Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 3, 2013, стр. 25-42.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПО КОВАРИОГРАММЕ

А. ГАСПАРЯН, В. К. ОГАНЯН

Ереванский государственный университет, Армения
E-mails: *ara1987-87@mail.ru*; *victo@aua.am*[1]

Аннотация. В статье рассмотрена задача восстановления треугольников по распределению длины хорды в направлении. Мы получили следующие результаты: 1. Явные выражения для ковариограммы и зависящей от ориентации функции распределения длины хорды для любого треугольника; 2. Выражение функции распределения длины хорды для треугольника; 3. Максимальная хорда треугольника непрерывна на S^1 (S^1 пространство всех направлений плоскости); 4. Если зависящая от ориентации функция распределения длины хорды задана на всюду плотном подмножестве из S^1, то треугольник восстанавливается, с точностью до параллельных переносов и отражений; 5. Если A - конечное подмножество направлений из S^1, то всегда можно построить два различных треугольника, для которых значения зависящих от ориентации функций распределения длины хорды совпадают для всех $u \in A$.

MSC2010 number: 60D05; 52A22; 53C65

Ключевые слова: Ограниченная выпуклая область; ковариограмма; распределение длины хорды; распределение длины хорды в направлении.

Введение

Характеризует ли функция распределения длины хорды выпуклое множество на плосткости? Этот вопрос был поставлен В. Бляшке в [1]. Меллоу и Кларк в [2] построили пару неконгруэнтных выпуклых 12-ти угольников с одной и той же функцией распределения длины хорды. Одним из возможных направлений исследования этой проблемы является рассмотрение подклассов выпуклых множеств, для которых функция распределения длины хорды единственным образом восстанавливает выпуклое множество из этих подклассов. (см. [3], [4]).

В [5] Ж. Матерон сформулировал гипотезу, что ковариограмма выпуклого тела D определяет D в классе всех выпуклых тел, с точностью до параллельных

[1]Работа выполнена при частичной поддержке государственного комитета по науке Республики Армения, Грант 11-1А-125

переносов и отражений [5]. В. Нагель в [6] доказал, что плоский выпуклый многоугольник восстанавливается в классе всех плоских выпуклых многоугольников по ковариограмме (с точностью до параллельных переносов и отражений). В [7] доказано, что каждая плоская выпуклая область определяется в классе всех плоских выпуклых областей по ковариограмме, с точностью до параллельных переносов и отражений.

В настоящей работе получены следующие результаты:

1. Выражения ковариограммы и зависящей от направления функции распределения длины хорды для любого треугольника.
2. Выражение функции распределения длины хорды для произвольного треугольника.
3. Доказано, что длина максимальной хорды треугольника непрерывна по $u \in S^1$ (S^1 единичная окружность с центром в начале координат).
4. Если функция распределения длины хорды в направлении u для треугольника задана на всюду плотном подмножестве из S^1, то можно восстановить треугольник, с точностью до параллельных переносов и отражений.
5. . Если A - конечное подмножество направлений из S^1, то всегда можно построить два различных треугольника, для которых значения зависящей от ориентации функции распределения длины хорды совпадают для каждого $u \in A$.

1. Ковариограмма для треугольника

Пусть R^n - n-мерное евклидово пространство, $D \subset R^n$ - ограниченная выпуклая область с внутренними точками, S^{n-1} - $(n-1)$-мерная единичная сфера с центром в начале координат, а $V_n(\cdot)$ - n - мерная мера Лебега в R^n.

Определение 1.1. *([8]). Функция $C(D,\cdot) : R^n \to [0,\infty)$ равная*

(1.1) $$C(D,h) = V_n(D \cap (D-h)), \quad h \in R^n,$$

называется ковариограммой множества D.

Ковариограмма $C(D,h)$ инвариантна относительно параллельных переносов и отражений. Ж. Матерон (см. [5], [8]) доказал, что для $t > 0$ и $u \in S^{n-1}$

(1.2) $$\frac{\partial C(D,tu)}{\partial t} = -V_{n-1}(\{y \in u^{\perp} : V_1(D \cap (l_u + y) \geq t\}),$$

где $l_u + y$ есть прямая, параллельная направлению u и проходящая через точку y, причем через $u^{\perp}$ обозначается ортогональное дополнение к u. Правая часть (1.2) есть фукция x-лучей множества D в направлении параллельном u (см [9]) и является распределение длины хорды множества D в направлении u.

Обозначим через $b(D,u)$ ширину области D в направлении u. Случайная прямая, параллельная направлению u и пересекающая D имеет точку пересечения с прямой, параллельной направлению $u^{\perp}$ и проходящей через начало координат. Точка пересечения равномерно распределена в интервале $[0, b(D,u)]$. Обозначим $F(D,u,t)$ зависящую от ориентации функцию распределения длины хорды множества D в направлении $u \in S^1$.

Свойство 1.1. *Зависящая от ориентации функция распределения длины хорды множества D в направлении $u \in S^1$ определяется по формуле*

$$F(D,u,t) = 1 - \frac{b((D \cap (D - tu), u))}{b(D,u)}, \quad t \geq 0. \tag{1.3}$$

Связь между ковариограммой и зависящей от ориентации функции распределения длины хорды впервые обнаружил Ж. Матерон в [5].

Лемма 1.1. *Пусть $u \in S^1$ и $t > 0$ такое, что $D \cap (D - tu)$ содержит внутренние точки. Тогда $C(D,tu)$ дифференцируема по t и*

$$-\frac{\partial C(D,tu)}{\partial t} = (1 - F(D,u,t)) \cdot b(D,u). \tag{1.4}$$

В точке $t = 0$ существует правосторонняя производная левой части, и равество (1.4) остается в силе.

Очевидно, что

$$b(D,u) = -\left.\frac{\partial C(D,tu)}{\partial t}\right|_{t=0}. \tag{1.5}$$

Обозначим через G пространство всех прямых g в евклидовой плоскости R^2, и пусть (φ, p) - полярные координаты основания перпендикуляра, опущенного на прямую g из начала координат O.

Обозначим через $\mu(\cdot)$ локально-конечную меру в пространстве G, инвариантную относительно группы всех евклидовых движений (параллельных переносов и вращений). Известно, что элемент этой меры с точностью до постоянного множителя имеет вид ([1])

$$\mu(dg) = dg = dp\, d\varphi,$$

где dp - одномерная мера лебега, а $d\varphi$- равномерная мера на S^1.

Для ограниченной выпуклой области D, обозначим множество прямых, пересекающих D через

$$[D] = \{g \in G, \ g \cap D \neq \emptyset\}$$

Имеем (см [1]) $\mu([D]) = |\partial D|$, где ∂D - граница области D, а $|\partial D|$ обозначает длину ∂D.

