

РЯДЫ ПО СИСТЕМЕ ХААРА С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М. Г. ГРИГОРЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *gmarting@ysu.am*

Аннотация. Пусть $\chi = \{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ – система Хаара, нормированная в $L^2(0, 1)$ и пусть $M = \{M_s\}_{s=1}^\infty$ – любая фиксированная последовательность возрастающих неотрицательных целых чисел. В работе, по любой подсистеме системы Хаара χ вида $\{\varphi_k\} = \chi_S = \{\chi_n\}_{n \in S}$, где $S = S(M) = \{n_k\}_{k=1}^\infty = \{n \in V[p] : p \in M\}$, $V[0] = \{1, 2\}$ и $V[p] = \{2^p + 1, 2^p + 2, \dots, 2^{p+1}\}$ при $p = 1, 2, \dots$, построен ряд вида $\sum_{i=1}^\infty a_i \varphi_i$ с $a_i \searrow 0$, который универсален относительно частичных рядов как во всех классах $L^r(0, 1)$, $r \in (0, 1)$, в смысле сходимости почти всюду и в метрике $L^r(0, 1)$, так и в классе всех измеримых и конечных на отрезке $[0, 1]$ функций в смысле сходимости почти всюду. Существует ряд по системе Хаара с монотонными коэффициентами со следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримая функция $\mu(x)$, $x \in [0, 1]$ с $0 \leq \mu(x) \leq 1$ и $|\{x \in [0, 1], \mu(x) \neq 1\}| < \varepsilon$, такая, что этот ряд универсален в весовом пространстве $L_\mu[0, 1]$ относительно частичных рядов в смысле сходимости по норме $L_\mu[0, 1]$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Н. К. Бари (см. [1], стр. 527-530) установила, что для всякой измеримой и конечной на отрезке $[0, 1]$ функции $f(x)$ существует ряд по системе Хаара

$$(1) \quad \sum a_n \chi_n(x),$$

который сходится к $f(x)$ почти всюду (п.в.) на $[0, 1]$. Это утверждение было усилено в 1960 году А. А. Талаляном [2], который доказал существование ряда по системе Хаара вида (1), универсального в классе всех измеримых и конечных на отрезке $[0, 1]$ функций относительно частичных рядов в смысле сходимости почти всюду. Т.е. для любой измеримой и конечной на отрезке $[0, 1]$ функции $f(x)$ найдется возрастающая последовательность натуральных чисел $m_1 < m_2 < \dots$, для которой ряд $\sum a_{m_n} \chi_{m_n}(x)$ сходится к $f(x)$ п.в. на $[0, 1]$.

В 1977 Г. М. Мушегян [3] доказал, что каждый ряд по системе Хаара вида

$$(2) \quad \sum_{k=0}^\infty a_k \chi_k(x) \quad \text{с} \quad \sum_{k=0}^\infty a_k^2 \chi_k^2(x) \stackrel{\text{П.В.}}{=} +\infty \quad \text{и} \quad a_k \chi_k \stackrel{\text{П.В.}}{\rightarrow} 0,$$

является универсальным относительно перестановок в классе измеримых функций в смысле сходимости п.в., т.е. для каждой измеримой функции $f(x)$ члены

ряда (2) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд сходил к $f(x)$ п.в.

В 1976 в дипломной работе автора доказано, что каждый ряд вида (2) универсален в классе всех измеримых и конечных на отрезке $[0, 1]$ функций относительно частичных рядов в смысле сходимости п.в..

В настоящей работе доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Существует ряд по систем Хаара вида*

$$(3) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x), \quad a_k > a_{k+1} > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

обладающий следующим свойством:

- 1) *для каждого $r \in (0, 1)$ и для каждой функции $f \in L^r(0, 1)$ можно найти последовательность $\{\delta_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\delta_i = 0$ или 1 таким образом, чтобы ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i a_i \chi_i$$

сходил к f как в метрике $L^r(0, 1)$, так и п.в. в $[0, 1]$,

- 2) *ряд (3) универсален в классе всех измеримых и конечных на отрезке $[0, 1]$ функций относительно частичных рядов в смысле сходимости п.в..*

Теорема 2. *Существует ряд вида (3) со свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримая функция $\mu(x)$, $x \in [0, 1]$, $0 \leq \mu(x) \leq 1$ и $|\{x \in [0, 1], \mu(x) \neq 1\}| < \varepsilon$, такая, что ряд (3) универсален в весовом пространстве $L_{\mu}[0, 1]$ относительно частичных рядов в смысле сходимости по норме $L_{\mu}[0, 1]$.*

Эти теоремы следуют из более общих теорем 3 и 4. Прежде чем перейти к формулировкам теорем 3 и 4, напомним следующие определения.

