движущейся с постоянной скоростью вдоль оси регулярного идеального волновода, причем диэлектрическая постоянная заполнения волновода меняется в пространстве и во времени по закону бегущей волны.

Пусть образующая идеального волновода с произвольным поперечным сечением совпадает с осью OZ некоторой декартовой системы координат. Волновод заполнен диэлектриком с магнитной постоянной $\mu=1$ и диэлектрической постоянной, меняющейся в пространстве и во времени по гармоническому закону

$$\epsilon = \epsilon_0 [1 + m \cos k_0 (z - ut)],$$

где m — индекс модуляции, k_0 и u — соответственно волновое число и фазовая скорость волны модуляции. Частица с зарядом q движется в положительном направлении OZ .

Нетрудно показать, что при своем движении частица создает поляризацию среды, описываемую вектором $P(0, 0, P_z)$, причем

$$P_z = \frac{iq \operatorname{sgn}(u - v)}{2\pi} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma(\tau - \tau_0)} \frac{d\tau}{\gamma},$$

где

$$\gamma_0 = \frac{v\xi}{u(v - u)} - \frac{1}{ub_0} \int_0^{\xi} \frac{d\xi'}{1 - l \cos k_0 \xi'},$$

$$l = \frac{m\beta^2}{b}, \quad b = 1 - \beta^2, \quad \beta = \frac{u}{c} \sqrt{\varepsilon_0},$$

(x_0, y_0) — точка пересечения движущейся частицы с плоскостью поперечного сечения волновода, а новые переменные ξ и η связаны с z и t выражениями

$$\xi = z - ut, \quad \eta = \frac{z}{u} - \frac{1}{ub} \int_0^\xi \frac{d\xi'}{1 - l \cos k_0 \xi'}.$$

Электромагнитное поле движущейся частицы будем описывать с помощью вектора Герца [4] $\Pi(0, 0, \Pi)$ с единственной отличной от нуля компонентой. Векторы поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ при этом выражаются через Π с помощью формул (2) работы [4], а сама функция Π удовлетворяет следующему неоднородному уравнению второго порядка с частными производными [4]:

$$\Delta_2 \Pi + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \beta^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \right] - \frac{\varepsilon}{c^2 \left(1 - \beta^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta^2} = -4\pi P_z, \quad (1)$$

где

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Ниже мы ограничимся случаем малых значений индекса модуляции m , так как во всех реальных экспериментах m оказывается порядка 10^{-4} [5]. Если же волна модуляции движется достаточно медленно (что реализуется уже при $u \leq 0,8 v_\phi$, где $v_\phi = c/\sqrt{\varepsilon_0}$ — фазовая скорость света в невозмущенной среде), то одновременно с m оказывается малым и параметр l .

Для решения (1) положим

$$\Pi = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x, y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta\gamma} Q_n(\xi, \gamma) \frac{d\gamma}{\gamma}, \quad (2)$$

где $\Psi_n(x, y)$ — ортонормированные собственные функции поперечного сечения волновода для первой краевой задачи. Тогда, подставляя это выражение в (1) и раскладывая правую часть (1) по собственным функциям поперечного сечения волновода, получим

$$\varepsilon \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \beta^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) \frac{dQ_n(\xi, \gamma)}{d\xi} \right] + \frac{\chi_n^2}{1 - \beta^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} Q_n(\xi, \gamma) = -4\pi f_n(\xi, \gamma), \quad (3)$$

где

$$f_n(\xi, \gamma) = \frac{iq \operatorname{sgn}(u - v)}{2\pi} e^{-i\eta\gamma_0} \Psi_n(x_0, y_0),$$

$$\chi_n^2 = \frac{\gamma^2}{c^2} \varepsilon - \gamma_n^2 \left(1 - \beta^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right),$$

λ_n — собственные значения первой краевой задачи для поперечного сечения волновода.