Случайная прямая в $[D]$ есть прямая с распределением пропорциональным сужению меры μ на $[D]$. Функция

$$F_D(t) = \frac{\mu(\{g \in [D], \ |g \cap D| \leq t\})}{|\partial D|}, \qquad t \in R^1$$

называется функцией распределения длины хорды области D.

2. Ковариограмма треугольника и функция распределения длины хорды треугольника в направлении u

Пусть ABC - треугольник. Обозначим $|AB| = a$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, площадь ΔABC через S, а длину периметра через ∂D. Пусть AB лежит на луче с нулевым направлением, а направление против часовой стрелки берется в качестве положительного. Пусть $t_{\max}(u)$ хорда максимальной длины в направлении $u \in S^1$. Имеем

$$C(\Delta ABC, tu) = \begin{cases} S\left(1 - \frac{t}{t_{\max}(u)}\right)^2, & t \in [0, t_{\max}(u)] \\ 0, & t \geq t_{\max}(u) \end{cases} \tag{2.1}$$

$$F(\Delta ABC, u, t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{t}{t_{\max}(u)}, & t \in [0, t_{\max}(u)], \\ 1, & t \geq t_{\max}(u), \end{cases} \tag{2.2}$$

где

$$t_{\max}(u) = \begin{cases} \frac{a \sin \beta}{\sin(u+\beta)}, & u \in [0, \alpha], \\ \frac{a \sin\alpha \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta) \sin u}, & u \in [\alpha, \pi - \beta], \\ \frac{a \sin \alpha}{\sin(u-\alpha)}, & u \in [\pi - \beta, \pi], \\ -\frac{a \sin \beta}{\sin(u+\beta)}, & u \in [\pi, \pi + \alpha], \\ -\frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta) \sin u}, & u \in [\pi + \alpha, 2\pi - \beta], \\ -\frac{a \sin \alpha}{\sin(u-\alpha)}, & u \in [2\pi - \beta, 2\pi]. \end{cases} \tag{2.3}$$

Из (2.3) легко заметить, что $t_{\max}(u)$ непрерывна на S^1, следовательно, если мы имеем величины $t_{\max}(u)$ ΔABC на всюду плотном множестве в S^1, то можно единственным образом восстановить $t_{\max}(u)$ для любого $u \in S^1$. Кроме того, из (2.1) и (2.2) вытекает:

Следствие 2.1. *Если функция распределения длины хорды в направлении u или ковариограмма треугольника заданы на всюду плотном подмножестве из S^1, то можно восстановить треугольник, с точностью до параллельных переносов и отражений.*

Пример 2.1. Пусть $n \in N$ и $u_1, u_2, ..., u_n \in S^1$. Не нарушая общности, мы можем предположить, что $0 = u_0 \leq u_1 < u_2 < ... < u_n < \pi$. Пусть O - начало полярной системы координат, а луч с нулевым направлением лежит на полярной оси. Выберем $t_1, t_2 > 0$ так, чтобы прямая l, проходящая через точки $(t_1, u_1) = A_1$ и $(t_2, u_2) = A_2$, составлял с нулевым направлением угол больше u_n (обозначим этот угол через x, пусть $\pi/2 < x < \pi$). Обозначим через l_i прямую, проходящую через O и параллельную u_i ($i = 0$ или $i \geq 3$). Также для i обозначим через $A_i \equiv (t_i, u_i)$ точку пересечения l и l_i. Поскольку $u_n < x < \pi$, то можно выбрать направления u_{n+1} и u_{n+2} такие что $x > u_{n+2} > u_{n+1} > u_n$ и $u_{n+2} > u_{n+1} > \pi/2$. Рассмотрим ΔA_0OA_{n+1} и ΔA_0OA_{n+2}. Поскольку их тупые углы различны, они неконгруентны (см. Рис. 1). Также отметим, что из конструкции треугольников следует, что значения $t_{\max}(u)$ для треугольников A_0OA_{n+1} и A_0OA_{n+2} для $i = 1, 2, ..., n$ совпадают. Следовательно,

$$F(\Delta A_0OA_{n+1}, u_i, t) = F(\Delta A_0OA_{n+2}, u_i, t), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Следствие 2.2. *Если A - конечное подмножество направлений из S^1, то всегда можно построить два различных треугольника, для которых значения зависящих от ориентации функций распределения длины хорды совпадают для каждого $u \in A$.*

В [10] сформулирована следующая проблема: существует ли множество конечных направлений $A = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$, такое, что соответствующий набор значений $F(u_1, t), F(u_2, t), ..., F(u_m, t)$ зависящих от ориентации функций распределения длины хорды однозначно определяют ограниченную выпуклую область. Найти минимальное m, которое удовлетворяет этому условию. Пример 2.1 дает отрицательный ответ на эту проблему.

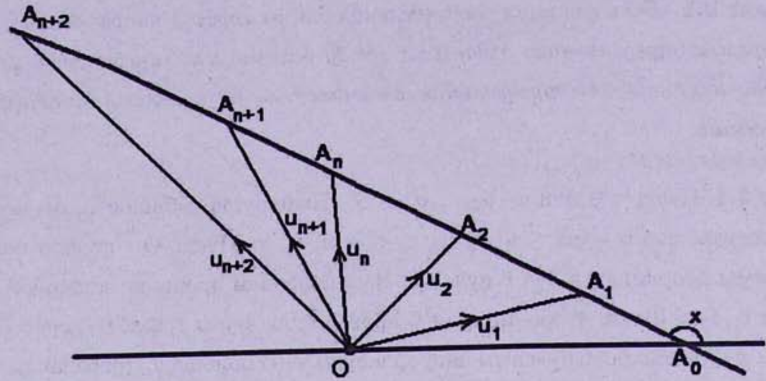

Рис. 1

3. Доказательства (2.1)-(2.3)

Вычислим ковариограмму треугольника ABC для направлений $u \in [0, \alpha]$. Если интерпретировать точки треугольника ABC векторами $-tu$, то в результате получим $\Delta A_{tu}B_{tu}C_{tu}$. Пусть $\Delta ABC \cap \Delta A_{tu}B_{tu}C_{tu}$ содержит внутренние точки. Поскольку $BC \| B_{tu}C_{tu}$, то треугольник $\Delta ABC \cap \Delta A_{tu}B_{tu}C_{tu}$ подобен ΔABC. A является одной из вершин этого треугольника, а остальные вершины на сторонах AB и AC обозначим соответственно D и E. Рассмотрим прямые, проходящие через точки D и E и параллельные направлению u. Пересечение этих прямых со стороной BC обозначим, соответственно, D_{tu} и E_{tu}. Легко заметить, что $DD_{tu} = EE_{tu} = t$. Значение ковариограммы в точке tu равно площади ΔADE:

$$C(\Delta ABC, tu) = S_{\Delta ADE} = k^2 S, \tag{3.1}$$

где $k = \frac{AD}{AB}$. (см. Рис. 2).

