

DER PAPANGELOU PROZESS

HANS ZESSIN

Universität Bielefeld, Bielefeld, Germany

E-mail: zessin@math.uni-bielefeld.de

АННОТАЦИЯ. Das Ziel dieser Note ist die Konstruktion von Punktprozessen in einem abstrakten Raum, die spezifiziert sind durch eine gewisse Klasse von Kernen, die für diese Prozesse Papangelou Kerne, d.h. bedingte Intensitäten sind. Wir bezeichnen sie aus diesem Grunde als Papangelousche Prozesse. Diese Klasse von Prozessen enthält viele Gibbssche Prozesse der klassischen statistischen Mechanik sowie neben dem Poissonschen Prozeß die neue Klasse der hier so genannten Polyaschen Summenprozesse. Diese haben eine ebenso fundamentale Bedeutung wie Poissonsche Prozesse.

Meinem verehrten Lehrer Klaus Krickeberg zum achtzigsten Geburtstag gewidmet

1. DER ALLGEREINE RAHMEN

X bezeichnet im Folgenden einen Polnischen Raum, $\mathcal{B}(X)$ bzw. $\mathcal{B}_0(X)$ seine Borelschen bzw. beschränkten Borelschen Teilmengen. $\mathcal{M}(X)$ ist der vag polnische Raum aller lokalendlichen Maße auf X (i.e. der Radonmaße auf X). Mit $\mathcal{M}^\cdot(X)$ bezeichnen wir den Teilraum Y aller Radonschen Punktmaße, und schließlich mit $\mathcal{M}_{\check{B}}(X)$, $B \in \mathcal{B}_0(X)$, die Menge aller Punktmaße, deren Träger in der Borelschen Menge B liegen. Y_f sei der Raum $\mathcal{M}_f(X)$ aller endlichen Punktmaße. Alle diese Maßräume seien versehen mit der natürlichen, von der vagen Topologie induzierten Borelschen σ -Algebra, die wir mit $\mathcal{F}^\cdot$, $\mathcal{F}_f^\cdot$ oder $\mathcal{F}_{\check{B}}^\cdot$ bezeichnen. Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}_\infty^\cdot$ die 'tail'- σ -Algebra $\cap_{B \in \mathcal{B}_0} \mathcal{F}_{\check{B}^c}^\cdot$.

Ausgangspunkt ist für uns ein Kern $\pi(\eta, dx)$ von Y nach X , d.h. eine meßbare Abbildung $\eta \mapsto \pi(\eta, \cdot)$ von Y in die Menge $\mathcal{M}(X)$. Wir geben zunächst einige Beispiele solcher Kerne, auf die wir in der Folge zurückkommen werden.

Bezeichne dazu ρ ein Radon Maß auf X , das nicht das Nullmaß ist. Offenbar ist $\alpha(\eta, \cdot) = \rho$, $\eta \in Y$, ein Beispiel. Ebenso sind $\beta(\eta, dx) = z \cdot (\rho + \eta)(dx)$, $z > 0$, solche. Wir nennen β einen *Polyaschen Summenkern*.

Eine weiteres Beispiel erhält man so: Sei $X = E \times K$ das Produkt zweier Polnische Räume, $\rho(dq)$ sei ein Radonsches Maß auf E . Bezeichnet η_2 das Bild von η unter der Projektion auf K , so definiert $\gamma(\eta, d(q, p)) = \rho(dq) \otimes \eta_2(dp)$ einen Kern von dem Raum Y_2 nach X , wobei Y_2 die Menge aller $\eta \in Y$ mit $\eta_2 \in \mathcal{M}(K)$ bezeichnet. Wir denken uns diesen Kern trivial fortgesetzt auf ganz Y . Wir nennen ihn *Polyaschen Produktkern*. (Eine etwas allgemeinere Formulierung solcher Produktkerne wird weiter unten gegeben.)

Eine letzte bedeutende Beispielklasse ist die folgende: Ist E eine meßbare Funktion von $X \times Y$ in die erweiterte Zahlengerade $]-\infty, +\infty]$, so ist der Kern gegeben durch $\gamma(\eta, dx) = \exp(-E(x, \eta)) \cdot \rho(dx)$, falls E geeignete Integrierbarkeitsbedingungen erfüllt. Dies ist der sogenannte *Boltzmannsche Kern*. Zu seiner (nicht trivialen) Konstruktion mit Hilfe eines superstabilen, nach unten regulären Paarpotentials verweisen wir auf Ruelle [16], Lemma 5.1 und Proposition 5.2 (a).