Система функций $\chi_1 \equiv 1$ и

$$\chi_{2^k+m}(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{если } \frac{m-1}{2^k} < x < \frac{2m-1}{2^{k+1}}, \\ -2^{k/2} & \text{если } \frac{2m-1}{2^{k+1}} < x < \frac{m}{2^k}, \\ 0 & \text{для остальных } x \in [0, 1]. \end{cases} \quad m = 1, 2, \dots, 2^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

называется системой Хаара. Значения функций в точках разрыва для нас не существенны, и мы их не приводим. Нам будет удобно пользоваться также двоичной нумерацией функций системы Хаара, а именно, условимся писать $\chi_0^{(0)} = \chi_1$ и

$$(4) \quad \chi_k^{(m)} = \chi_{2^k+m}, \quad k \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots, 2^k.$$

В наших дальнейших рассуждениях будем считать, что $M = \{M_s\}_{s=1}^{\infty}$ — любая фиксированная последовательность возрастающих неотрицательных целых чисел. Определим подсистему системы Хаара следующим образом:

$$(5) \quad \chi_S = \{\chi_n\}_{n \in S}, \quad \text{где } S = S(M) = \{n_k\}_{k=1}^{\infty} = \{n \in V[p] : p \in M\},$$

и $V[0] = \{1, 2\}$, $V[p] = \{2^p + 1, 2^p + 2, \dots, 2^{p+1}\}$ при $p = 1, 2, \dots$

Система измеримых функций $\{f_n\} = F$ называется центрированной, если для любого n и $\Delta \subset \mathfrak{F}_n(F)$, где через $\mathfrak{F}_n(F)$ обозначена минимальная σ -алгебра, по которой измеримы функции $f_1(x), \dots, f_n(x)$ имеет место равенство

$$\int_{\Delta} f_{n+1}(x) dx = 0.$$

Через $\Psi = \{\psi\}$ обозначим семейство центрированных систем $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ со следующими условиями:

1. $\lim_{N \rightarrow \infty} \sup \left| \sum_{k=1}^N \psi_N(x) \right| = +\infty$ для почти всех $x \in [0, 1]$,
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(\sup_{s \geq k} |\psi_s(x)| \right) dx = 0$,
3. Каждый $\psi = \{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \Psi$ состоит из таких ступенчатых функций, что множество носителей $\{\Delta_k : k \in [q_m, q_{m+1}), q_m \nearrow, m \geq 1\}$ функций $\{\psi_k(x)\}_{k \in [q_m, q_{m+1})}$ есть разбиение интервала $(0, 1]$ и каждый носитель Δ_k является интервалом постоянства каждой функции из предыдущей группы $j \in [q_{m-1}, q_m)$ и $\lim_n |\Delta_n| = 0$.

Отметим, что для каждой центрированной системы $\psi = \{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \Psi$ в 1991 автором было доказано, что для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1(0, 1)$ можно найти функцию $\tilde{f}(x) \in L^1(0, 1)$, совпадающую с $f(x)$ на E , и числа $\alpha_k = 0$ или 1 такие, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k(x)$$

сходится к $\tilde{f}(x)$ в метрике $L^1(0, 1)$. Отсюда следует, что для каждой центрированной системы $\psi = \{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \Psi$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x)$$

квазиуниверсален относительно частичных рядов в $L^1(0, 1)$, т.е. для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$, с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$, такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1(E)$ можно найти числа $\alpha_k = 0$ или 1, такие, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k(x)$$

сходится к $f(x)$ в метрике $L^1(E)$.