Легко заметить, что $AD = AB - DB = a - DB$. Можно найти DB из ΔDBD_{tu}. $\angle BDD_{tu} = u$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BD_{tu}D = \pi - (\beta + u)$. В ΔDBD_{tu} по теореме синусов получаем

$$DB = \frac{\sin(u+\beta)}{\sin\beta} DD_{tu} = \frac{\sin(u+\beta)}{\sin\beta} t. \tag{3.2}$$

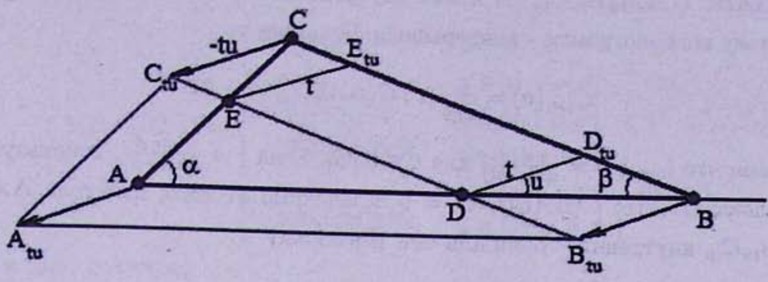

Рис. 2

Подставляя (3.2) в (3.1) для каждого $u \in [0, \alpha]$, получаем

$$C(\Delta ABC, tu) = \frac{(a\sin\beta - t\sin(u+\beta))^2 \sin\alpha}{2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}. \tag{3.3}$$

Вычислим ковариограмму треугольника ABC для направлений $u \in [\alpha, \pi-\beta]$. Легко заметить, что $C(D, tu) = C(D, t(\pi+u))$. Если $u \in [\alpha, \pi-\beta]$, то $\pi + u \in [\pi+\alpha, 2\pi-\beta]$. Направление $\pi+u$ образует угол с лучом CA, который обозначим через u'. Поскольку $\pi + u = \pi + \alpha + u'$, то $u' \in [0, \pi-\alpha-\beta]$. Этот случай был фактически рассмотрен, здесь AB, $\angle CAB$ и $\angle ABC$ заменяем на CA, $\angle BCA$ и $\angle CAB$ соответственно. Поскольку $u' = \alpha - u$ для $u \in [\alpha, \pi-\beta]$, то получаем

$$C(\Delta ABC, tu) = \frac{(a\sin\alpha\sin\beta - t\sin u\,\sin(\alpha+\beta))^2}{2\sin\alpha\sin\beta\,\sin(\alpha+\beta)}. \tag{3.4}$$

Вычислим ковариограмму треугольника ABC для направлений $u \in [\pi-\beta, \pi]$. Обозначим через u'' угол, образованный лучом BA и направлением u. Пусть $u = \pi - u''$. Следовательно $u'' \in [0, \beta]$. Этот случай уже был рассмотрен. Здесь AB, $\angle CAB$ и $\angle ABC$ заменены на AB, $\angle ABC$ и $\angle CAB$ соответственно. Следовательно, для $u \in [\pi-\beta, \pi]$ (так как $u'' = \pi - u$) получаем

$$C(\Delta ABC, tu) = \frac{(a\sin\alpha - t\sin(u-\alpha))^2 \sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}. \tag{3.5}$$

Для направлений $u \in [\pi, 2\pi]$ рассмотрим следующие три случая

$$u \in [\pi, \pi+\alpha], \quad u \in [\pi+\alpha, 2\pi-\beta] \quad \text{и} \quad u \in [2\pi-\beta, 2\pi].$$

Поскольку $C(\Delta ABC, t(\pi+u)) = C(\Delta ABC, tu)$, для каждого из этих трех случаев мы можем найти ковариограмму, заменяя в формулах (3.3) — (3.5) u на $u-\pi$.

Если $\Delta ABC \cap \Delta A_{tu}B_{tu}C_{tu}$ не имеет внутренних точек, то $C(\Delta ABC, tu) = 0$. Поскольку ковариограмма - непрерывная функция, то

$$t_{max}(u) = \min_{t\geq 0}\{t : C(\Delta ABC, tu) = 0\}.$$

Докажем, что $t_{\max}(u) = \frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}$ для $u \in [0,\alpha]$. Если $t = \frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}$, используя (2.5) легко доказать, что $C(\Delta ABC, tu) = 0$ независимо от того, имеет ли $\Delta ABC \cap \Delta A_{tu}B_{tu}C_{tu}$ внутренние точки или нет. Поскольку

$$t_{\max}(u) = \min_{t\geq 0}\{t : C(\Delta ABC, tu) = 0\},$$

то $t_{\max}(u) \leq \frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}$. С другой стороны, $t_{\max}(u) \geq \frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}$, так как в противном случае

$$\lim_{t\to t_{\max}(u)-} C(\Delta ABC, tu) \neq C(\Delta ABC, t_{\max}(u)u) = 0,$$

Что противоречит непрерывности ковариограммы.
Поскольку $t_{\max}(u) \leq \frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}$ и $t_{\max}(u) \geq \frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}$, то $t_{\max}(u) = \frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}$. Аналогичным образом получаем (2.3).
Таким образом, получаем
(3.6)

$$C(tu) = \begin{cases} \frac{(a\sin\beta - t\sin(u+\beta))^2 \sin\alpha}{2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[0,\alpha],\ t\in[0,\frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}] \\ \frac{(a\sin\alpha\sin\beta - t\sin u\ \sin(\alpha+\beta))^2}{2\sin\alpha\sin\beta\ \sin(\alpha+\beta)}, & u\in[\alpha,\pi-\beta],\ t\in[0,\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u}] \\ \frac{(a\sin\alpha - t\sin(u-\alpha))^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[\pi-\beta,\pi],\ t\in[0,\frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}] \\ \frac{(a\sin\beta + t\sin(u+\beta))^2\sin\alpha}{2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[\pi,\pi+\alpha],\ t\in[0,-\frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}] \\ \frac{(a\sin\alpha\sin\beta + t\sin u\ \sin(\alpha+\beta))^2}{2\sin\alpha\sin\beta\ \sin(\alpha+\beta)}, & u\in[\pi+\alpha,2\pi-\beta],\ t\in[0,-\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u}] \\ \frac{(a\sin\alpha + t\sin(u-\alpha))^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[2\pi-\beta,2\pi],\ t\in[0,-\frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}]. \end{cases}$$

(3.6) представляет явное выражение ковариограммы для треугольника. Здесь и ниже $C(\Delta ABC, tu) = C(tu)$.

