

ИНТЕРАССОЦИАТИВНОСТЬ С ПОМОЩЬЮ СВЕРХТОЖДЕСТВ

Ю. М. МОВСИСЯН, Г. КИРАКОСЯН

Ереванский государственный университет¹

Бергенский университет, Норвегия

E-mails: *movsisyan@ysu.am; grigor.kirakosyan@ysuail.am*

Аннотация. Мы расширяем понятие интерассоциативности с помощью сверхтождеств ассоциативности и описываем множество полугрупп $\{i, j\}$ -интерассоциативных к свободной и коммутативной свободной полугруппе, где $i, j = 1, 2, 3$.

MSC2010 number: 03C05, 03C85, 08A05, 08B20.

Ключевые слова: интерассоциативность; сверхтождество; полугруппа; свободная полугруппа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно [1, 2], что если в q -алгебре или e -алгебре выполняется нетривиальное сверхтождество ассоциативности, то оно может быть одного из следующих видов:

$$X(Y(x, y), z) = Y(x, X(y, z)), \quad (ass)_1$$

$$X(Y(x, y), z) = X(x, Y(y, z)), \quad (ass)_2$$

$$X(X(x, y), z) = Y(x, Y(y, z)) \quad (ass)_3,$$

(здесь X, Y – функциональные переменные, а x, y, z – предметные переменные).

Понятие интерассоциативности впервые ввел Зупник в работе [3]. В дальнейшем оно расширялось в работах [4 – 10]. В итоге получилось следующее определение для полугрупп.

Определение 1.1. Полугруппа $Q(\circ)$ называется интерассоциативной к полугруппе $Q(\cdot)$, если выполняются следующие тождества:

$$(1.1) \quad x \cdot (y \circ z) = (x \cdot y) \circ z,$$

$$(1.2) \quad x \circ (y \cdot z) = (x \circ y) \cdot z.$$

¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Комитета по науке Республики Армения, гранты 10-3/1-41, 18Т - 1А306.

Если еще выполняется тождество

$$x \circ (y \cdot z) = (x \cdot y) \circ z,$$

то полугруппа $Q(\circ)$ называется сильно интерассоциативной к полугруппе $Q(\cdot)$.

Здесь выполняется также следующее тождество:

$$x \cdot (y \circ z) = (x \cdot y) \circ z = x \circ (y \cdot z) = (x \circ y) \cdot z.$$

Дадим более общее определение.

Определение 1.2. Для заданных $i, j = 1, 2, 3$ полугруппу $Q(\circ)$ мы назовем $\{i, j\}$ -интерассоциативной к полугруппе $Q(\cdot)$, если в алгебре $Q(\circ, \cdot)$ с двумя бинарными операциями выполняются сверхтождества ассоциативности $(ass)_i$ и $(ass)_j$. Если $i = j$, то будем говорить просто о $\{i\}$ -интерассоциативности. Множество всех полугрупп $\{i, j\}$ -интерассоциативных к полугруппе $Q(\cdot)$ обозначим через $Int_{\{i, j\}}Q(\cdot)$; если $i = j$, то пишем просто: $Int_{\{i\}}Q(\cdot)$.

В данном выше определении, поставив $i = j = 1$ и $i = 1, j = 2$, получим понятия интерассоциативности и сильной интерассоциативности, соответственно.

Пусть X произвольное непустое множество. Свободную полугруппу и свободную коммутативную полугруппу над алфавитом X обозначим, соответственно, через $\mathcal{F}(X)(\cdot)$ и $\mathcal{FC}(X)(\cdot)$. Свободную полугруппу с единицей обозначим через $\mathcal{F}^1(X)(\cdot)$. Для полугруппы $Q(\cdot)$ и ее фиксированного элемента $x \in Q$ можно определить бинарную операцию

$$a *_x b = a \cdot x \cdot b, \quad \text{для любых } a, b \in Q.$$

В итоге получим полугруппу $Q(*_x)$, которая называется вариантом полугруппы $Q(\cdot)$ [1, 11].

Понятие варианта имеет тесную связь с понятием $\{i, j\}$ -интерассоциативности.

В работах Горбаткова [12, 13] доказаны следующие утверждения.