Теорема 3. Пусть $\{\varphi_k\} = \chi_S$ (см. (5)) – подсистема системы Хаара. Тогда существует ряд вида

$$(6) \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i \quad \text{с} \quad a_i \searrow 0$$

такой, что

- 1) для каждого $r \in (0, 1)$ и для каждой функции $f \in L^r(0, 1)$ можно найти последовательность $\{\delta_i\}_{i=1}^\infty$, $\delta_i = 0$ или 1 таким образом, чтобы ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i a_i \varphi_i$$

сходилась к $f(x)$ как в метрике $L^r(0, 1)$, так и п.в. на $[0, 1]$,

- 2) ряд (6) универсален в классе всех измеримых и конечных на отрезке $[0, 1]$ функций относительно частичных рядов в смысле сходимости п.в..

Теорема 4. Для каждой центрированной системы $\psi = \{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty \in \Psi$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримая функция $\mu(x)$, для которой $0 \leq \mu(x) \leq 1$ при $x \in [0, 1]$ и $|\{x \in [0, 1] ; \mu(x) \neq 1\}| < \varepsilon$ такая, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x)$$

универсален в весовом пространстве $L_\mu[0, 1]$ относительно частичных рядов в смысле сходимости по норме $L_\mu[0, 1]$.

Отметим, что в работе [5] для подсистемы $\{\varphi_i(x)\} = \chi_S$ (см. (5)) доказано, что для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1(E)$ существует ряд вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_{k_i}, \quad \text{где } a_i \searrow 0 \text{ и } k_1 < k_2 < \dots,$$

который сходится к f по норме $L^1(E)$.

Небходимо отметить, что вопросам представления функций рядами по классическим и общим ортонормальным системам и о существовании различных типов универсальных рядов в смысле сходимости почти всюду и по мере посвящено много работ (см. [1]-[13]).

Первой работой, где построены универсальные в обычном смысле тригонометрические ряды в классе всех измеримых функций в смысле сходимости почти всюду, является работа Д. Е. Меньшова [6], а также работа В. Я. Козлова [7].

В работе [9] А. А. Талаляном установлено существование универсальных относительно перестановок рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ по произвольной ортонормированной полной системе $\{\varphi_n(x)\}$, $x \in [0, 1]$, в классе всех измеримых функций в смысле сходимости по мере на $[0, 1]$.

Тот факт, что существуют функциональные ряды, универсальные относительно перестановок в классе почти везде конечных измеримых функций, в смысле сходимости п.в., был отмечен Орличем [14]. Полезно также отметить, что Риман доказал, что всякий неабсолютно сходящийся числовой ряд универсален относительно перестановок в классе всех действительных чисел (см. [15], р. 317).

В работах [16]-[19] автором доказано, что

- 1) Существует ортонормированная система $\{\omega_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $x \in [0, 1]$, по которой можно построить ряд, универсальный одновременно относительно

перестановок и относительно частичных рядов, как в каждом $L^p[0, 1]$, $1 \leq p < 2$, в смысле сходимости по метрике $L^p[0, 1]$, $1 \leq p < 2$, так и в классе всех измеримых функций в смысле сходимости п.в..

- 2) По любой ортонормированной полной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ в $L^2[0, 1]$ существует ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^r < \infty, \quad \forall r > 2,$$

который удовлетворяет следующим условиям:

- а) ряд (3) универсален во всех $L^q_{[0,1]}$, $0 < q \leq 1$, одновременно относительно перестановок и относительно частичных рядов в смысле сходимости по метрике $L^q_{[0,1]}$,
- б) ряд (3) квазиуниверсален во всех $L^p_{[0,1]}$, $p \in [1, 2)$ одновременно относительно перестановок и частичных рядов.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ ЛЕММ

Лемма 1. Пусть даны числа $N_0 \in \mathcal{N}$, $\gamma \neq 0$, $\delta > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $r_1, r_2 \in (0, 1)$ и интервал Хаара $\Delta = (\frac{i-1}{2^\nu}, \frac{i}{2^\nu})$, $i \in [1, 2^\nu]$. Тогда существуют измеримое множество $E \subset [0, 1]$ и полином Q по подсистеме Хаара $\chi_S = \{\chi_{n_k}\} = \{\varphi_k\}$ вида