Уравнение (3) с помощью новой функции $Q_n = V^{-1} \tilde{Q}_n$ и заменой переменной $s = \frac{k_0 \sqrt{1-l^2}}{2} \int_0^z \frac{dz'}{1-l \cos k_0 z'}$ сводится к неоднородному уравнению Хилла [6]. Решение последнего будем находить обычным методом вариации постоянной. Фундаментальную систему решений однородного уравнения заимствуем из [6]

$$Q_{1n} = V^{-1} e^{-i\mu_n s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^n e^{-2iks}, \quad (4)$$

$$Q_{2n} = V^{-1} e^{i\mu_n s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^n e^{2iks},$$

где характеристические показатели μ_n и коэффициенты $a_{\pm 1}^n$ с точностью до членов второго порядка по m имеют вид

$$\begin{aligned} \mu_n^2 &= \Theta_0^n, \quad a_{\pm 1}^n = \frac{\Theta_1^n a_0^n}{4(1 \pm \mu_n)}, \\ \Theta_0^n &= \frac{4(z_0^n)^2}{k_0^2 b^2}, \quad \Theta_1^n = \frac{2}{k_0^2 b^2} \left[\frac{\gamma^2}{u^2} - (z_0^n)^2 \right] l - m, \\ (z_0^n)^2 &= \frac{\gamma^2}{c^2} \varepsilon_0 - \mu_n^2 b, \end{aligned} \quad (5)$$

причем формулы (5) справедливы, когда Θ_0^n не очень близки к единице, т. е. при условии

$$|1 - \Theta_0^n| \gg \frac{(\Theta_1^n)^2}{2}. \quad (6)$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} Q_n(\xi, \gamma) &= \frac{4\pi}{ibk_0(a_0^n)^2 \mu_n} \left\{ Q_{1n}(\xi, \gamma) \int_{-\infty}^{\xi} f_n(\xi', \gamma) Q_{2n}(\xi', \gamma) \frac{d\xi'}{\varepsilon} + \right. \\ &\quad \left. + Q_{2n}(\xi, \gamma) \int_{\xi}^{\infty} f_n(\xi', \gamma) Q_{1n}(\xi', \gamma) \frac{d\xi'}{\varepsilon} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Если теперь использовать (4) и известное представление

$$e^{\pm i \Delta_n^{\pm} \sin k_0 \xi} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_{\nu}(\Delta_n^{\pm}) e^{\pm i \nu k_0 \xi},$$

то после интегрирования в (7) по переменной ξ' из (2) получим

$$\Pi = -2\pi i q b \operatorname{sgn}(u-v) \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x_0, y_0) \Psi_n(x, y) \times \\ \times \sum_{\nu=-1}^1 \int_{-\infty}^{\infty} G_{n\nu}(\alpha_0^n)^{-1} \exp[i\{(K + \nu k_0)z - (\Omega + \nu k_0 u)t\}] \frac{d\gamma}{\gamma}, \quad (8)$$

где

$$G_{n\nu} = \bar{G}_{n\nu}^+ + \bar{G}_{n\nu}^- + \bar{G}_{n\nu}^+ + \bar{G}_{n\nu}^-, \\ \bar{G}_{n\nu}^{\pm} = \frac{J_0(\Delta_n^{\pm}) [J_{\mp\nu}(\Delta_n^{\pm}) + |\nu| \bar{\delta}_n J_{|\nu|-1}(\Delta_n^{\pm})]}{\alpha_0^n \pm \alpha}, \\ \bar{G}_{n\nu}^{\pm} = |\nu| \frac{J_{|\nu|-1}(\Delta_n^{\pm}) [J_{\pm\nu}(\Delta_n^{\pm}) + \bar{\delta}_n J_{|\nu|-1}(\Delta_n^{\pm})]}{\alpha_0^n \pm \alpha}, \\ \bar{\delta}_n = \frac{[\gamma^2 - u^2(\alpha_0^n)^2] b}{2u^2 [k_0^2 b^2 - 4(\alpha_0^n)^2]} l - \frac{1}{4} \left[1 + \frac{k_0^2 b^2}{k_0^2 b^2 - 4(\alpha_0^n)^2} \right] m, \\ \bar{\delta}_n = \frac{[\gamma^2 - u^2(\alpha_0^n)^2] b}{2u^2 [k_0^2 b^2 - 4(\alpha_0^n)^2]} l + \frac{1}{4} \left[1 - \frac{k_0^2 b^2}{k_0^2 b^2 - 4(\alpha_0^n)^2} \right] m, \\ \Delta_n^{\pm} = \frac{(u\alpha_0^n \pm \gamma) [uk_0^2 b^2 - 2\alpha_0^n (u\alpha_0^n \pm \gamma)]}{k_0 b u^2 [k_0^2 b^2 - 4(\alpha_0^n)^2]} l + \frac{k_0 b \alpha_0^n}{k_0^2 b^2 - 4(\alpha_0^n)^2} m, \\ \alpha = \frac{\gamma}{u} - \frac{v\gamma b}{u(v-u)}, \quad \alpha_{\nu} = \alpha + \nu k_0 b, \\ K = \frac{\gamma}{u-v}, \quad \Omega = Kv.$$

Формула (8) определяет поле движущейся заряженной частицы в волноводе с нестационарным и неоднородным заполнением.