Für den gegebenen Kern π definieren wir für jedes $m \in \mathbb{N}$ und $\eta \in Y$ die Maße

$$(1.1) \quad \pi^{(m)}(\eta; dx_1, \dots, dx_m) = \pi(\eta, dx_1) \pi(\eta + \delta_{x_1}, dx_2) \dots \pi(\eta + \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_{m-1}}, dx_m).$$

Ebenso betrachten wir unten die folgenden, durch $\pi^{(m)}$ und damit durch π definierten Kerne: Sind $B \in \mathcal{B}_0(X)$ und $\eta \in Y$, so setzen wir

$$(1.2) \quad \pi_B(\eta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{B^m} \varphi(\delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_m}) \pi^{(m)}(\eta_{B^c}; dx_1, \dots, dx_m).$$

Hier ist $\delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_m}$ das Nullmaß, falls $m = 0$, und die Integration bedeutet Multiplikation mit 1. π_B ist offenbar ein Kern von $(Y, \mathcal{F}_{B^c})$ nach $\mathcal{M}_{\tilde{B}}(X)$.

2. DER ENDLICHE PAPANGELOU PROZESS

Wir betrachten hier zunächst den Fall, daß π ein *endlicher* Kern ist, d.h. ein Kern von Y mit Werten in $\mathcal{M}_f(X)$, dem Raum der endlichen Radonmaße, ist. Sie treten weiter unten in der folgenden Form auf: Ist π ein Kern von Y nach X und sind B, C beschränkte Borelsche Mengen in X , so ist $\eta \mapsto 1_C \cdot \pi(\eta_{B^c}, \cdot)$ ein endlicher Kern.

Wir beginnen nun, Bedingungen an π zu stellen. Die erste ist:

$$(2.1) \quad \pi^{(m)}(\eta, \cdot), m \geq 1, \text{ ist ein endliches Maß auf } X^m \text{ für alle } \eta \in Y.$$

Wir bezeichnen mit $Z^{(m)}(\eta)$ die Gesamtmasse von $\pi^{(m)}(\eta, \cdot)$ und setzen für jedes η $Z^{(0)}(\eta) = 1$. Wir nehmen weiterhin an, daß für jedes η

$$(2.2) \quad \text{die Reihe } \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Z^{(m)}(\eta)}{m!} \text{ gegen ein } 0 < \Xi(\eta) < +\infty \text{ konvergiert.}$$

Wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, so sagen wir, daß π *integrierbar* ist.

Unter diesen Voraussetzungen ist für jedes η der folgende endliche Punktprozeß wohldefiniert.

$$(2.3) \quad \mathcal{P}_\pi^\eta(\varphi) = \frac{1}{\Xi(\eta)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{X^m} \varphi(\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_m}) \pi^{(m)}(\eta; dx_1, \dots, dx_m).$$

Hier bezeichnet φ eine nichtnegative, meßbare Funktion. (Und es gelten für $m = 0$ die oben gemachten Konventionen.) Man beachte, daß der Prozeß $\mathcal{P}_\pi^\eta$ auf der Menge $Y_f = \mathcal{M}_f$ aller endlichen Konfigurationen in X konzentriert ist. Wir schreiben dann $\mathcal{P}_\pi^\eta \in \mathcal{P}Y_f$.

Das Konstruktionsprinzip von $\mathcal{P}_\pi^\eta$ ist das folgende: Für gegebenes η realisiert man eine Teilchenzahl m gemäß der Verteilung

$$(2.4) \quad \mathcal{P}_\pi^\eta\{\zeta_X = m\} = \frac{1}{\Xi(\eta)} \cdot \frac{Z^{(m)}(\eta)}{m!}, m \geq 0.$$

Und dann realisiert man $\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_m}$ gemäß des Bildes von

$$\frac{1}{Z^{(m)}(\eta)} \cdot \pi^{(m)}(\eta; dx_1, \dots, dx_m)$$

unter der Transformation $(x_1, \dots, x_m) \mapsto \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_m}$.

Schließlich setzen wir noch voraus, daß π *symmetrisch* ist, d.h. daß

$$(2.5) \quad \text{die Maße } \pi^{(m)}(\eta), \eta \in Y, m \geq 1, \text{ symmetrisch sind.}$$

Dies bedeutet, daß die folgende sogenannte *cozykel-Bedingung* erfüllt ist:

$$(2.6) \quad \pi(\eta, dx)\pi(\eta + \delta_x, dy) \text{ ist ein symmetrisches Maß auf } X \text{ für alle } \eta \in Y.$$

Wir haben damit alle Vorbereitungen für das folgende *Hauptlemma* getroffen.

Lemma 1. *Ist π ein endlicher Kern von Y nach X , der integrierbar und symmetrisch ist, so ist jedes $\mathcal{P}_\pi^\eta, \eta \in Y$, eine Lösung $P^\eta \in \mathcal{P}Y_f$ der folgenden partiellen Integrationsformel*

$$(\sum'_\pi) \quad \mathcal{C}_{P^\eta}(h) = \int_{Y_f} \int_X h(x, \mu + \delta_x) \pi(\mu + \eta, dx) P^\eta(d\mu), h \in F_+.$$

Hier bezeichnet $\mathcal{C}_P$ das Campbellsche Maß von P ; und F_+ steht kurz für die Klasse der nichtnegativen, meßbaren Funktionen auf dem jeweils zugrunde liegenden Meßraum.