$$Q = \sum_{k=N_0}^N a_k \varphi_k,$$

такие, что

- 1) $0 \leq a_k < \varepsilon$ и ненулевые коэффициенты расположены в $\{a_k\}_{k=N_0}^N$ в убывающем порядке,
- 2) $|E| > 1 - \delta|\Delta|$,
- 3) $Q = \begin{cases} \gamma & \text{на } E \\ 0 & \text{вне } \Delta \end{cases}$
- 4) $\int_{\Delta} |\gamma \chi_{\Delta}(x) - Q(x)|^r dx < \varepsilon |\Delta| |\gamma|^r$, $r \in (0, 1)$,
- 5) $\max_{N_0 \leq m \leq N} \left(\int_{\Delta} \left| \sum_{k=N_0}^m a_k \varphi_k(x) \right|^r dx \right)^{1/r} < \frac{|\gamma| |\Delta|^{1/2}}{\varepsilon^2 (1 - r_2)}$, $r \in (r_1, r_2)$,
- 6) $\max_{N_0 \leq m \leq N} \left| \sum_{k=N_0}^m a_k \varphi_k(x) \right| \leq \begin{cases} |\gamma|/|\delta| & \text{при } x \in E, \\ 0 & \text{вне } \Delta. \end{cases}$

Доказательство: Для $s = 1, \dots, 2^k$, $k = 1, 2, \dots$ положим

$$(7) \quad q = \left\lceil \frac{1}{1 - r_2} \log_2 1/\varepsilon \right\rceil, \quad \Delta_k^{(s)} = \left(\frac{s-1}{2^k}, \frac{s}{2^k} \right).$$

Выделим подпоследовательность $\{h_i\}$ из $\{M_i\}$ таким образом, чтобы имело место

$$(8) \quad h_{i+1} - h_i \geq 2 \quad \text{для всех натуральных } i.$$

и возьмем натуральное число j настолько большим, чтобы имело место

$$(9) \quad h_j > \left\lceil 2 \log_2 |\gamma|/\varepsilon \right\rceil + \log_2 \widetilde{N}_0 + \nu,$$

где $\widetilde{N}_0$ определяется из условий $\chi_{\widetilde{N}_0} = \varphi_{N_0}$. Определим полином, полагая

$$Q_1 = 2^{-h_j/2} |\gamma| \sum_{s \in (\Delta_{h_j}^{(s)} \subset \Delta)} \chi_{h_j}^{(s)}$$

Полином Q_1 на отрезке Δ принимает значения γ и $-\gamma$. Через E_1 обозначим множество, на котором Q_1 равняется $-\gamma$. По индукции определим полиномы $Q_2, Q_3, \dots, Q_q$ и множества $E_2, E_3, \dots, E_q$ следующим образом:

$$(10) \quad Q_{i+1} = 2^{i-h_j+i/2} |\gamma| \sum_{s \in (\Delta_{h_j+i}^{(s)} \subset E_i)} \chi_{h_j+i}^{(s)},$$

$$(11) \quad E_{i+1} = \{t \in E_i : Q_{i+1}(t) \neq 2^i \gamma\}.$$

Ясно, что

$$(12) \quad |E_1| = |\Delta|/2 \quad \text{и} \quad |E_{i+1}| = |E_i|/2 \quad \text{для всех} \quad i = 1, 2, \dots, q-1,$$

и

$$\Delta \supset E_1 \supset E_2 \dots \supset E_q.$$

Определим полином Q следующим образом

$$(13) \quad Q(x) = \sum_{i=1}^q Q_i(x) = \sum_{k=N_0}^N a_k \varphi_k(x)$$

(см (4), (9), (10)), где

$$a_k = \int_0^1 Q(x) \varphi_k(x) dx.$$

Нетрудно, видеть, что все коэффициенты в разложениях полиномов Q_i неотрицательны, поэтому неотрицательными будут коэффициенты a_k . Все ненулевые коэффициенты полинома Q_i равняются $2^{i-1-h_j+i-1/2} |\gamma|$, а согласно (8) имеем, что

$$2^{i-1-h_j+i-1/2} |\gamma| \geq 2^{i-h_j+i/2} |\gamma|,$$

поэтому все ненулевые числа в $\{a_k\}_{k=N_0}^N$ расположены в убывающем порядке. Для окончания доказательства пункта 1) леммы остается заметить, что согласно неравенству (9)

$$2^{i-h_j+i/2} |\gamma| \leq 2^{-h_j/2} |\gamma| < \varepsilon.$$

Из (12) непосредственно следует, что

$$(14) \quad |E_q| = 2^{-q} |\Delta|.$$

а согласно (9)-(11) и (13) имеем, что

$$(15) \quad Q(x) = \begin{cases} \gamma & \text{на } \Delta \setminus E_q \\ -(2^q - 1)\gamma & \text{на } E_q \\ 0 & \text{вне } \Delta \end{cases}$$