Теорема 1.1. Для $|X| \geq 4$ имеют место следующие равенства:

$$Int_{\{1\}}\mathcal{FC}(X)(\cdot) = Int_{\{1, 2\}}\mathcal{FC}(X)(\cdot) = \{\mathcal{FC}(X)(*_{\bar{x}}) \mid x \in \mathcal{FC}(X)\} \cup \{\mathcal{FC}(X)(\cdot)\}.$$

Теорема 1.2. Полугруппа $\mathcal{F}(X)(\circ)$ $\{1\}$ -интерассоциативна к $\mathcal{F}(X)(\cdot)$ тогда и только тогда, когда

$$u \circ w = u_{\ell}(u^{(1)} \circ w^{(0)})w_r, \quad \text{для всех } u, w \in \mathcal{F}(X),$$

где $u^{(1)}$ – последняя буква слова u , $w^{(0)}$ – первая буква слова w , а u_ℓ , w_r – слова, получающиеся из слов u , w сокращением букв $u^{(1)}$, $w^{(0)}$ соответственно.

В работе [14] рассмотрена $\{3\}$ -интерассоциативность, где получен следующий результат.

Теорема 1.3. *Если $Q(\circ) \in \text{Int}_{\{3\}}Q(\cdot)$ и выполняется следующее квазитожество:*

$$x \cdot x = y \cdot y \Rightarrow x = y,$$

то полугруппы $Q(\circ)$ и $Q(\cdot)$ совпадают.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе для произвольного множества X мы получаем описание множеств $\text{Int}_{\{2\}}\mathcal{F}(X)(\cdot)$, $\text{Int}_{\{1,2\}}\mathcal{F}(X)(\cdot)$, $\text{Int}_{\{3\}}\mathcal{F}(X)(\cdot)$, $\text{Int}_{\{3\}}\mathcal{FC}(X)(\cdot)$ и описание $\text{Int}_{\{2\}}\mathcal{FC}(X)(\cdot)$, когда $|X| \geq 4$.

Сперва докажем следующие леммы:

Лемма 2.1. *Пусть $Q(\circ) \in \text{Int}_{\{2\}}Q(\cdot)$. Допустим, что для некоторого $a \in Q$ отображение $\chi_a : Q \rightarrow Q$, $\chi_a(x) = ax$ инъективно. Тогда $Q(\circ) \in \text{Int}_{\{1\}}Q(\cdot)$.*

Доказательство. Имеем следующие тождества

$$(2.1) \quad (x \circ y)z = x(y \circ z),$$

$$(2.2) \quad (xy) \circ z = x \circ (yz).$$

Тогда из цепочки равенств

$$x((yz) \circ t) \stackrel{(2.1)}{=} (x \circ (yz))t \stackrel{(2.2)}{=} ((xy) \circ z)t \stackrel{(2.1)}{=} xy(z \circ t) = x(y(z \circ t))$$

и из условий леммы, получаем

$$(yz) \circ t = y(z \circ t),$$

т.е. тождество (1.1), из которого вместе с тождествами (2.1), (2.2) вытекает тождество (1.2), а тождества (1.1), (1.2) вместе с полугрупповыми тождествами ассоциативности дают сверхтождество $(ass)_1$. $\square$

Если в определении отображения χ_a каждый элемент умножить справа на a и требовать соответствующее условие, тогда доказательство соответствующей леммы можно провести аналогично.

Лемма 2.2. Если $Q(\circ) \in \text{Int}_{\{2\}}Q(\cdot)$, то в алгебре $Q(\circ, \cdot)$ имеет место тождество

$$(a \circ b)cd = ab(c \circ d).$$

Доказательство. Имеем

$$(a \circ b)cd \stackrel{(2.1)}{=} a(b \circ c)d \stackrel{(2.1)}{=} ab(c \circ d). \quad \square$$

Теорема 2.1. При $|X| \geq 3$ имеют место следующие равенства

$$\text{Int}_{\{2\}}\mathcal{F}(X)(\cdot) = \text{Int}_{\{1,2\}}\mathcal{F}(X)(\cdot) = \{\mathcal{F}(X)(\cdot)\}.$$

