

УДК 624.131+624.04

Г. В. ТЕР-ПЕТРОСЯН

ОБ ИЗМЕНЕНИИ ПОЛОЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ  
ГРУНТА ПРИ МЕСТНОМ НАГРУЖЕНИИ

При расчете оснований сооружений особое значение имеет определение осадки фундаментов. Для решения этой задачи, при разных характерных размерах фундамента в плане, выбираются разные значения глубины упругой зоны. Применяемые в обычной строительной практике небольшие нагрузки на фундамент позволяют принять, что напряжения в основании находятся в пределах линейного участка компрессионной кривой. Поэтому в СНиП использована модель упругого слоя и расчет рекомендуется основывать на теории упругости. Экспериментальные исследования показали, что при постоянной удельной нагрузке, для разных размеров фундамента зависимость осадки от размера фундамента существенно нелинейная.

При фиксированной удельной нагрузке с уменьшением или увеличением размеров фундамента сравнительно с некоторым критическим значением, соответствующим минимальной величине осадки, последняя увеличивается. Теоретические исследования методами теории упругости показывают, что эта связь линейная. Для устранения этого существенного различия с экспериментальными исследованиями можно допустить, что начиная с некоторой глубины под упругим слоем расположена область «затвердевшего материала» [1].

Упругая и затвердевшая части грунтовой среды, образовавшиеся под действием только собственного веса, разделяются горизонтальной плоскостью. После приложения внешних воздействий эта плоскость превращается в поверхность.

В настоящей статье на основе метода С. С. Григоряна решена задача определения положения границы упругой области грунта в зависимости от собственного веса и от величины внешней нагрузки. Получены также поля напряжений и смещений в упругой области.

Рассматривается задача для полупространства, заполненного грунтом, на некотором участке поверхности которого заданы нагрузки.

Напряжения, возникающие в полупространстве от собственного веса, определяются формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \cdot \gamma (h_* - z), & \sigma_{zz} &= -\gamma (h_* - z) \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Принимается, что при  $\sigma < \sigma_*$  среда описывается соотношениями линейной упругой модели, а при превышении напряжений  $\sigma_*$  среда является жесткой, характеризующейся бесконечными модулями объемной деформации и сдвига. Здесь  $\bar{\sigma}$  — среднее значение напряжений в данной точке, а  $\sigma_*'$  — критическое значение среднего давления, после достижения которого деформация не растет.

Глубина поверхности затвердевания от собственного веса определяется по формуле:

$$h_* = 3 \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{\sigma_*'}{\gamma} \quad (2)$$

Здесь  $\gamma$  — объемный вес грунта,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Основным интерес представляют дополнительные поля напряжений и смещений, возникающие в среде при внешних воздействиях. Общий подход для решений такого рода задач изложен в работе [1].

Трудность решения задачи для таких сред заключается в том, что несмотря на линейность задачи в упругой области, положение поверхности раздела этих областей заранее неизвестно и должно определяться в ходе решения задачи. Решение задачи можно строить шагами по увеличению интенсивности внешнего воздействия. Пусть внешнее воздействие получает малое приращение  $\delta q$ . Это приведет к малому изменению границы раздела  $\Gamma$  и малым изменениям полей в упругой области ( $\delta\sigma$ ,  $\delta u$ ,  $\delta w$ ). Если получим решение задачи для каждого малого изменения внешнего воздействия, то путем выполнения необходимого количества малых шагов можно получить и решение задачи при любых воздействиях  $q = \Sigma \delta q_i$ .

Изменение границы после приложения малого  $\delta q$  определяется по формуле:

$$\delta z = - \frac{(\delta\sigma)_{\Gamma}}{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)_{\Gamma}} \quad (3)$$

где  $\delta\sigma$  — приращение  $\sigma$  в упругой области, вызванное дополнительной нагрузкой  $\delta q_i$ . Таким образом, получается задача теории упругости для упругого слоя с заданными на поверхности  $z = h_*$  соответствующими граничными условиями и граничными условиями на поверхности  $\Gamma$ , выражающими равенство нулю смещений на  $\Gamma$ .