Beweis. Für gegebenes h ist

$$\mathcal{C}_{P^\eta}(h) = \frac{1}{\Xi(\eta)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{j=1}^m \int_{X^m} h(x_j, \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_m}) \pi^{(m)}(\eta; dx_1, \dots, dx_m).$$

Aufgrund der Symmetrie der Maße $\pi^{(m)}$ folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{P}_\pi^\eta}(h) &= \frac{1}{\Xi(\eta)} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} \int_{X^{m-1}} \int_X h(x, \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_{m-1}} + \delta_x) \\ &\quad \pi(\eta + \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_{m-1}}, dx) \pi^{(m-1)}(\eta; dx_1, \dots, dx_{m-1}) \\ &= \int \int h(x, \mu + \delta_x) \pi(\eta + \mu, dx) \mathcal{P}_\pi^\eta(d\mu). \quad \text{qed} \end{aligned}$$

Bisher haben wir nur endliche Papangelousche Prozesse betrachtet. Die partielle Integrationsformel $(\sum'_\pi)$ macht aber auch Sinn für Prozesse, die unendliche Teilchenkonfigurationen realisieren.

3. DER ALLGERELINE PAPANGELOU PROZESS

Wir werden jetzt Papangelousche Prozesse konstruieren, die unendliche Teilchenkonfigurationen realisieren.

Es sei π nun ein Kern von Y nach X . Wir machen wieder eine Integrierbarkeitsvoraussetzung an π , die wir wie oben in zwei Schritten formulieren. Wir setzen die Existenz einer *lokalendlichen* Zerlegung $\Delta = (X_n)_{n \geq 0}$ von X voraus (lokalendlich bedeutet, daß jede beschränkte Menge nur von endlich vielen Elementen der Zerlegung getroffen wird), so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Die Kerne $\pi^{(m)}$, $m \geq 1$, seien *lokalendlich* in dem Sinne, daß

$$(3.1) \quad Z_n^{(m)}(\eta) = \pi^{(m)}(\eta_{X_n^c}, X_n^m) < +\infty \quad \forall \eta \in Y, m \geq 1, n \geq 0.$$

Wir setzen zusätzlich voraus, daß π *lokal integrierbar* ist in dem folgenden Sinne.

$$(3.2) \quad \Xi_n(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Z_n^{(m)}(\eta)}{m!} \in]0, +\infty[, n \geq 0, \eta \in Y.$$

Unter diesen beiden Bedingungen sind die folgenden endlichen Punktprozesse für alle $\eta \in Y, n \geq 0$ wohldefiniert:

$$(3.3) \quad \Pi_{X_n}(\eta, \varphi) = \frac{1}{\Xi_n(\eta)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{X_n^m} \varphi(\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_m}) \pi^{(m)}(\eta_{X_n^c}; dx_1, \dots, dx_m), \varphi \in F_+.$$

(Wieder gelten hier die üblichen Konventionen für $m = 0$.) Man beachte, daß die Π_{X_n} Markoffsche Kerne von $(Y, \mathcal{F}_{X_n^c})$ nach $(\mathcal{M}_{\dot{X}_n}, \mathcal{F}_{\dot{X}_n})$ sind. Die Π_{X_n} sind die Normalisierungen derjenigen π_{X_n} , die in (1.2) definiert sind.

Das Ziel ist nun, mit Hilfe dieser Kerne unter geeigneter Wahl der Anfangsbedingungen und der Randkonfigurationen η einen globalen Prozeß in X zu konstruieren, der π als Papangelouschen Kern besitzt. Wir benutzen dazu die Methode des Satzes von

Ionescu Tulcea (siehe z.B. [10]), die es erlaubt, Prozesse mit Hilfe einer Anfangsverteilung und bedingten Verteilungen zu konstruieren.

Für gegebene $(\eta_0, \dots, \eta_{m-1}) \in \mathcal{M}_{\dot{X}_0} \times \dots \times \mathcal{M}_{\dot{X}_{m-1}}$ betrachten wir nun die Markoffschen Kerne

$$(3.4) \quad Q_m(\eta_0, \dots, \eta_{m-1}; d\eta_m) = \Pi_{X_m}(\eta_0 + \dots + \eta_{m-1}, d\eta_m)$$

von $\mathcal{M}_{\dot{X}_0} \times \dots \times \mathcal{M}_{\dot{X}_{m-1}}$ nach $\mathcal{M}_{\dot{X}_m}$.