Полные потери энергии заряженной частицы на единице длины можно найти по величине тормозящей силы qE_z , действующей на частицу со стороны создаваемого ею поля. Последние оказываются периодически зависящими от времени с периодом $\frac{2\pi}{k_0(v-u)}$. Нетрудно видеть, что это есть время прохождения источником одного периода модуляции среды. Поэтому при вычислении потерь проведем усреднение по времени на указанном периоде. В итоге получим

$$\frac{d\bar{W}}{dz} = \frac{2\pi q^2 \operatorname{sgn}(u-v)}{i\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 \Psi_n^2(x_0, y_0) \times \\ \times \sum_{\nu=-1}^1 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{[J_{\nu}(\Delta_n^+) + |\nu| \bar{\delta}_n J_{|\nu|-1}(\Delta_n^+)]^2}{\alpha_0^n + \alpha_{\nu}} + \frac{[J_{-\nu}(\Delta_n^-) + |\nu| \bar{\delta}_n J_{|\nu|-1}(\Delta_n^-)]^2}{\alpha_0^n - \alpha_{\nu}} \right\} \times \\ \times \frac{b d\gamma}{\alpha_0^n \gamma}. \quad (9)$$

Таким образом, усредненные полные потери энергии частицы на единице длины пути при ее движении в волноводе с нестационарным и неоднородным заполнением с точностью до второго порядка m включительно описываются выражением (9). Член при $v=0$ дает потери на черенковское излучение, если, конечно, выполняется соответствующее условие $\left(\frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_0} > 1\right)$ для его возникновения. Так как в области (6) $\tilde{\delta}_n$ и $\Delta_n^\pm$ пропорциональны первой степени m , то, как следует из (9), усредненные нечеренковские потери пропорциональны квадрату индекса модуляции заполнения.

Для получения представления о порядке величины энергии излучения в формуле (9) рассмотрим следующий пример. Пусть волновод круглый с радиусом 1 см, $\varepsilon_0=10$, среда модулируется ультразвуком и $u=4 \cdot 10^3$ м/сек, $k_0=10^3$ м⁻¹. Тогда для релятивистской частицы заряда q на первой гармонике ($\omega=6 \cdot 10^{10}$ сек⁻¹) на волне E_{01} в интервале частот $\frac{\Delta\omega}{\omega} = 10^{-1}$ излучается мощность порядка $(qm)^2$ вт.

Условие равенства нулю знаменателей подынтегральных выражений (9) дает дисперсионное уравнение вида

$$1 + \left[\frac{\gamma - k_0 v (v - u)}{v - u} \right]^2 = \frac{\varepsilon_0}{c^2} \left[\frac{v^2 - (v - u) \sqrt{k_0 u}}{v - u} \right]^2. \quad (10)$$

Если ввести угол φ между волновым вектором частоты $\omega = \frac{v^2 - (v - u) \sqrt{k_0 u}}{v - u}$ и скоростью частицы, то из (10) получим уравнение*

$$\omega = \frac{\sqrt{k_0} (v - u)}{1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \cos \varphi},$$

определяющее спектр излучения движущейся частицы в волноводе с нестационарным и неоднородным заполнением. При $\frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_0} > 1$ характер излучения оказывается подобным излучению при аномальном эффекте Допплера [1]. В нулевом приближении ($v=0$) и при $u=0$ (9) переходит в уже известную формулу черенковских потерь частицы в волноводе, который заполнен средой с постоянной ε_0 [7].

При интегрировании в (9) в комплексной области γ нужно иметь в виду, что оно сводится к сумме вычетов в простых полюсах, определяемых из решения уравнения (10) и имеющих вид

$$\gamma_{1,2} = u (\bar{\beta})^2 [\sqrt{k_0} \bar{\beta} (1 - \beta^2) \mp \sqrt{v^2 k_0^2 \beta^2 + \gamma_n^2 (\bar{\beta})^{-2}}],$$

где

$$\bar{\beta} = \frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{1}{1 - \beta_0}, \quad \beta_0 = \frac{u}{v}, \quad \bar{\beta} = \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{\beta^2 - (\bar{\beta})^2 (1 - \beta^2)^2}}.$$

* Подобный спектр впервые получен о работе [1] для случая неограниченного пространства.