Решая задачу теории упругости (т. е. определяя поля напряжений и смещений) и используя (3), определяем возмущение границы  $\Gamma$ . Далее, задаваясь следующей ступенью изменения величины и повторяя вышеописанное, можно прийти к решению задачи для заданной нагрузки  $q$ .

Решение задачи теории упругости для упругого слоя при заданном  $\delta q$  производится с применением экстремального принципа теории упругости, согласно которому действительные приращения перемещений реализуют минимум энергии приращений [2].

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_D (\delta\sigma_{xx} \cdot \delta\zeta_{xx} + 2\delta\sigma_{xz} \cdot \delta\zeta_{xz} + \delta\sigma_{zz} \cdot \delta\zeta_{zz}) dx dz - \int_C \delta q \cdot \delta w dx, \quad (4)$$

где  $D$  — область упругого равновесия,  $C$  — часть границы, где задана интенсивность нагружения  $\delta q$ ;  $\delta\zeta_{xx}$ ,  $\delta\zeta_{xz}$ ,  $\delta\zeta_{zz}$  — приращение деформаций;  $\delta\sigma_{xx}$ ,  $\delta\sigma_{xz}$ ,  $\delta\sigma_{zz}$  — приращение напряжений.

Для удобства решения задачи введем безразмерные величины:

$$X = \frac{x}{h_*}, \quad Z = \frac{z}{h_*}, \quad U = \frac{u \cdot E}{h_* \cdot \sigma_*}, \quad W = \frac{wE}{h_* \sigma_*}, \quad \zeta_{xx} = \frac{E \cdot \zeta_{xx}}{\sigma_*},$$

$$\zeta_{xz} = \frac{E \cdot \zeta_{xz}}{\sigma_*}, \quad \zeta_{zz} = \frac{E \cdot \zeta_{zz}}{\sigma_*}, \quad \Sigma_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_*}, \quad (5)$$

$$\Sigma_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_*}, \quad \Sigma_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_*}, \quad \Sigma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_*}.$$

Обозначим приращения перемещений:

$$\delta U = \varphi, \quad \delta W = \psi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial X} = \varphi_X,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial Z} = \varphi_Z, \quad \frac{\partial \psi}{\partial X} = \psi_X, \quad \frac{\partial \psi}{\partial Z} = \psi_Z. \quad (6)$$

Тогда приращения деформаций, с учетом (5), запишутся в виде

$$\delta \zeta_{xx} = \varphi_X, \quad \delta \zeta_{zz} = \psi_Z, \quad \delta \zeta_{xz} = \frac{1}{2} (\varphi_Z + \psi_X), \quad (7)$$

а приращения напряжений выражаются через приращения деформаций следующими зависимостями:

$$\delta \Sigma_{xx} = a \varphi_X + b \psi_Z, \quad \delta \Sigma_{zz} = b \varphi_X + a \psi_Z$$

$$\delta \Sigma_{xz} = \frac{c}{2} (\varphi_Z + \psi_X); \quad (8)$$

где

$$a = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad b = \frac{\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad c = \frac{1}{1 + \nu}.$$

После подстановки (7) и (8) в (4) приходим к следующей вариационной задаче. Требуется найти функции  $\varphi$  и  $\psi$ , удовлетворяющие на границах условиям:

$$\varphi|_{\Gamma} = 0, \quad \psi|_{\Gamma} = 0$$

$$\delta \sigma_{zz} = \begin{cases} -\delta q & \text{при } Z = 1, \quad -a \leq X \leq a, \\ 0 & \text{при } Z = 1, \quad |X| > a, \end{cases}$$

и доставляющих минимум функционалу

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_D \left[ a (\varphi_X^2 + \psi_Z^2) + 2b \varphi_X \cdot \psi_Z + \frac{c}{2} (\varphi_Z + \psi_X)^2 \right] dX dZ - \int_C \psi \cdot \delta q \cdot dX. \quad (9)$$

Поставленную задачу можно решить только численно, с использованием ЭВМ. Для численного решения задачи применяется метод локальных вариаций [3]. Описание метода численного решения приведено при помощи графической схемы (рис. 1).