Nach dem zitierten Satz von Ionescu Tulcea existieren zufällige Elemente ξ_n in $\mathcal{M}_{\dot{X}_n}$, $n \geq 0$, mit der Eigenschaft, daß die endlichdimensionalen Verteilungen von $(\xi_n)_{n \geq 0}$ gegeben sind durch

$$(3.5) \quad \mathcal{L}(\xi_0, \dots, \xi_n) = \Pi_{X_0}(0, d\eta_0) \cdot Q_1(\eta_0, d\eta_1) \cdots Q_n(\eta_0, \dots, \eta_{n-1}; d\eta_n).$$

Wir betrachten dann auf dem soeben konstruierten Wahrscheinlichkeitsraum das zufällige Element

$$(3.6) \quad \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n.$$

Nach Konstruktion ist ξ ein zufälliges Element in $\mathcal{M}^{\cdot}(X)$, d.h. ein Punktprozeß in X . Unser Ziel ist es nun, zu zeigen, daß ξ ein Papangelou Prozeß in X ist, der spezifiziert wird durch Kern π . Dazu benötigen wir, wie im endlichen Fall, als weitere Voraussetzung an π die *cozykel-Bedingung*, die schon unter (2.6) auftauchte:

$$(3.7) \quad \pi(\eta, dx)\pi(\eta + \delta_x, dy) = \pi(\eta, dy)\pi(\eta + \delta_y, dx), \eta \in Y, x, y \in X.$$

Außerdem benötigen wir, daß π die *Fellersche Bedingung* erfüllt: Diese beinhaltet, daß

$$(3.8) \quad \pi(\eta_{X^n}, \cdot) \rightharpoonup \pi(\eta, \cdot), \text{ falls } n \rightarrow +\infty.$$

Hier bezeichnet $\rightharpoonup$ die vage Konvergenz Radonscher Maße, und $X^n = X_0 \cup \dots \cup X_n$.

Schließlich benötigen wir dazu auch die folgende Bedingung: Außerhalb eines jeden y hat $\pi(\eta + \delta_y, dx)$ eine Dichte f_π bezüglich $\pi(\eta, dx)$, die von η unabhängig ist, m.a.W.:

$$(3.9) \quad 1_{\{y\}^c}(x) \cdot \pi(\eta + \delta_y, dx) = 1_{\{y\}^c}(x) \cdot f_\pi(x, y) \cdot \pi(\eta, dx), \eta \in Y, y \in X.$$

Wir berechnen das Campbellsche Maß C_ξ von ξ . Für gegebenes $h \in F_+$ ist

$$(3.10) \quad C_\xi(h) = \sum_{n \geq 0} \int \int h(x, \xi) \xi_n(dx) dP$$

Wir folgen der Argumentation von Mecke [8] und nehmen zunächst an, daß h von der Form $g \otimes \varphi$ ist, wobei g außerhalb eines X_k , $0 \leq k \leq n$, verschwindet und φ

meßbar ist bzgl. der σ -Algebra $\mathcal{F}_{X^n}$. In diesem Fall ist , wenn man $\xi_{X^k} = \sum_{j=0}^k \xi_j$ und $\eta_{X^k} = \sum_{j=0}^k \eta_j$ setzt und (3.5) beachtet ,

$$\begin{aligned} C_\xi(h) &= \int \xi_k(g) \cdot \varphi(\xi_{X^n}) dP \\ &= \int \Pi_{X_0} 0, d\eta_0) \int \dots \int \Pi_{X_k}(\eta_{X^{k-1}}, d\eta_k) \eta_k(g) \cdot \psi(\eta_{X^{k-1}} + \eta_k), \end{aligned}$$

wobei ψ die folgende Funktion bezeichnet:

$$\begin{aligned} \psi(\eta_{X^k}) &= \int \Pi_{X_{k+1}}(\eta_{X^k}, d\eta_{k+1}) \int \dots \\ &\dots \int \Pi_{X_n}(\eta_{X^k} + \eta_{k+1} + \dots \eta_{n-1}, d\eta_n) \varphi(\eta_{X^k} + \eta_{k+1} + \dots + \eta_n). \end{aligned}$$

Wendet man hier Lemma 2.1 auf das innere Integral an, so ergibt sich unter Beachtung von (3.7)

$$\begin{aligned} \int \Pi_{X_k}(\eta_{X^{k-1}}, d\eta_k) \eta_k(g) \cdot \psi(\eta_{X^{k-1}} + \eta_k) &= \\ \int \Pi_{X_k}(\eta_{X^{k-1}}, d\eta_k) \int_{X_k} \pi(\eta_{X^k}, dx) g(x) \cdot \psi(\eta_{X^{k-1}} + \eta_k + \delta_x). \end{aligned}$$

Nun ist andererseits wegen (3.9)

$$(3.11) \quad \Pi_{X_{l+1}}(\eta_{X^l} + \delta_x, d\eta_{l+1}) = f_\pi(x, \eta_{l+1}) \cdot \Pi_{X_{l+1}}(\eta_{X^l}, d\eta_{l+1}), \text{ falls } x \in X_l.$$