Выражение для потерь энергии частицы упрощается в приближении геометрической оптики, т. е. при выполнении условия

$$\theta_0^n \gg 1 \left(\theta_1^n \approx \frac{m}{2} \theta_0^n \right). \quad (11)$$

В этом случае из (4) в первом приближении по m легко получить следующие выражения для Q_{1n} и Q_{2n} :

$$Q_{1, 2n} \approx \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{1 + 2\theta_1^n (\theta_0^n)^{-1} \cos 2s}} \exp \left[\pm i \int_0^s [(\theta_0^n)^{1/2} + \theta_1^n (\theta_0^n)^{-1/2} \cos 2s'] ds' \right],$$

где несущественным предэкспоненциальным множителем можно пренебречь. При этом полные потери энергии движущейся частицы, усредненные по относительному периоду $\frac{2\pi v}{(v-u)k_0}$, будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} &= \frac{2\pi q^2 \operatorname{sgn}(u-v)}{i\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} j_n^2 \Psi_n^2(x_0, y_0) \times \\ &\times \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_1^2 \left[\frac{j_\nu^2(\Delta_n^+)}{x_0^n + \alpha_\nu} + \frac{j_\nu^2(\Delta_n^-)}{x_0^n - \alpha_\nu} \right] \frac{b}{x_0^n \gamma} d\gamma, \end{aligned}$$

где

$$\Delta_n^\pm = \frac{(ux_0^n \pm \gamma)^2}{2u^2 k_0 x_0^n b} l$$

и интеграл распространяется на ту область частот Γ , где выполняется условие геометрической оптики [11].

Аналогично можно провести расчеты полей и потерь энергии частицы в любом приближении по малому параметру индекса модуляции m . Отметим, что случаи стационарной периодически неоднородной среды или однородной среды, диэлектрическая проницаемость которой гармонически зависит от времени, получаются из наших результатов с помощью предельного перехода $u \rightarrow 0$, либо $k_0 = 0$ и $k_0 u = \Omega$, где Ω — частота изменения диэлектрической проницаемости.

Ленинградский электротехнический институт
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила 30.VI.1975

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Барсуков, Б. М. Болотовский, Изв. вузов, Радиофизика, 7, 291 (1964).
2. Charles Elachi, J. Appl. Phys., 43, 3719 (1972).
3. В. Л. Гинзбург, В. Н. Цытович, ЖЭТФ, 65, 132 (1973).
4. К. А. Барсуков, Радиотехника и электроника, 7, 1173 (1964).
5. E. S. Cashedy, A. A. Oliner, Proc. IEEE, 51, 1342 (1963).
6. К. А. Барсуков, Э. А. Геворкян, Н. А. Звонников, Радиотехника и электроника, 20, 908 (1975).
7. Л. Г. Нарышкина, К. А. Барсуков, ЖТФ, 33, 444 (1963).

ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԵՎ ՈՉ ՄՏԱՑԻՈՆԱՐ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՎ ԼՑՎԱԾ
ԱԼԻԲԱՏԱՐՈՒՄ ՇԱՐԺԱՎՈՂ ԼԻՑԲԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿԻ
ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Կ. Ա. ԲԱՐՍՈՒԿՈՎ, Է. Ա. ԳԵՎՈՐԿՅԱՆ

Տեսականորեն ուսումնասիրվում է իդեալական ռեզոլյար ակթատարում հավասարաչափ շարժող լիցքավորված մասնիկի ճառագայթումը: Ենթադրվում է, որ ակթատարը լցված է դիէլեկտրիկ միջավայրով, որի թափանցելիությունը փոփոխվում է վաղող ակթի օրենքով: Միջավայրի նման մոդուլացում կարելի է ստեղծել կամ հզոր լազերային, կամ ուլտրաձայնային ակթների միջոցով: Միջավայրի թույլ մոդուլացիայի մոտավորությամբ որոշված են մասնիկի ճառագայթման դաշտերը, սպեկտրը և էներգիայի լրիվ կորուստները:

ON THE RADIATION OF CHARGED PARTICLE MOVING
ALONG WAVEGUIDE LOADED WITH NON-STATIONARY
NONUNIFORM MEDIUM

K. A. BARSUKOV, E. A. GEVORKYAN

The theory of the radiation of a charged particle moving in a lossless, regular dielectric loaded waveguide is considered. The loading is taken to be modulated by a strong laser or ultrasonic wave. The fields and total energy losses of such a particle are found in the approximation of a small modulation index.