Дифференцируя (3.6) получаем
(3.7)

$$\frac{\partial C(tu)}{\partial t} = \begin{cases} -\frac{(a\sin\beta - t\sin(u+\beta))\sin(u+\beta)\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[0,\alpha],\ t\in[0,\frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}] \\ -\frac{(a\sin\alpha\sin\beta - t\sin u\sin(\alpha+\beta))\sin u}{\sin\alpha\sin\beta}, & u\in[\alpha,\pi-\beta],\ t\in[0,\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u}] \\ -\frac{(a\sin\alpha - t\sin(u-\alpha))\sin(u-\alpha)\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[\pi-\beta,\pi],\ t\in[0,\frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}] \\ \frac{(a\sin\beta + t\sin(u+\beta))\sin(u+\beta)\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[\pi,\pi+\alpha],\ t\in[0,-\frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}] \\ \frac{(a\sin\alpha\sin\beta + t\sin u\sin(\alpha+\beta))\sin u}{\sin\alpha\sin\beta}, & u\in[\pi+\alpha,2\pi-\beta],\ t\in[0,-\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u}] \\ \frac{(a\sin\alpha + t\sin(u-\alpha))\sin(u-\alpha)\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[2\pi-\beta,2\pi],\ t\in[0,-\frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}]. \end{cases}$$

Согласно (1.5) и (3.7), получаем

$$b(\Delta ABC, u) = \begin{cases} \frac{a\sin\alpha\sin(u+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[0,\alpha] \\ a\sin u, & u\in[\alpha,\pi-\beta] \\ \frac{a\sin\beta\sin(u-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[\pi-\beta,\pi] \\ -\frac{a\sin\alpha\sin(u+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[\pi,\pi+\alpha] \\ -a\sin u, & u\in[\pi+\alpha,2\pi-\beta] \\ -\frac{a\sin\beta\sin(u-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}, & u\in[2\pi-\beta,2\pi]. \end{cases} \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) получаем

(3.9)

$$F(\Delta ABC, u, t) = \begin{cases} \frac{t}{a}\cdot\frac{\sin(u+\beta)}{\sin\beta}, & u\in[0,\alpha],\ t\in[0,\frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}] \\ \frac{t}{a}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\sin u, & u\in[\alpha,\pi-\beta],\ t\in[0,\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u}] \\ \frac{t}{a}\cdot\frac{\sin(u-\alpha)}{\sin\alpha}, & u\in[\pi-\beta,\pi],\ t\in[0,\frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}] \\ -\frac{t}{a}\cdot\frac{\sin(u+\beta)}{\sin\beta}, & u\in[\pi,\pi+\alpha],\ t\in[0,-\frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}] \\ -\frac{t}{a}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\sin u, & u\in[\pi+\alpha,2\pi-\beta],\ t\in[0,-\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u}] \\ -\frac{t}{a}\cdot\frac{\sin(u-\alpha)}{\sin\alpha}, & u\in[2\pi-\beta,2\pi],\ t\in[0,-\frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}]. \end{cases}$$

Подставляя (2.3) в (3.6) и (3.9) получаем (2.1) и (2.2).

4. Распределение длины хорды для треугольника

Пусть AB - максимальная сторона ΔABC, а $\angle CAB$ - минимальный угол ΔABC. Согласно обозначениям, $BC = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, $CA = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\angle BCA = \pi-(\alpha+\beta)$. Поскольку AB максимальная сторона, то $\angle BCA$ максимальный угол. Отсюда $\alpha\le\beta\le\pi-(\alpha+\beta)$.

Далее $\angle ABC + \angle BCA = \pi - \alpha$ и $\angle ABC \le \angle BCA$. Следовательно

$$\beta \le \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}. \tag{4.1}$$

Также можно доказать, что для любого треугольника выполняется следующее неравенство

$$\sin\alpha \le \sin\beta \le \sin(\alpha+\beta). \tag{4.2}$$

Так как sin - возрастающая функция на интервале $[0,\pi/2]$, то получаем неравенство (4.2) для тупоугольного треугольника ($\alpha+\beta\le\pi/2$).

Для остроугольного треугольника ($\alpha+\beta\ge\pi/2$) используем неравенство $\alpha\le\beta\le\pi-(\alpha+\beta)$

$$\beta\le\pi/2-\alpha/2 \leftrightarrow 2\beta\le\pi-\alpha \leftrightarrow \alpha+\beta\le\pi-\beta. \tag{4.3}$$

Так как sin - убывающая функция на интервале $[\pi/2, \pi]$, получаем неравенство (4.2).

Чтобы получить явное выражение функции распределения длины хорды для треугольника ABC, вычислим

$$\mu(t) := \mu(\{g \in [\Delta ABC],\ |g \cap \Delta ABC| < t\}), \quad t \in \mathbb{R} \tag{4.4}$$

интегрируя $b(\Delta ABC, u) \times F(\Delta ABC, u, t)$ на интервале $[0, \pi]$. Из (3.8) и (3.9) вытекает

$$F(\Delta ABC, u, t) \cdot b(\Delta ABC, u) =$$

$$= \begin{cases} \frac{t \sin\alpha \sin^2(u+\beta)}{\sin\beta \sin(\alpha+\beta)}, & u \in [0, \alpha],\ t \in [0, \frac{a \sin\beta}{\sin(u+\beta)}] \\ \frac{t \sin(\alpha+\beta) \sin^2 u}{\sin\alpha \sin\beta}, & u \in [\alpha, \pi-\beta],\ t \in [0, \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u}] \\ \frac{t \sin\beta \sin^2(u-\alpha)}{\sin\alpha \sin(\alpha+\beta)}, & u \in [\pi-\beta, \pi],\ t \in [0, \frac{a \sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}] \\ \frac{t \sin\alpha \sin^2(u+\beta)}{\sin\beta \sin(\alpha+\beta)}, & u \in [\pi, \pi+\alpha],\ t \in [0, -\frac{a \sin\beta}{\sin(u+\beta)}] \\ \frac{t \sin(\alpha+\beta) \sin^2 u}{\sin\alpha \sin\beta}, & u \in [\pi+\alpha, 2\pi-\beta],\ t \in [0, -\frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u}] \\ \frac{t \sin\beta \sin^2(u-\alpha)}{\sin\alpha \sin(\alpha+\beta)}, & u \in [2\pi-\beta, 2\pi],\ t \in [0, -\frac{a \sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}] \end{cases} \tag{4.5}$$

Значения $F(\Delta ABC, u, t) \cdot b(\Delta ABC, u)$ равны $b(\Delta ABC, u)$, при $t \geq t_{\max}(u)$ и равны 0, когда $t \leq 0$.

Вычислим $\min t_{\max}(u)$ и $\max t_{\max}(u)$ для направлений $u \in [0, \alpha]$, $u \in [\alpha, \pi-\beta]$ и $u \in [\pi-\beta, \pi]$.