Hier bezeichnet $f_\pi(x, \eta_{l+1}) = \prod_{y \in \eta_{l+1}^*} f_\pi(x, y)^{\eta_{l+1}(y)}$, wobei η^* der Träger von η ist. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \psi(\eta_{X^k} + \delta_x) &= \int \Pi_{X_{k+1}}(\eta_{X^k}, d\eta_{k+1}) \int \dots \int \Pi_{X_n}(\eta_{X^k} + \eta_{k+1} + \dots \eta_{n-1}, d\eta_n) \\ &\quad \prod_{l=k+1}^n f_\pi(x, \eta_l) \cdot \varphi(\eta_{X^k} + \eta_{k+1} + \dots + \eta_n + \delta_x), \end{aligned}$$

und damit unter nochmaliger Beachtung von (3.9)

$$(3.12) \quad C_\xi(h) = \int \int_{X_k} h(x, \xi + \delta_x) \pi(\xi_{X^n}, dx) dP.$$

Diese Gleichung bleibt richtig, wenn man n durch irgend ein größeres n ersetzt. Aber dann ergibt sich aus der Fellerschen Eigenschaft von π

$$(3.13) \quad C_\xi(h) = \int \int_{X_k} h(x, \xi + \delta_x) \pi(\xi, dx) dP.$$

Damit ist die Gleichung (3.13) für das oben betrachtete Subsystem von Funktionen h gezeigt worden. Standardargumente, wie man sie z.B. im Beweis des Satzes 3.1. der zitierten Meckeschen Arbeit findet, beschließen den Beweis des folgenden Satzes.

Theorem 1. *Ist π ein symmetrischer Fellerscher Kern von Y nach X , der lokal integrierbar ist und die Eigenschaft (3.9) besitzt, so ist ξ ein Punktprozeß in X , der den Kern π als Papangelou Kern besitzt, d.h. ξ genügt der partiellen Integrationsformel*

$$(3.14) \quad C_\xi(h) = \int h(x, \xi + \delta_x) \pi(\xi, dx) dP, h \in F_+.$$

Wir nennen den Prozeß ξ einen *Papangelou Prozeß* zu π und schreiben dafür P_π .

Die *wahrscheinlichkeitstheoretische Bedeutung des Kernes π* für einen Papangelou Prozeß ist die folgende: Sei X höchstens abzählbar unendlich und P ein Papangelou Prozeß in X , der spezifiziert ist durch einen Kern π , der außerdem der folgenden Bedingung genügt:

$$(3.15) \quad \pi(., x) \text{ ist meßbar bzgl. } \mathcal{F}_{\{x\}^c} \text{ für alle } x.$$

Dann gilt für alle $f \in F_+$ und alle $\mathcal{F}_{\{x\}^c}$ -meßbaren φ , daß $\mathcal{C}_P(f \otimes \varphi) = E_P(\zeta_f \cdot \varphi) = P(\pi(., f) \cdot \varphi)$. Hieraus liest man sofort ab, daß $\pi(., x)$ gegeben ist durch die bedingte Erwartung $E_P(\zeta_{\{x\}} | \mathcal{F}_{\{x\}^c})$ von $\zeta_{\{x\}}$ bzgl. der σ -Algebra seiner Außenwelt. Für gegebenes x ist $\pi(., x)$ also die bedingte Intensität in x .

Dieser Satz ist ein Existenzsatz für eine sehr große Klasse von Punktprozessen. Der Beweis zeigt, daß der Theorie der Papangelouschen Prozesse eine Theorie raumzeitlich geordneter stochastischer Prozesse mit unendlich langem Gedächtnis (Prozesse mit vollständigen Bindungen) zugrunde liegt, die mit der cozykel-Eigenschaft eine Symmetrieeigenschaft besitzen, die viel stärker ist als die zeitliche Reversibilität. Kurz gesagt liegt der Papangelouschen Theorie eine neue Raum-Zeit Struktur zugrunde, die es weiter zu entwickeln gilt.

4. BEISPIELE

Wir diskutieren nun Anwendungen des Satzes 3.1.

Poissonsche Prozesse.

Ist $\pi \equiv \rho, \rho \in \mathcal{M}(X)$, so ist die obige Konstruktion eine Modifikation der Meckeschen Konstruktion des Poisson Prozesses P_ρ in [8].

Coxsche Prozesse

Man kann die obige Konstruktion modifizieren, indem man anstelle des 'Vakuums' 0 mit einer zufälligen Anfangskonfiguration σ in die Konstruktion geht. Ist nämlich

π symmetrisch, lokal integrierbar mit der Eigenschaft

$$(4.1) \quad \pi(., dx) \text{ ist meßbar bezüglich } \mathcal{F}_\infty,$$

sowie in einem geeignet modifizierten Sinne Fellersch, so erhält man durch die obige Konstruktion als Papangelouschen Prozeß P_π einen *Coxschen Prozeß mit bedingter Intensität* π , d.h. daß

$$(4.2) \quad P_\pi = \int P_{\pi(\sigma, \cdot)} P_0(d\sigma).$$

Hier bezeichnet P_0 den Anfangsprozeß, der σ realisiert. (Für eine ausführliche Darstellung hiervon verweisen wir auf [9].) P_π ist nun ein Poissonscher Prozeß mit zufälliger Intensität π . Dies ist die Klasse von Punktprozessen, die Krickeberg [5] und Papangelou [12] im Zusammenhang des Davidsonschen Problems systematisch untersucht. Papangelou gibt in [12], Theorem 2 als hinreichende Bedingung dafür, daß (4.1) vorliegt, die Bedingung an, daß π ein *Produktkern* in dem folgenden Sinne ist: Der zugrunde liegende Raum ist ein Produkt $X = E \times F$, und π ist Produkt eines unendlichen, diffusen Maßes ρ auf F und eines Kernes τ von Y nach E , d.h.

$$(4.3) \quad \pi(., dqdp) = \rho(dp)\tau(., dq).$$

Polyasche Summenprozesse.