Доказательство. Первое равенство следует из Леммы 2.1. Возьмем $a, b \in X$, $a \neq b$ и используем Лемму 2.2. Из тождества

$$(2.3) \quad (a \circ b)ab = ab(a \circ b)$$

следует:

$$\begin{aligned} a \circ b &= ab\varphi(a, b), & \varphi : X \times X &\rightarrow \mathcal{F}^1(X), \\ a \circ b &= \psi(a, b)ab, & \psi : X \times X &\rightarrow \mathcal{F}^1(X). \end{aligned}$$

Подставляя последние равенства в (2.3), получаем

$$\varphi(a, b) = \psi(a, b), \quad a \neq b, \forall a, b \in X.$$

Выберем еще $c, d \in X$, $c \neq d$ и по лемме 2.2 имеем

$$\begin{aligned} (a \circ b)cd &= ab(c \circ d), \\ ab\varphi(a, b)cd &= ab\varphi(c, d)cd \Rightarrow \varphi(a, b) = \varphi(c, d), \end{aligned}$$

и φ постоянное отображение, если ее аргументы не совпадают. Пусть

$$\begin{aligned} \varphi(a, b) &= x \in \mathcal{F}^1(X) & a, b \in X, a \neq b, \\ a \circ b &= abx = xab. \end{aligned}$$

Пусть $a, b, c \in X$, $a \neq b$, $b \neq c$. Используя (2.1), получаем

$$(a \circ b)c = a(b \circ c) \Rightarrow abxc = abcx \Rightarrow xc = cx.$$

Индукцией по длине слова x , легко выводим $x = c^n$, $n \in \mathbb{N}$. Если $c = a$, тогда $x = a^m$, $m \in \mathbb{N}$, а если $c = d$, где $d \neq a$ и $d \neq b$, то получим $x = d^k$, $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $x = \emptyset$. Далее $x = \emptyset \Rightarrow a \circ b = ab$, где $a \neq b$.

Если $a \neq c$, то из (2.1) имеем:

$$(a \circ a)c = a(a \circ c) = aac \Rightarrow a \circ a = aa$$

и операции $\circ$ и $\cdot$ совпадают на множестве $X \times X$, но по теореме 1.2 они совпадают и на множестве $\mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X)$. $\square$

Нетрудно заметить, что $\mathcal{FC}(X)(\cdot)$ также удовлетворяет условию Леммы 2.1 и с учетом теоремы 1.1 заключаем что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2. *При $|X| \geq 4$ имеют место следующие равенства:*

$$Int_{\{2\}}\mathcal{FC}(X)(\cdot) = \{\mathcal{FC}(X)(*_x) \mid x \in \mathcal{FC}(X)\} \cup \{\mathcal{FC}(X)(\cdot)\}.$$

В работе Горбаткова [13] описано множество $Int_{\{1\}}\mathcal{F}(X)$ в случае, когда $|X| = 2$. Используя этот метод, прямой проверкой убеждаемся, что теорема 2.1 верна и в случае, когда $|X| = 2$.

Теорема 2.3. *При $|X| = 2$ имеют место следующие равенства:*

$$Int_{\{2\}}\mathcal{F}(X)(\cdot) = Int_{\{1,2\}}\mathcal{F}(X)(\cdot) = \{\mathcal{F}(X)(\cdot)\}.$$

Теорема 2.4. *Пусть $|X| = 1$ и $X = \{a\}$. Тогда имеем $Int_{\{1\}}\mathcal{F}(X)(\cdot) = Int_{\{2\}}\mathcal{F}(X)(\cdot) = Int_{\{1,2\}}\mathcal{F}(X)(\cdot) = \{\mathcal{F}(X)(*_x) \mid x \in \mathcal{FC}(X)\} \cup \{\mathcal{F}(X)(\cdot)\} \cup \{\mathcal{F}(X)(\Delta)\}$, где $a^m \Delta a^n = a^{m+n-1}$, $m, n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Первое и второе равенства вытекают из Леммы 2.1 и из коммутативности операции. Предположим, что $\mathcal{F}(X)(\circ) \in Int_{\{1\}}\mathcal{F}(X)(\cdot)$. При $m, n > 1$ имеем $a^m \circ a^n = (a^{m-1}a) \circ a^n \stackrel{(1.1)}{=} a^{m-1}(a \circ a^n) = a^{m-1}(a \circ (aa^{n-1})) \stackrel{(1.2)}{=} a^{m-1}(a \circ a)a^{n-1}$. Если $m = 1$ или $n = 1$, то это равенство очевидно. Рассмотрим следующие случаи:

- (i) $a \circ a = a \Rightarrow a^m \circ a^n = a^{m+n-1} = a^m \Delta a^n$, т.е. получаем полугруппу $\mathcal{F}(X)(\Delta)$.
- (ii) $a \circ a = aa$. В этом случае операции $\circ$ и $\cdot$ совпадают.
- (iii) $a \circ a = a^k$, $k > 2$, тогда $a^m \circ a^n = a^m a^{k-2} a^n$.

Обозначим $a^{k-2} = x$ и заключаем, что полугруппы $\mathcal{F}(X)(\circ)$ и $\mathcal{F}(X)(*_x)$ совпадают. $\square$

В заключении заметим, что полугруппы $\mathcal{F}(X)(\cdot)$ и $\mathcal{FC}(X)(\cdot)$ удовлетворяют требованию теоремы 1.3 и, следовательно, верны следующие равенства:

$$Int_{\{3\}}\mathcal{F}(X)(\cdot) = \{\mathcal{F}(X)(\cdot)\}, \quad Int_{\{3\}}\mathcal{FC}(X)(\cdot) = \{\mathcal{FC}(X)(\cdot)\}.$$

Abstract. In this paper the concept of interassociativity via hyperidentities of associativity is extended and characterized the semigroups which are $\{i, j\}$ -interassociative to free semigroups and free commutative semigroups, where $i, j = 1, 2, 3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Yu. M. Movsisyan, Introduction to the Theory of Algebras With Hyperidentities, Yerevan State University Press, Yerevan (1986).
- [2] Yu. M. Movsisyan, Hyperidentities and Hypervarieties in Algebras, Yerevan State University Press, Yerevan (1990).
- [3] D. Zupnik, "On interassociativity and related questions", *Aequationes mathematicae*, **6**, 141 – 148 (1971).
- [4] M. Drouzy, La structuration des ensembles de semigroupes d'ordre 2, 3 et 4 par la relation d'interassociative, Manuscript (1986).
- [5] S. J. Boyd, M. Gould, "Interassociativity and isomorphism", *Pure Math. Appl.* **10**, no. 1, 23 – 30 (1999).
- [6] S. J. Boyd, M. Gould, A. W. Nelson, "Interassociativity of semigroups", *Proceedings of the Tennessee Topology Conference*, Nashville, TN, USA (1996). Singapore: World Scientific, 33 – 51 (1997).
- [7] B. N. Givens, K. Linton, A. Rosin, L. Dishman, "Interassociates of the free commutative semigroup on n generators", *Semigroup Forum* **74**, 370 – 378 (2007).
- [8] B. N. Givens, A. Rosin, K. Linton, "Interassociates of the bicyclic semigroup", *Semigroup Forum* **94**, 104 – 122 (2017).
- [9] M. Gould, K. A. Linton, A. W. Nelson, "Interassociates of monogenic semigroups", *Semigroup Forum* **68**, 186 – 201 (2004).
- [10] M. Gould, R. E. Richardson, "Translational hulls of polynomially related semigroups", *Czechoslovak Mathematical Journal*, **33**, no. 1, 95 – 100 (1983).
- [11] J. B. Hickey, "On variants of a semigroup", *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **34**: (03), 447 – 459 (1986).
- [12] A. B. Gorbatkov, "Interassociativity on a free commutative semigroup", *Siberian Mathematical Journal*, **54**: 3, 441 – 445 (2013).
- [13] A. B. Gorbatkov, "Interassociates of a free semigroup on two generators", *Matematychni Studii*, **41**: 2, 139 – 145 (2014).
- [14] E. Hewitt, H. S. Zuckerman, "Ternary operations and semigroups", In *Semigroups: Proceedings Symposium Wayne State Univ.*, ed. K. W. Folley, Academic Press, New York, 55 – 83 (1969).

Поступила 30 сентября 2018

После доработки 22 апреля 2019

Принята к публикации 25 апреля 2019