Вначале рассмотрим тупоугольный треугольник. Поскольку $\alpha + \beta \leq \pi/2$, то $0 < \beta < \alpha + \beta \leq \pi/2$, и так как sin - возрастающая функция на интервале $[0, \pi/2]$, то

$$\min_{u\in[0,\alpha]} t_{\max}(u) = \frac{a \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{и} \quad \max_{u\in[0,\alpha]} t_{\max}(u) = a. \tag{4.6}$$

Если $u \in [\alpha, \pi-\beta]$, то $\pi/2 \in [\alpha, \pi-\beta]$ (так как $\alpha, \beta < \pi/2$), с другой стороны, из (4.2) получаем $\sin\alpha \leq \sin\beta$. Следовательно,

$$\min_{u\in[\alpha,\pi-\beta]} t_{\max}(u) = \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{и} \quad \max_{u\in[\alpha,\pi-\beta]} t_{\max}(u) = \frac{a \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}. \tag{4.7}$$

Если $u \in [\pi-\beta, \pi]$, то $u - \alpha \in [\pi-\beta-\alpha, \pi-\alpha]$. Поскольку $\alpha+\beta \leq \pi/2$, то sin убывает на интервале $[\pi-\beta-\alpha, \pi-\alpha]$, следовательно

$$\min_{u\in[\pi-\beta,\pi]} t_{\max}(u) = \frac{a \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{и} \quad \max_{u\in[\pi-\beta,\pi]} t_{\max}(u) = a \tag{4.8}$$

Рассмотрим остроугольный треугольник. Если $u \in [0,\alpha]$, то $u+\beta \in [\beta, \alpha+\beta]$. Так как $\alpha+\beta \geq \pi/2$, $\beta < \pi/2$, то $\pi/2 \in [\beta, \alpha+\beta]$, следовательно

(4.9)
$$\min_{u\in[0,\alpha]} t_{\max}(u) = a\sin\beta \quad \text{и} \quad \max_{u\in[0,\alpha]} t_{\max}(u) = a.$$

Если $u \in [\alpha, \pi-\beta]$, то $\pi/2 \in [\alpha, \pi-\beta]$, с другой стороны, из (4.2) получаем $\sin\alpha \leq \sin\beta$. Откуда следует, что

(4.10)
$$\min_{u\in[\alpha,\pi-\beta]} t_{\max}(u) = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{и} \quad \max_{u\in[\alpha,\pi-\beta]} t_{\max}(u) = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Если $u \in [\pi-\beta, \pi]$, то $u-\alpha \in [\pi-\beta-\alpha, \pi-\alpha]$, и так как $\alpha+\beta \geq \pi/2$ и $\alpha < \pi/2$, следовательно $\pi/2 \in [\pi-\beta-\alpha, \pi-\alpha]$. С другой стороны из (4.2) получаем $sin\alpha \leq sin(\alpha+\beta)$. Поэтому имеем

(4.11)
$$\min_{u\in[\pi-\beta,\pi]} t_{\max}(u) = a\sin\alpha \quad \text{и} \quad \max_{u\in[\pi-\beta,\pi]} t_{\max}(u) = a.$$

Заметим, что для любого треугольника выполняется следующее неравенство

(4.12)
$$\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \leq \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \leq \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \leq a.$$

(4.12) следует из (4.2) и $|\sin x| \leq 1$.

4.1. Случай тупоугольного треугольника. Получаем явное выражение (4.4) из (4.5) — (4.8) и (4.12) для $0 < t \leq \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

$$\mu(t) = \int_0^\pi b(\Delta ABC, u) \times F(\Delta ABC, u, t)\,du = \int_0^\alpha \frac{t\sin\alpha\sin^2(u+\beta)}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}du +$$

$$+\int_\alpha^{\pi-\beta} \frac{t\,\sin(\alpha+\beta)\sin^2 u}{\sin\alpha\sin\beta}du + \int_{\pi-\beta}^\pi \frac{t\sin\beta\sin^2(u-\alpha)}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}du = \frac{3t}{2} + \frac{\pi t}{2}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} +$$

(4.13)
$$+\frac{t}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}\left(\alpha(\sin^2\alpha - \sin^2(\alpha+\beta)) + \beta(\sin^2\beta - \sin^2(\alpha+\beta))\right).$$

Легко проверить, что

$$\alpha \leq \beta \leq \arcsin\frac{a\,\sin\alpha\,\sin\beta}{t\,\sin(\alpha+\beta)} < \frac{\pi}{2} \quad \text{для} \quad \frac{a\,\sin\alpha\,\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} < t \leq \frac{a\,\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Следовательно, множество $\{u : \frac{a\,\sin\alpha\,\sin\beta}{\sin u\,\sin(\alpha+\beta)} \leq t\} \cap [\alpha, \pi-\beta]$ совпадает с множеством направлений

(4.14)
$$\left[\arcsin\frac{a\,\sin\alpha\,\sin\beta}{t\,\sin(\alpha+\beta)}, \pi - \arcsin\frac{a\,\sin\alpha\,\sin\beta}{t\,\sin(\alpha+\beta)}\right].$$

Мы получаем явное выражение (4.4) из (4.5) — (4.8), (4.12) и (4.14) для $\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} < t \le \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

$$\mu(t) = \int_0^{\pi} b(\Delta ABC, u)\times F(\Delta ABC, u, t)\,du = \int_0^{\alpha} \frac{t\sin\alpha\sin^2(u+\beta)}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}du +$$

$$+\int_{\pi-\beta}^{\pi} \frac{t\sin\beta\sin^2(u-\alpha)}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}du + \int_{\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)}}^{\pi-\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)}} a\sin u\,du +$$

$$+\int_{\alpha}^{\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)}} \frac{t\sin(\alpha+\beta)\sin^2 u}{\sin\alpha\sin\beta}du + \int_{\pi-\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)}}^{\pi-\beta} \frac{t\sin(\alpha+\beta)\sin^2 u}{\sin\alpha\sin\beta}du =$$

$$= \frac{t\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)} + a\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{t^2\sin^2(\alpha+\beta)}} + \frac{3t}{2} + \tag{4.15}$$

$$+\frac{\alpha(\sin^2\alpha-\sin^2(\alpha+\beta))+\beta(\sin^2\beta-\sin^2(\alpha+\beta))}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}t.$$

Легко заметить, что $\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)} \in [\alpha,\beta)$ для $\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} < t \le \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Следовательно, множество $\{u : \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)} \le t\} \cap [\alpha, \pi-\beta]$ совпадает с множеством

$$[\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)}, \pi-\beta]. \tag{4.16}$$

Легко проверить, что $\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} \in [\arcsin\frac{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}, \alpha+\beta)$ для $\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} < t \le \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Следовательно, множество направлений $\{u : \frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)} \le t\} \cap [\pi-\beta,\pi]$ совпадает с множеством

$$\left[\pi-\beta, \pi+\alpha-\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t}\right]. \tag{4.17}$$