Ist $\pi = \beta = \beta_{z, \rho}$, $\rho \in \mathcal{M}(X)$, $0 < z < 1$, ein Polyascher Summenkern, so liegt lokale Integrierbarkeit vor mit den von der Randbedingung unabhängigen Konstanten

$$(4.4) \quad \Xi_n(z) = \exp(\rho(X_n) \cdot \kappa(z)).$$

Hier ist $\kappa(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j}$; und wir benutzen die wohlbekannte Tatsache (siehe z.B. [13]), daß

$$(4.5) \quad \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \cdot \rho(X_n)^{[m]} \cdot z^m = \exp(\rho(X_n) \cdot \kappa(z)).$$

$a^{[m]} = a(a+1) \cdots (a+m-1)$ bezeichnet das sogenannte *Pochhammer Symbol*. Der Polyasche Summenkern ist natürlich Fellersch und genügt der Bedingung (3.9). Den zugehörigen Papangelou Prozeß nennen wir den *Polyaschen Summenprozeß in X* , spezifiziert durch (z, ρ) .

Wir wollen seine wichtigsten Eigenschaften studieren. Dazu zeigen wir nun, daß dieser Prozeß unabhängige Zuwächse besitzt. Aus dieser Überlegung wird sich auch die Verteilung der Zählvariablen ζ_B ergeben und die Tatsache, daß ein solcher Polyascher Summenprozeß durch seine bedingte Intensität π eindeutig festgelegt ist.

Es seien $B \in \mathcal{B}_0$, $k \geq 1$ und φ eine nichtnegative $\mathcal{F}_{\tilde{B}^c}$ -meßbare Funktion. Dann ergibt sich für einen Polyaschen Prozeß P zu β die Rekursion

$$\begin{aligned} P(1_{\{\zeta_B=k\}} \cdot \varphi) &= \frac{1}{k} \cdot \int \int 1_B(x) \cdot 1_{\{\zeta_B=k\}}(\mu) \cdot \varphi(\mu) \mu(dx) P(d\mu) \\ &= \frac{1}{k} \cdot \int \int 1_B(x) \cdot 1_{\{\zeta_B=k-1\}}(\mu) \cdot \varphi(\mu) \cdot z \cdot (\rho + \mu)(dx) P(d\mu) \\ &= \frac{z}{k} \cdot [\rho(B) + (k-1)] \cdot P(1_{\{\zeta_B=k-1\}} \cdot \varphi), \end{aligned}$$

so daß

$$P(1_{\{\zeta_B=k\}} \cdot \varphi) = \frac{z^k}{k!} \cdot \rho(B)^{[k]} \cdot P(1_{\{\zeta_B=0\}} \cdot \varphi).$$

Wählt nun für φ die Indikatorfunktion des Ereignisses $\{\zeta_{B_1} = k_1, \dots, \zeta_{B_n} = k_n\}$, wobei $k_j \geq 1$ und die $B_j \in \mathcal{B}_0$ paarweise disjunkt sind, so erhält man

$$P\{\zeta_{B_1} = k_1, \dots, \zeta_{B_n} = k_n\} = P\{\zeta_{B_1} = 0, \dots, \zeta_{B_n} = 0\} \cdot \prod_{j=1}^n \frac{z^{k_j}}{k_j!} \cdot \rho(B_j)^{[k_j]}.$$

Diese Gleichung enthält nun alle gewünschten Informationen: Durch Summation über alle k_j ergibt sich zunächst der Wert von $P\{\zeta_{B_1} = 0, \dots, \zeta_{B_n} = 0\}$. Damit erhält man als Verteilung der ζ_B , $B \in \mathcal{B}_0$,

$$(4.6) \quad P\{\zeta_B = k\} = \exp(-\rho(B) \cdot \kappa(z)) \cdot z^k \cdot \frac{\rho(B)^{[k]}}{k!}, k \geq 0.$$

Durch Verbindung obiger Resultate erhält man dann, daß P unabhängige Zuwächse besitzt. Schließlich berechnet sich der Erwartungswert von ζ_B auf folgende Weise:

$$(4.7) \quad P(\zeta_B) = z \cdot e^{\kappa(z)} \rho(B).$$

Die obigen Überlegungen benutzten nur die partielle Integrationsformel, von der P eine Lösung ist. Und wir sahen oben, daß diese vollständig die endlichdimensionalen Verteilungen des Feldes $(\zeta_B)_{B \in \mathcal{B}_0}$ bestimmt. Dies zeigt, daß eine Polyascher Summenprozeß vollständig durch seine bedingte Intensität bestimmt ist, so daß $P = \mathcal{P}_\beta$. Ein Polyascher Summenprozeß hat also ganz analoge Eigenschaften wie ein Poissonscher Prozeß.