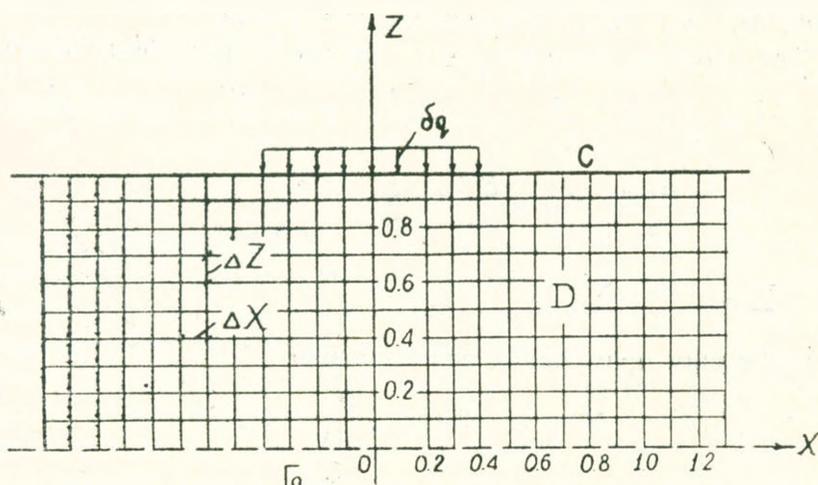


Рис. 1.

Разобьем область  $D$  на равные прямоугольные ячейки прямыми  $X_i = i\Delta X$ ,  $Z_j = j\Delta Z$ , где  $\Delta X$ ,  $\Delta Z$  достаточно малые числа. Функционал (9) приближенно заменим суммой

$$\mathcal{E} = \sum \mathcal{E}_{ij} + \sum K_{ij}. \quad (10)$$

Первая сумма в (10) аппроксимирует интеграл по области  $D$ , а вторая—интеграл по контуру  $C$ .  $\mathcal{E}_{ij}$ —интеграл по ячейке, целиком принадлежащей области  $D+C$ , который приближенно равен

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{\Delta X \Delta Z}{2} \left\{ a[(\varphi_X)_{ij}^2 + (\psi_Z)_{ij}^2] + 2b(\varphi_X)_{ij}(\psi_Z)_{ij} + \frac{c}{2} [(\varphi_Z)_{ij} + (\psi_X)_{ij}]^2 \right\}, \quad (11)$$

а слагаемые  $K_{ij}$  приближенно представляют интегралы по отрезкам, принадлежащим границе  $C$

$$K_{ij} = -\frac{1}{2} \Delta X [\psi_{ij}(\delta q)_{ij} + \psi_{i+1,j}(\delta q)_{i+1,j}]. \quad (12)$$

В (11) и (12) введены обозначения

$$(\varphi_X)_{ij} = \frac{\varphi_{i+1,j+1} + \varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j+1} - \varphi_{ij}}{2\Delta X},$$

$$(\varphi_Z)_{ij} = \frac{\varphi_{i+1,j+1} + \varphi_{i,j+1} - \varphi_{i+1,j} - \varphi_{ij}}{2\Delta Z},$$

$$(\psi_X)_{ij} = \frac{\psi_{i+1,j+1} + \psi_{i+1,j} - \psi_{i,j+1} - \psi_{ij}}{2\Delta X}.$$

$$(\psi_z)_{ij} = \frac{\psi_{i+1, j+1} + \psi_{i, j+1} - \psi_{i+1, j} - \psi_{ij}}{2 \Delta Z}$$