Отсюда и из (14) для всех $r \in (0, 1)$ имеем

$$\int_{\Delta} |\gamma \chi_1(x) - Q(x)|^r dx = \int_{E_q} |2^q \gamma|^r dx = |\gamma|^r |\Delta| \varepsilon,$$

следовательно, имеем утверждение 4) леммы.

Из соотношений (7) и (15) для всех $r \in (r_1, r_2)$ получим

$$\begin{aligned} \max_{N_0 \leq m \leq N} \left(\int_{\Delta} \left| \sum_{k=N_0}^m a_k \varphi_k(x) \right|^r dx \right)^{1/r} &\leq \left(\int_0^1 Q^2(x) dx \right)^{1/2} \leq 2^{q/2} |\gamma| |\Delta|^{1/2} \\ &\leq \frac{|\gamma| |\Delta|^{1/2}}{\varepsilon^{2(1-r_2)}}. \end{aligned}$$

Осталось проверить выполнение условия 6) леммы. Учитывая вид полинома Q (см. (15)) и, используя равенство

$$S_n(x, Q) = \frac{1}{|\Delta_k^{(i)}|} \int_{\Delta_k^{(i)}} Q(x) dx, \quad x \in \Delta_k^{(i)}, \quad \forall n \in (2^{k-1}, 2^k], \quad i = 1, \dots, 2^k,$$

где через $S_n(x, f)$ обозначена n -ая частичная сумма ряда Фурье-Хаара функции $f(x) \in L^1[0, 1]$, нетрудно выбрать измеримое множество $E \subset \Delta \setminus E_q$ с $|E| > 1 - \delta |\Delta|$ такое, что при всех $x \in E$ имело бы место

$$|S_n(x, Q)| = \left| \sum_{m=0}^n c_m \chi_m(x) \right| \leq |\gamma| / \delta, \quad \text{где} \quad c_m = \int_0^1 Q(x) \chi_m(x) dx.$$

Отсюда и из (13) получим

$$\left| \sum_{k=N_0}^n a_k \varphi_k(x) \right| \leq \begin{cases} |\gamma| / \delta & \text{при } x \in E, \\ 0 & \text{вне } \Delta, \end{cases} \quad n \in [N_0, N].$$

Лемма 2. Пусть даны числа $\tilde{N} \in \mathcal{N}$, $0 < \varepsilon < \delta < 1$, $0 < r_1 < r_2 < 1$ и подсистема $\chi_S = \{\chi_{n_k}\} = \{\varphi_k\}$, тогда для любой функции $f \in L^1(0, 1)$, $\|f\|_{L^1} > 0$, существуют измеримое множество $E \subset [0, 1]$ и полином

$$Q = \sum_{k=\tilde{N}+1}^M a_k \varphi_k,$$

удовлетворяющие условиям

- 1) $0 \leq a_k < \varepsilon$ и ненулевые коэффициенты расположены в $\{a_k\}_{k=\tilde{N}+1}^M$ в убывающем порядке,
- 2) $|E| > 1 - \delta$,
- 3) $\int_0^1 |Q(x) - f(x)|^r dx < \varepsilon, \quad r \in (r_1, r_2)$,
- 4) $\max_{\tilde{N}+1 \leq m \leq M} \int_0^1 \left| \sum_{k=\tilde{N}+1}^m a_k \varphi_k(x) \right|^r dx < 2 \int_0^1 |f|^r dx + \varepsilon$,

$$5) \quad \max_{\tilde{N}+1 \leq m \leq M} \left| \sum_{k=\tilde{N}+1}^m a_k \varphi_k(x) \right| < 2|f|/\delta + \varepsilon, \quad x \in E.$$