Мы получаем явное выражение (4.4) из (4.5) – (4.8), (4.12), (4.16) и (4.17) для $\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} < t \le \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

$$\mu(t) = \int_0^{\pi} b(\Delta ABC, u)\times F(\Delta ABC, u, t)\,du =$$

$$= \frac{t\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta}\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)} + \frac{t\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} +$$

$$+\frac{a\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\alpha}{t^2}} + \tag{4.18}$$

$$+\frac{a}{2}\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{t^2\sin^2(\alpha+\beta)}} + t + \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} + \frac{\alpha t}{2}\left(\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin^2(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}\right)$$

Более того, так как $\arcsin\frac{a\sin\beta}{t} \in [\beta, \alpha+\beta)$ для $\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} < t \le a$, то множество направлений $\{u : \frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)} \le t\} \cap [0,\alpha]$ совпадает с множеством

$$\left[\arcsin\frac{a\sin\beta}{t} - \beta, \alpha\right]. \tag{4.19}$$

Далее, $\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} \in [\alpha, \arcsin\frac{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta})$ для $\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} < t \le a$. Следовательно, множество $\{u : \frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)} \le t\} \cap [\pi-\beta, \pi]$ совпадает с множеством

$$\left[\pi-\beta, \pi+\alpha-\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t}\right]. \tag{4.20}$$

Мы имеем $F(\Delta ABC, u, t)\cdot b(\Delta ABC, u) = b(\Delta ABC, u)$ из (4.7) для $\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} < t \le a$ и для направлений $u \in [\alpha, \pi-\beta]$.

Мы получаем элементарное выражение (4.4) из (4.5) – (4.8), (4.12), (4.19) и (4.20) для $\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} < t \le a$

$$\mu(t) = \int_0^\pi b(\Delta ABC, u)\times F(\Delta ABC, u, t)\,du = \frac{t\sin\alpha}{2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}\arcsin\frac{a\sin\beta}{t} +$$

$$+\frac{t\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} + \frac{a\sin\alpha}{2\sin(\alpha+\beta)}\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\beta}{t^2}} +$$

$$+\frac{a\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\alpha}{t^2}} + \frac{t}{2} + \frac{a(\sin\alpha+\sin\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} - \frac{t(\beta\sin^2\alpha+\alpha\sin^2\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}. \tag{4.21}$$

Таким образом, мы получаем явное выражение функции распределения длины хорды для тупоугольного треугольника из (4.13), (4.15), (4.18) и (4.21).

Легко заметить, что $\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \le a\sin\alpha \le \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ и $a\sin\beta \le \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Для вычисления функции распределения длины хорды для остроугольного треугольника, рассмотрим следующие два случая

1. $\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \le a\sin\beta$ (минимальная сторона остроугольного треугольника не превышает максимальную высоту)
2. $a\sin\beta \le \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ (максимальная высота остроугольного треугольника не превышает минимальную сторону).

4.2. Случай остроугольного треугольника типа 1. Легко заметить, что явное выражение (4.4) для $0 < t \le \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ совпадает с (4.13), что вытекает из (4.5), (4.9) – (4.12).

Легко заметить, что явное выражение (4.4) для $\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} < t \le a\sin\alpha$ есть (4.15), которое вытекает из (4.5), (4.9) – (4.12) и (4.14).

Так как $\sin\alpha < t \leq \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, то $\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)} \in [\beta, \arcsin\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)})$, Следовательно, множество $\{u : \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin u\sin(\alpha+\beta)} \leq t\} \cap [\alpha, \pi-\beta]$ совпадает с

$$(4.22)\qquad [\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)}, \pi - \arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)}]$$

Так как $\alpha+\beta \geq \pi/2$, то $\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} \in [\pi-\alpha-\beta, \pi/2)$. $\alpha + \arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} \geq \pi - \beta$ для $a\sin\alpha < t \leq \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Так как $\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} \geq \pi-\alpha-\beta \geq \alpha$ то $\pi+\alpha-\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} \leq \pi$. Следовательно, множество

$$\{u : \frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)} \leq t\} \cap [\pi-\beta, \pi]$$

совпадает с множеством направлений

$$(4.23)\qquad \left[\alpha + \arcsin\frac{a\sin\alpha}{t}, \pi+\alpha-\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t}\right].$$

Мы получаем явное выражение (4.4) из (4.5), (4.9) – (4.12), (4.22) и (4.23) для $a\sin\alpha < t \leq \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

$$\mu(t) = \int_0^\pi b(\Delta ABC, u)F(\Delta ABC, u, t)\,du = \frac{t\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)} +$$

$$+\frac{t\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} + a\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{t^2\sin^2(\alpha+\beta)}} + \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\alpha}{t^2}} +$$

$$(4.24)\qquad +\frac{3t}{2} + \frac{\alpha(\sin^2\alpha - \sin^2(\alpha+\beta)) + \beta(\sin^2\beta - \sin^2(\alpha+\beta))}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}t - \frac{\pi t\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$$

Так как $\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)} \in [\arcsin\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}, \beta)$ для $\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} < t \leq a\sin\beta$, то множество направлений $\{u : \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin u\sin(\alpha+\beta)} \leq t\} \cap [\alpha, \pi-\beta]$ совпадает с

$$(4.25)\qquad \left[\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)}, \pi-\beta\right].$$

Так как $\alpha+\beta \geq \pi/2$, то $\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} \in \left[\arcsin\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \pi-\alpha-\beta\right)$. Следовательно, множество направлений

$$\{u : \frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)} \leq t\} \cap [\pi-\beta, \pi]$$

совпадает с множеством

$$(4.26)\qquad \left[\pi-\beta, \pi+\alpha-\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t}\right].$$

Легко заметить, что явное выражение (4.4) для случая $\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} < t \leq a\sin\beta$ есть (4.20), которе следует из (4.5), (4.9) – (4.12), (4.25) и (4.26).

Далее, имеем $\arcsin\frac{a\sin\beta}{t} \in [\pi-\alpha-\beta, \pi/2)$ для $a\sin\beta < t \le \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Таким образом, множество направлений

$$\{u : \frac{a\,\sin\beta}{\sin(u+\beta)} \le t\} \cap [0,\alpha]$$

совпадает с множеством

$$\left[\arcsin\frac{a\sin\beta}{t} - \beta, \pi - \beta - \arcsin\frac{a\sin\beta}{t}\right]. \tag{4.27}$$

$\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)} \in \left[\alpha, \arcsin\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\right)$ для $a\sin\beta < t \le \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ и $\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \le a\sin\beta$. Следовательно, множество направлений $\{u : \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u} \le t\} \cap [\alpha, \pi-\beta]$ совпадает с множеством

$$\left[\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)}, \pi-\beta\right] \tag{4.28}$$

Так как $\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} \in \left[\arcsin\frac{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}, \arcsin\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)$ для $a\sin\beta < t \le \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, следовательно, множество направлений

$$\{u : \frac{a\,\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)} \le t\} \cap [\pi-\beta, \pi]$$

совпадает с множеством

$$[\pi-\beta, \pi+\alpha-\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t}]. \tag{4.29}$$