GIBBSISCHE PROZESSE.

Der Boltzmannsche Kern $\gamma(\eta, \cdot) = \exp(-E(\cdot, \eta)) d\rho$ ist symmetrisch, falls E die folgende Symmetriebedingung erfüllt:

$$(4.8) \quad E(x, \eta) + E(y, \eta + \delta_x) = E(y, \eta) + E(x, \eta + \delta_y) \text{ für alle } x, y, \eta.$$

Die lokale Integrabilität von π liegt vor, falls E die folgende, auf Preston [14] zurückgehende Stabilitätsbedingung erfüllt:

Für alle $\eta \in Y_f$ existiert ein $B(\eta) > 0$, so daß für alle $m \geq 1$ und $x_1, \dots, x_m$ gilt

$$(4.9) \quad E(x_1, \eta) + E(x_2, \eta + \delta_{x_1}) + \dots + E(x_m, \eta + \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_{m-1}}) \geq -B(\eta) \cdot m.$$

Die Normalisierungskonstante $\Xi_n(\eta)$ ist kleiner oder gleich $\exp(\rho(X_n) \cdot e^{B(\eta)})$ und heißt nun die *großkanonische Partitionsfunktion*.

In der Regel ist E in der klassischen statistischen Mechanik durch ein geeignetes Paarpotential ϕ auf $X = \mathbb{R}^d$ gegeben. Ruelle formuliert in [16] Bedingungen unter denen ein solches Potential zusammen mit dem Lebesgueschen Maß ρ auf $\mathbb{R}^d$ einen Boltzmannschen Kern $\pi(\eta, dx) = \exp E(x, \eta) \rho(dx)$ von Y nach X definiert. E ist dabei gegeben durch

$$(4.10) \quad E(x, \eta) = \sum_{\nu \leq_2 \eta, \nu(x) \geq 1} \phi(\nu), \quad x \in X, \eta \in Y,$$

Hier wird über alle 2-elementigen Subkonfigurationen ν von η summiert, die x als Teilchen enthalten. Ein solches E ist natürlich symmetrisch. Ebenso ist Bedingung (3.9) erfüllt. Die lokale Integrierbarkeit liegt z.B. vor, wenn $\phi \geq 0$ oder ein sogenanntes hard-core Potential ist. Wir gehen hier nicht weiter darauf ein, welche allgemeinen Bedingungen an das Potential die lokale Integrierbarkeit zur Folge haben, und verweisen auf [16]. Schließlich ist γ ein Fellerscher Kern für eine große Klasse von Potentialen. Auch dies findet man in [16], Lemma 5.1 und Proposition 5.2.

Der obige Satz liefert unter solchen Bedingungen die Existenz von Papangelouschen Prozessen, die nun *Gibbssche Prozesse zur bedingten Energie E* heißen. Die obige Konstruktion von Gibbsschen Prozessen im $\mathbb{R}^d$ ist neu. Man vergleiche diese mit der Ruelleschen Konstruktion in [16], Theorem 5.5.

Natürlich schließen sich eine Reihe weiterer *Fragen* an: Wann sind allgemeine Papangelousche Prozesse durch π eindeutig festgelegt? Wann nicht? Welches ist die Struktur der Menge $\mathcal{P}(\pi)$ der durch π spezifizierten Papangelou Prozesse? Welches ist die zugehörige Martinrand Theorie?

5. ZUM ENSTEHUNGSZUAMREHANG DER OBIGEN ÜBERLEGUNGEN

Der Ausgangspunkt der hier entwickelten Theorie ist die fundamentale Arbeit von Papangelou [12], die die allgemeine Struktur von zufälligen Ebenenprozessen untersucht und deren Ergebnisse auf der Tagung «Second International Conference

on the Theory and Applications of Point Processes» im April 1974 in Bad Kühlungsborn in Anwesenheit von Klaus Krickeberg, Fredos Papangelou, Klaus Matthes, Joseph Mecke, Christopher Preston und mir vorgetragen wurden. Hier wurde zum ersten Mal die grundlegende Bedeutung der absolut stetigen Version der Bedingung (Σ') explizit gemacht, die mit Hilfe des Begriffs eines Campbellschen Maßes formuliert wird. (Eine ausführlichere Darstellung der Entwicklung dieser Bedingung findet man in dem Brief von Fredos Papangelou weiter unten.)