Доказательство: Выберем непересекающиеся двоичные интервалы $\{\Delta_\nu\}_{\nu=1}^{\nu_0}$ и степенчатую функцию

$$(16) \quad \varphi = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}$$

таким образом, чтобы

$$(17) \quad 0 < \left[\varepsilon^{2(r_2-1)} |\gamma_\nu| |\Delta_\nu|^{1/2} \right]^{r_1} < \varepsilon/2, \quad 1 \leq \nu \leq \nu_0,$$

$$(18) \quad \int_0^1 |f - \varphi| dx < \bar{\varepsilon},$$

где

$$(19) \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon \delta^2}{4} (\|f(x)\|_{L_1} + 1)^{-r_2}.$$

Положим

$$(20) \quad B = \{x \in [0, 1] : |f(x) - \varphi(x)| < \bar{\varepsilon}\}.$$

Отсюда и из (18) и (19) вытекает, что

$$(21) \quad |B| > 1 - \delta/2.$$

Последовательным применением леммы 1, можно определить множества $E_\nu \subset [0, 1]$ и полиномы

$$(22) \quad Q_\nu = \sum_{j=m_\nu-1}^{m_\nu-1} a_j \varphi_j, \quad (m_0 = \tilde{N} + 1), \quad \nu = 1, \dots, \nu_0,$$

где $0 \leq a_k < \varepsilon$ и ненулевые коэффициенты в $\{\{a_k\}_{k=m_\nu-1}^{m_\nu-1}\}_{\nu=1}^{\nu_0}$ расположены в убывающем порядке, которые удовлетворяют условиям

$$(23) \quad |E_\nu| > 1 - \delta |\Delta_\nu|,$$

$$(24) \quad Q_\nu = \begin{cases} \gamma_\nu & \text{на } E_\nu \\ 0 & \text{вне } \Delta_\nu \end{cases},$$

$$(25) \quad \int_{\Delta_\nu} |\gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x) - Q_\nu(x)|^r dx < \bar{\varepsilon} |\Delta_\nu| |\gamma|^r, \quad r \in (r_1, r_2),$$

$$(26) \quad \max_{m_{\nu-1} \leq m \leq m_\nu-1} \left(\int_{\Delta_\nu} \left| \sum_{k=m_{\nu-1}}^m a_k \varphi_k(x) \right|^r dx \right)^{1/r} < \frac{|\gamma_\nu| |\Delta_\nu|^{1/2}}{\varepsilon^2 (1 - r_2)}, \quad r \in (r_1, r_2),$$

$$(27) \quad \max_{m_{\nu-1} \leq m \leq m_\nu-1} \left| \sum_{k=m_{\nu-1}}^m a_k \varphi_k(x) \right| < \begin{cases} |\gamma_\nu|/\delta & \text{при } x \in E_\nu, \\ 0 & \text{при } x \notin \Delta_\nu \end{cases}$$

Положим

$$(28) \quad E = \bigcap_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu \bigcap B,$$

$$(29) \quad Q = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu = \sum_{k=\tilde{N}+1}^M a_k \varphi_k,$$

Из (21), (23) и (27) следует, что

$$|E| > 1 - \delta.$$

В силу (16)-(19), (24), (25) и (29) для всех $r \in (r_1, r_2)$ будем иметь, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 |Q(x) - f(x)|^r dx &\leq \int_0^1 |f(x) - \varphi(x)|^r dx \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \int_0^1 |\gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x) - Q_\nu(x)|^r dx < \varepsilon, \end{aligned}$$

т.е. утверждения 1) - 4) леммы выполнены.

Теперь проверим выполнение утверждений 5) и 6). Для любого $\tilde{N} < m \leq M$ определим ν из условия $m_{\nu-1} \leq m < m_\nu$. Согласно (22) и (29) имеем

$$(30) \quad \sum_{k=\tilde{N}+1}^m a_k \varphi_k = \sum_{n=1}^{\nu-1} Q_n + \sum_{k=m_{\nu-1}}^m a_k \varphi_k.$$