Мы получаем явное выражение (4.4) из (4.5), (4.9) – (4.12), (4.27) – (4.29) для $a\sin\beta < t \le \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

$$\begin{aligned}
\mu(t) &= \int_0^\pi b(\Delta ABC, u) \times F(\Delta ABC, u, t)\,du = \\
&= \frac{t\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta}\arcsin\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{t\sin(\alpha+\beta)} + \frac{t\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} + \\
&+ \frac{t\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}\arcsin\frac{a\sin\beta}{t} + \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\beta}{t^2}} + \\
&+ \frac{a}{2}\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{t^2\sin^2(\alpha+\beta)}} + \frac{a\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\alpha}{t^2}} + t + \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} + \\
&+ \frac{\alpha t}{2}\left(\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta - \sin^2(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}\right) - \frac{\pi t\sin\alpha}{2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Так как $\arcsin\frac{a\sin\beta}{t} \in [\beta, \pi-\alpha+\beta)$ для $\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} < t \le a$, то множество направлений $\{u : \frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta} \le t\} \cap [0,\alpha]$ совпадает с множеством

$$\left[\arcsin\frac{a\sin\beta}{t} - \beta, \alpha\right] \tag{4.31}$$

Далее имеем $\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t} \in [\alpha, \arcsin\frac{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta})$ для $\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} < t \le a$. Следовательно, множество направлений $\{u : \frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)} \le t\} \cap [\pi-\beta, \pi]$ совпадает с множеством

$$\left[\pi-\beta, \pi+\alpha-\arcsin\frac{a\sin\alpha}{t}\right] \tag{4.32}$$

Мы получаем явное выражение (4.4) из (4.5), (4.9) – (4.12), (4.31) и (4.32) для $\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} < t \le a$, что совпадает с (4.21).

Мы получаем явное выражение функции распределения длины хорды для треугольника типа 1 из (4.13), (4.15), (4.18), (4.21), (4.24) и (4.30).

4.3. Случай остроугольного треугольника типа 2. Аналогичными вычислениями получаем явное выражение функции распределения длины хорды для случая треугольника типа 2.

Правильный треугольник - треугольник типа 2. Подставляя $\alpha = \beta = \pi/3$ в выражении функции распределения длины хорды для треугольника типа 2, получаем результат Зуланке для явного выражения функции распределения длины хорды для правильного треугольника [11].

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)\frac{t}{a}, & 0 \le t \le \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2t}{a\sqrt{3}}\arcsin\frac{a\sqrt{3}}{2t} - \frac{2\pi t}{3a\sqrt{3}} + \frac{t}{2a} + \frac{\sqrt{4t^2-3a^2}}{2t}, & \frac{a\sqrt{3}}{2} < t \le a \\ 1, & t \ge a. \end{cases}$$

Обозначим $a_1 = a$, $a_2 = \frac{a_1\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $a_3 = \frac{a_1\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, $h_1 = \frac{a_1\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $h_2 = a_1\sin\alpha$, $h_3 = a_1\sin\beta$ (h_i, $i = 1, 2, 3$ высоты треугольника).

Для тупоугольного треугольника $F(t) =$

$$\begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \frac{3t}{2\partial D} + \frac{\pi a_1 t}{2h_1\partial D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\partial D} + \frac{\beta a_2 t}{2h_2\partial D} - \frac{(\alpha+\beta)a_1 t}{2h_1\partial D}, & 0 < t \le h_1 \\ \frac{a_1 t}{h_1\partial D}\arcsin\frac{h_1}{t} + \frac{a_1}{\partial D}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{t^2}} + \frac{3t}{2\partial D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\partial D} + \frac{\beta a_2 t}{2h_2\partial D} - \frac{(\alpha+\beta)a_1 t}{2h_1\partial D}, & h_1 < t \le a_3 \\ \frac{a_1 t}{2h_1\partial D}\arcsin\frac{h_1}{t} + \frac{a_2 t}{2h_2\partial D}\arcsin\frac{h_2}{t} + \frac{a_2}{2\partial D}\sqrt{1-\frac{h_2^2}{t^2}} + \frac{a_1}{2\partial D}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{t^2}} + & \\ +\frac{t}{\partial D} + \frac{a_3}{\partial D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\partial D} - \frac{\beta a_2 t}{2h_2\partial D} - \frac{\alpha a_1 t}{2h_1\partial D}, & a_3 < t \le a_2 \\ \frac{a_2 t}{2h_2\partial D}\arcsin\frac{h_2}{t} + \frac{a_3 t}{2h_3\partial D}\arcsin\frac{h_3}{t} + \frac{a_2}{2\partial D}\sqrt{1-\frac{h_2^2}{t^2}} + \frac{a_3}{2\partial D}\sqrt{1-\frac{h_3^2}{t^2}} + & \\ +\frac{t}{2\partial D} + \frac{a_2+a_3}{\partial D} - \frac{\beta a_3 t}{2h_3\partial D} - \frac{\alpha a_2 t}{2h_2\partial D}, & a_2 < t \le a_1 \\ 1, & t \ge a_1 \end{cases}$$

Для остроугольного треугольника типа 1 $F(t) =$

$$\begin{cases}
0, & t \le 0 \\
\frac{3t}{2\theta D} + \frac{\pi a_1 t}{2h_1\theta D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D} + \frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D} - \frac{(\alpha+\beta)a_1 t}{2h_1\theta D}, & 0 < t \le h_1 \\
\frac{a_1 t}{h_1\theta D}\arcsin\frac{h_1}{t} + \frac{a_1}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{t^2}} + \frac{3t}{2\theta D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D} + \frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D} - \frac{(\alpha+\beta)a_1 t}{2h_1\theta D}, & h_1 < t \le h_2 \\
\frac{a_1 t}{h_1\theta D}\arcsin\frac{h_1}{t} + \frac{a_2 t}{h_2\theta D}\arcsin\frac{h_2}{t} + \frac{a_2}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_2^2}{t^2}} + & \\
+\frac{a_1}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{t^2}} + \frac{3t}{2\theta D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D} + \frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D} - \frac{(\alpha+\beta)a_1 t}{2h_1\theta D} - \frac{\pi a_2 t}{2h_2\theta D}, & h_2 < t \le a_3 \\
\frac{a_1 t}{2h_1\theta D}\arcsin\frac{h_1}{t} + \frac{a_2 t}{2h_2\theta D}\arcsin\frac{h_2}{t} + \frac{a_2}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_2^2}{t^2}} + & \\
+\frac{a_1}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{t^2}} + \frac{t}{\theta D} + \frac{a_3}{\theta D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D} - \frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D} - \frac{\alpha a_1 t}{2h_1\theta D}, & a_3 < t \le h_3 \\
\frac{a_1 t}{2h_1\theta D}\arcsin\frac{h_1}{t} + \frac{a_2 t}{2h_2\theta D}\arcsin\frac{h_2}{t} + \frac{a_3 t}{h_3\theta D}\arcsin\frac{h_3}{t} + & \\
+\frac{a_3}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_3^2}{t^2}} + \frac{a_1}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{t^2}} + \frac{a_2}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_2^2}{t^2}} + \frac{t}{\theta D} + & \\
+\frac{a_3}{\theta D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D} - \frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D} - \frac{\alpha a_1 t}{2h_1\theta D} - \frac{\pi a_3 t}{2h_3\theta D}, & h_3 < t \le a_2 \\
\frac{a_2 t}{2h_2\theta D}\arcsin\frac{h_2}{t} + \frac{a_3 t}{2h_3\theta D}\arcsin\frac{h_3}{t} + \frac{a_2}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_2^2}{t^2}} + & \\
+\frac{a_3}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_3^2}{t^2}} + \frac{t}{2\theta D} + \frac{a_2+a_3}{\theta D} - \frac{\beta a_3 t}{2h_3\theta D} - \frac{\alpha a_2 t}{2h_2\theta D}, & a_2 < t \le a_1 \\
1, & t \ge a_1
\end{cases}$$