Решение задачи ведем по следующему алгоритму: зададим начальное приближение для функции  $\varphi_{ij}$ ,  $\psi_{ij}$ . Выбирая достаточно малые шаги варьирования, переходим к варьированию во всех внутренних и лежащих на  $S$  граничных точках. Процесс варьирования осуществляется поочередно для каждой из функций  $\varphi$  и  $\psi$ . После окончания одной итерации по  $\varphi$  и  $\psi$  получаем число проварьированных точек  $n_\varphi$  и  $n_\psi$ . Если  $n_\varphi + n_\psi = 0$ , то шаги варьирования уменьшаются и итерация продолжается. После уменьшения шагов варьирования в несколько раз, итерация прекращается. С целью сокращения числа операций (машинного времени) варьирование в данной точке производится в том направлении, которое привело к успешным результатам в предыдущей точке.

Для численного решения этой задачи составлена единая программа для ЭВМ, которая для различных значений интенсивности нагружения определяет границу затвердевания и вычисляет поля напряжений и смещений в упругой среде.

По описанному алгоритму проведены расчеты и получены возмущения границы  $\Gamma$ , поля напряжений и смещений при значениях  $\delta q_1 = 0,30$ ,  $\delta q_2 = 0,26$ ,  $a = 0,4$ .

В таблицах 1 и 2 и рис. 2 приведены полученные в результате расчетов безразмерные значения «перемещений» границы затвердевания.

Таблица 1

Значение «смещения»  $\Gamma$  при  $\delta q_1 = 0,30$ 

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
	0,1033	0,1032	0,0976	0,0886	0,0786	0,0692	0,0561	0,0471	0,0412	0,0277	0,0208	0,0143	0,0096	0,0076	0,0066

Таблица 2

Значение «смещения»  $\Gamma$  при  $\delta q_2 = 0,26$ 

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
	0,1096	0,1043	0,0931	0,0774	0,0665	0,0581	0,0542	0,0441	0,0372	0,0228	0,0189	0,0138	0,0091	0,0064	0,0036

Как показывают результаты расчетов, максимальное «смещение» получается на оси симметрии и при данном суммарном значении интенсивности составляет около 20% от начальной глубины. Возмущение

границы быстро затухает и на расстоянии 2,5  $a$  составляет приблизительно 1,2% от начальной глубины.

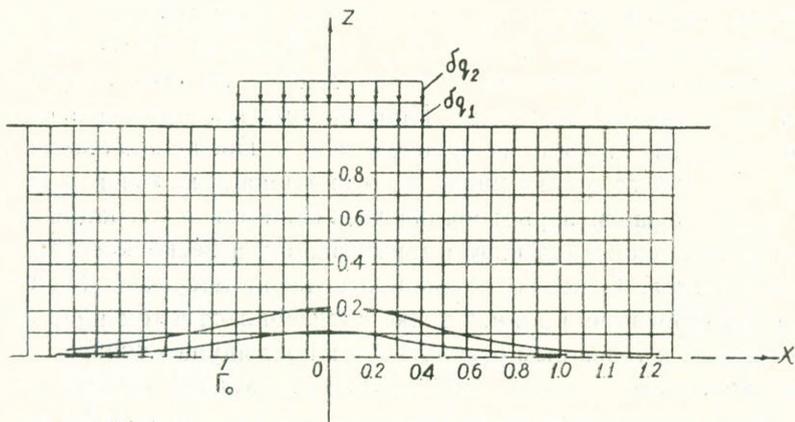


Рис. 2.

Результаты вычислений хорошо согласуются с имеющимся представлением о границе затвердевания.

Автор благодарит проф. С. С. Григоряна за внимание, оказанное при выполнении данной работы.

Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса

Поступила 8.VII.1975.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Григорян С. С. К вопросу применимости теории упругости в строительной механике грунтов. Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., 1972.
2. Лейбензон Л. С. Краткий курс теории упругости, М., 1942.
3. Черноуско Ф. Л. Метод локальных вариаций для решения вариационных задач. Ж. Вычисл. матем. и мат. физ., № 4, 1965.