Отсюда и из соотношений (16)-(18), (25) и (26) для всех $r \in (r_1, r_2)$ будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \sum_{k=\tilde{N}+1}^m a_k \varphi_k(x) \right|^r dx &\leq \sum_{n=1}^{\nu-1} \int_0^1 |Q_n(x) - \gamma_n \chi_{\Delta_n}(x)|^r dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\nu_0} \int_0^1 |\gamma_n \chi_{\Delta_n}(x)|^r dx + \int_0^1 \left| \sum_{k=m_{\nu-1}}^m a_k \varphi_k(x) \right|^r dx < 2 \int_0^1 |f(x)|^r dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ввиду того, что для каждой точки $x \in E$ $Q_\nu(x) = \gamma_\nu$, $\nu = 1, \dots, \nu_0$ (см. (24) и (28)), то из условий (16), (20), (27) и (30) при $x \in E$ получим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=\tilde{N}+1}^m a_k \varphi_k(x) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\nu} \gamma_n \chi_{\Delta_n}(x) + \sum_{n=m_\nu}^m a_n \varphi_n(x) \right| \\ &\leq |\varphi(x)| + 2|\gamma_n|/\delta \chi_{\Delta_n}(x) < 2|\varphi(x)|/\delta \leq 2|f(x)|/\delta + \varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть $\psi = \{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty \in \Psi$ - любая центрированная система. Тогда для каждой функции $f(x) \in L[0, 1]$ и для любых чисел $\delta > 0$, $N_0 > 1$ существуют числа $N > N_0$, $\alpha_k = 0$ или 1, $k \in [N_0, N]$ такие, что для любого измеримого множества $e \subset E$

$$1. \quad \int_E \left| \sum_{k=N_0}^N \alpha_k \psi_k(x) - f(x) \right| dx < \delta, \quad |E| > 1 - \delta,$$

$$2. \quad \max_{m \in [N_0, N]} \int_e \left| \sum_{k=N_0}^m \alpha_k \psi_k(x) \right| dx < \delta + \int_e |f(x)| \mu(x) dx.$$

Доказательство этой леммы следует из доказательства леммы 2 работы [4].

Лемма 4. Пусть $\psi = \{\psi_k(x)\} \in \Psi$ – любая центрированная система, тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти весовую функцию $\mu(x) > 0$ с $|\{x \in [0, 1] : \mu(x) \neq 1\}| < \varepsilon$, такую что для каждой функции $f(x) \in L_\mu[0, 1]$ и для любых чисел $\delta > 0$, $N > 1$ существуют числа $M > N$ и $\alpha_k = 0$ или 1, $k \in [N, M]$, такие что

$$1. \quad \int_0^1 \left| \sum_{k=N}^M \alpha_k \psi_k(x) - f(x) \right| \mu(x) dx < \delta,$$

$$2. \quad \max_{m \in [N, M]} \int_0^1 \left| \sum_{k=N}^m \alpha_k \psi_k(x) \right| \mu(x) dx < \delta + \int_0^1 |f(x)| \mu(x) dx.$$

Доказательство: Пусть $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty$ – всюду в $L[0, 1]$ плотное множество. Последовательно применяя лемму 3, можем найти последовательности множеств $\{E_s\}_{s=1}^\infty$ и полиномов

$$(31) \quad P_s(x) = \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)} \psi_k(x) \quad \text{с} \quad c_k^{(s)} = 0 \text{ или } 1, \quad s = 1, 2, \dots,$$

которые удовлетворяют условиям

$$(32) \quad \int_{E_s} |P_s(x) - f_s(x)| dx < 2^{-2(s+1)},$$

$$(33) \quad |E_s| > 1 - 2^{-2(s+1)}, \quad E_s \subset [0, 1],$$

$$(34) \quad \max_{N_{s-1} \leq p < N_s} \left[\int_e \left| \sum_{k=N_{s-1}}^p c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| dx \right] < 2^{-2(s+1)} + \int_e |f_s(x)| dx.$$

для любого измеримого множества $e \in E_s$. Положим

$$(35) \quad \begin{cases} \Omega_n = \bigcap_{s=n}^\infty E_s, & n = 1, 2, \dots, \\ E = \Omega_{n_0} = \bigcap_{s=n_0}^\infty E_s, & n_0 = \lfloor \log_{1/2} \varepsilon \rfloor + 1, \\ B = \bigcup_{n=n_0}^\infty \Omega_n = \Omega_{n_0} \cup \left(\bigcup_{n=n_0+1}^\infty \Omega_n \setminus \Omega_{n-1} \right). \end{cases}$$