Nguyen Xuan Xanh und ich präsentierten dann 1976 auf der Tagung « Buffon Bicentenary Symposium on stochastic geometry and directional statistics » [2] am Sevan See in Armenien die Ergebnisse der Arbeit [11], in der Gibbs'sche Prozesse als Papangelousche Prozesse gekennzeichnet werden, die spezifiziert sind durch den Boltzmannschen Kern. (Auf dieser Tagung waren ebenfalls die genannten Kollegen anwesend.) Es entstand eine fruchtbare Diskussion zwischen den Genannten und mir, die dann die grundlegende Arbeit von Matthes, Mecke und Warmuth [7] stimulierte. In dieser werden Ideen unserer Arbeit, die noch ganz dem Kontext der klassischen statistischen Mechanik verhaftet sind, so wie sie in der für uns zentralen Arbeit von Preston [14] formuliert wurden, auf die allgemeinere Ebene der Papangelou Prozesse gehoben. M.a.W. es wird der Boltzmannsche Kern ersetzt durch einen beliebigen Papangelouschen Kern. (In der hier vorliegenden Arbeit wird auf genau dieser allgemeinen Ebenen gearbeitet.)

Parallel zu [11] und unabhängig davon entwickelten Georgii [3] und Takahashi [17] ähnliche Ideen, die zu einer differentiellen Kennzeichnung von Gibbs'schen Prozessen, d.h. ihrer Charakterisierung durch Palm'sche Maße, führten. Eine systematische Behandlung der Arbeiten [12],[11] und [7] folgte danach durch die Arbeiten von Gl tzel, Rauchenschwandtner und Wakolbinger, die schließlich ihre wertvolle Zusammenfassung in der Dissertation [15] fand. Zu guter Letzt fand die gesamte Theorie Eingang in die russische Ausgabe der Monographie [6] sowie diejenigen von Kallenberg, *Random measures, Akademie Verlag Berlin, Academic Press London (1983)* sowie Kallenberg, *Probabilistic symmetries and invariance principles. Springer (2005)*.

Eine abschließende Bemerkung zu der Klasse Polyascher Prozesse. Die oben eingeführten Polyaschen Summenprozesse sind inspiriert durch die Arbeit von Blackwell, MacQueen [1]. Sie scheinen bisher als Punktprozesse noch nicht betrachtet worden zu sein. Sie haben einen ebenso fundamentalen Charakter wie Poisson'sche Prozesse.

Danksagung. Ich danke Herrn Fredos Papangelou für Bemerkungen, die zur Erhellung des historischen Ausgangspunktes des Begriffes Papangelou Kern, der Bedingung (Σ') und der partiellen Integrationsformel führten. Ebenso danke ich Herrn Benjamin Nehring für wertvolle Diskussionen der obigen Gedankengänge.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Blackwell, J. B. MacQueen, "Ferguson distributions via *Pólya* urn schemes", Ann. Statist. **1**, 353-355 (1973).
- [2] Buffon bicentenary symposium on stochastic geometry and directional statistics, Lake Sevan (Armenia). Adv. Appl. Prob. **9**, 423-447 (1977).
- [3] H. O. Georgii, "Canonical and grand canonical Gibbs states for continuum systems", Commun. math. Phys. **48**, 31-51 (1976).
- [4] O. Kallenberg, *Random measures* (Akademie-Verlag, Berlin, und Academic press, London, 1983).
- [5] K. Krickeberg, "The Cox process", Sympos. Math. Roma **9** (1972), Calcolo Probab. Teor. Turbolenza, 151-167 (1971)
- [6] K. Matthes, J. Kerstan, J. Mecke, *Infinitely divisible point processes* (Wiley 1978).
- [7] K. Matthes, J. Mecke, W. Warmuth, "Bemerkungen zu einer Arbeit von Nguyen Xuan Xanh und Hans Zessin" Math. Nachr. **88**, 117-127 (1979).
- [8] J. Mecke, "Stationäre Maße auf lokalkompakten Abelschen Gruppen", Z. W-Theorie verw. Geb. **9**, 36 - 58 (1967)
- [9] B. Nehring, "Markoffsche Bosefelder und Papangelousche Prozesse", Diplomarbeit. Bielefeld (2009).
- [10] J. Neveu, *Bases mathématiques des probabilités*, (Paris, 1964).
- [11] X. X. Nguyen, H. Zessin, "Integral and differential characterizations of the Gibbs process", Math. Nachr. **88**, 105-115 (1979).
- [12] F. Papangelou, "Point processes on spaces of flats and other homogeneous spaces", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **80**, 297-314 (1976).
- [13] S. Poghosyan, H. Zessin, "An integral characterization of random permutations. A point process approach", SFB-preprint, Bielefeld (2008).
- [14] C. J. Preston, *Random fields*, (Lecture notes in mathematics **534**, Springer 1976).
- [15] B. Rauchenschwandtner, *Gibbsprozesse und Papangeloukerne*. VWGÖ, (Wien, 1980).
- [16] D. Ruelle, "Superstable interactions in classical statistical mechanics", Commun. math. phys. **18**, 127-159 (1970).
- [17] Y. Takahashi, "A class of solutions of Bogolioubov system of equations for classical statistical mechanics of hard core particles", Scientific papers of the college of general education, University of Tokyo **26**, 15-26 (1976).

Поступила 18 ноября 2008