Аналогично, для остроугольного треугольника типа 2 имеем $F(t) =$

$$\begin{cases}
0, & t \le 0 \\
\frac{3t}{2\theta D} + \frac{\pi a_1 t}{2h_1\theta D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D} + \frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D} - \frac{(\alpha+\beta)a_1 t}{2h_1\theta D}, & 0 < t \le h_1 \\
\frac{a_1 t}{h_1\theta D}\arcsin\frac{h_1}{t} + \frac{a_1}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{t^2}} + \frac{3t}{2\theta D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D} + \frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D} - \frac{(\alpha+\beta)a_1 t}{2h_1\theta D}, & h_1 < t \le h_2 \\
\frac{a_1 t}{h_1\theta D}\arcsin\frac{h_1}{t} + \frac{a_2 t}{h_2\theta D}\arcsin\frac{h_2}{t} + \frac{a_2}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_2^2}{t^2}} + \frac{a_1}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{t^2}} + & \\
+\frac{3t}{2\theta D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D} + \frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D} - \frac{(\alpha+\beta)a_1 t}{2h_1\theta D} - \frac{\pi a_2 t}{2h_2\theta D}, & h_2 < t \le h_3 \\
\frac{a_1 t}{h_1\theta D}\arcsin\frac{h_1}{t} + \frac{a_2 t}{h_2\theta D}\arcsin\frac{h_2}{t} + \frac{a_3 t}{h_3\theta D}\arcsin\frac{h_3}{t} + \frac{a_3}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_3^2}{t^2}} + & \\
+\frac{a_2}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_2^2}{t^2}} + \frac{a_1}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{t^2}} + \frac{3t}{2\theta D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D} + \frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D} - & \\
-\frac{(\alpha+\beta)a_1 t}{2h_1\theta D} - \frac{\pi a_2 t}{2h_2\theta D} - \frac{\pi a_3 t}{2h_3\theta D}, & h_3 < t \le a_3 \\
\frac{a_1 t}{2h_1\theta D}\arcsin\frac{h_1}{t} + \frac{a_2 t}{2h_2\theta D}\arcsin\frac{h_2}{t} + \frac{a_3 t}{h_3\theta D}\arcsin\frac{h_3}{t} + & \\
+\frac{a_3}{\theta D}\sqrt{1-\frac{h_3^2}{t^2}} + \frac{a_1}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{t^2}} + \frac{a_2}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_2^2}{t^2}} + \frac{t}{\theta D} + & \\
+\frac{a_3}{\theta D} + \frac{\alpha a_3 t}{2h_3\theta D} - \frac{\beta a_2 t}{2h_2\theta D} - \frac{\alpha a_1 t}{2h_1\theta D} - \frac{\pi a_3 t}{2h_3\theta D}, & a_3 < t \le a_2 \\
\frac{a_2 t}{2h_2\theta D}\arcsin\frac{h_2}{t} + \frac{a_3 t}{2h_3\theta D}\arcsin\frac{h_3}{t} + \frac{a_2}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_2^2}{t^2}} + & \\
+\frac{a_3}{2\theta D}\sqrt{1-\frac{h_3^2}{t^2}} + \frac{t}{2\theta D} + \frac{a_2+a_3}{\theta D} - \frac{\beta a_3 t}{2h_3\theta D} - \frac{\alpha a_2 t}{2h_2\theta D}, & a_2 < t \le a_1 \\
1, & t \ge a_1
\end{cases}$$

Abstract. The paper considers the problem of recognition of triangles by orientation-dependent chord length distribution. We obtain following results: 1. The explicit form of the covariogram and orientation-dependent chord length distribution function for

a triangle; 2. the explicit form for the chord length distribution function. 3. The length of the maximal chord of a triangle is continuous function on direction $u \in S^1$ (S^1 is the space of all directions in the plane); 4. If we have orientation-dependent chord length distribution function for an everywhere dense set of S^1, then we can uniquely recognize the triangle with respect to reflections and translations; 5. For any finite subset $A \subset S^1$, there are two non-congruent triangles with the same values of orientation-dependent chord length distribution functions on A.

Список литературы

[1] Luis A. Santalo, Integral geometry and geometric probability (Addision-Wesley, Reading, MA, 2004).
[2] C. L. Mallows, and J. M. Clark, "Linear intercept distributions do not characterize plane sets" J. Appl. Prob. 7, p. 240-244, (1970)
[3] J. Gates, "Recognition of triangles and quadrilaterals by chord length distribution" J. Appl. Prob. 19, p. 873-879, (1982).
[4] P. Waksman, "Plane polygons and a conjecture of Blaschke's" Adv. Appl. Prob. 17, p. 774-793, (1985).
[5] G. Matheron, Random Sets and Integral Geometry (Wiley, New York 1975).
[6] W. Nagel, "Orientation-dependent chord lenght distributions characterize convex polygons" Appl. Prob., 30, no. 3, pp. 730 – 736 (1993).
[7] G. Bianchi, and G. Averkov, "Confirmation of Matheron's Conjecture on the covariogram of a planar convex body" Journal of the European Mathematical Society 11, 1187-1202, (2009).
[8] G. Matheron, Les variables regionalisees et leur estimation. (Masson, Paris 1965).
[9] R. J. Gardner, Geometric Tomography, (Cambridge University Press, New York, 1995).
[10] V. K. Ohanyan, and N. G. Aharonyan, "Tomography of bounded convex domains", SUTRA: International Journal of Mathematical Science, vol. 2, no. 1, pp. 1-12 (2009).
[11] R. Sulanke, "Die verteilung der Sehnenlengen an ebenen und rämlichen Figuren", Math. Nachr., vol. 23, p. 51-74 (1961).

Поступила 1 апреля 2012