Очевидно, что (см. (33)) $|B| = 1$ и $|E| > 1 - \varepsilon$. Определим функцию $\mu(x)$ следующим образом

$$(36) \quad \mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \cup ([0, 1] \setminus B); \\ \mu_n, & x \in \Omega_n \setminus \Omega_{n-1}, \quad n \geq n_0 + 1, \end{cases}$$

где

$$(37) \quad \begin{cases} \mu_n = \left[2^{2n} \prod_{s=1}^n h_s \right]^{-1}, \\ h_s = \|f_s(x)\| + \max_{N_{s-1} \leq p < N_s} \left\| \sum_{k=N_{s-1}}^p c_k^{(s)} \psi_k(x) \right\| + 1 \end{cases}$$

и

$$\|g(x)\| = \int_0^1 |g(x)| dx, \quad g(x) \in L[0, 1].$$

Из (35)-(37) получим, что $\mu(x)$ – измеримая функция, $0 < \mu(x) \leq 1$ и

$$|\{x \in [0, 1] : \mu(x) \neq 1\}| < \varepsilon.$$

Учитывая (35)- (37), для всех $s \geq n_0$ и $p \in [N_{s-1}, N_s)$ получим

$$(38) \quad \begin{aligned} & \int_{[0,1] \setminus \Omega_s} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^p c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| \mu(x) dx \\ &= \sum_{n=s+1}^{\infty} \left[\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^p c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| \mu_n dx \right] \\ &\leq \sum_{n=s+1}^{\infty} 2^{-2n} \left[\int_0^1 \left| \sum_{k=N_{s-1}}^p c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| h_s^{-1} dx \right] < \frac{1}{3} 2^{-2s}. \end{aligned}$$

В силу условий (32), (35)- (37), для всех $s \geq n_0$

$$(39) \quad \begin{aligned} & \int_0^1 |P_s(x) - f_s(x)| \mu(x) dx = \int_{\Omega_s} |P_s(x) - f_s(x)| \mu(x) dx \\ &+ \int_{[0,1] \setminus \Omega_s} |P_s(x) - f_s(x)| \mu(x) dx = \sum_{n=s+1}^{\infty} \left[\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |P_s(x) - f_s(x)| \mu_n dx \right] \\ &\leq \sum_{n=s+1}^{\infty} 2^{-2s} \left[\int_0^1 \left(|f_s(x)| + \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| \right) h_s^{-1} dx \right] < 2^{-2s}/3 < 2^{-2s}. \end{aligned}$$

Учитывая (34), (35)- (37) и (38), для всех $p \in [N_{s-1}, N_s)$ и $s \geq n_0 + 1$ получим

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=N_{s-1}}^p c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| \mu(x) dx = \int_{\Omega_s} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^p c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| \mu(x) dx$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{[0,1] \setminus \Omega_s} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^p c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| \mu(x) dx \\
& < \sum_{n=n_0+1}^s \left[\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^p c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| dx \right] \mu_n + \frac{1}{3} 2^{-2s} \\
& < \sum_{n=n_0+1}^s \left(2^{-2(s+1)} + \int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |f_s(x)| dx \right) \mu_n + \frac{1}{3} 2^{-2s} \\
& = 2^{-2(s+1)} \sum_{n=n_0+1}^s \mu_n + \int_{\Omega_s} |f_s(x)| \mu(x) dx + \frac{1}{3} 2^{-2s} \\
(40) \quad & < \int_0^1 |f_s(x)| \mu(x) dx + 2^{-2s}.
\end{aligned}$$

Пусть $f(x) \in L_\mu^1[0, 1]$, т.е.

$$\int_0^1 |f(x)| \mu(x) dx < \infty.$$

Из последовательности $\{f_s(x)\}_{s=1}^\infty$, возьмем такую функцию $f_{s_0}(x)$, чтобы

$$2^{-2s_0} + \int_0^1 |f(x) - f_{s_0}(x)| \mu(x) dx < \delta/4, \quad N_{s_0-1} > N.$$

Положим $M = N_{s_0-1}$ и

$$\alpha_k = \begin{cases} c_k^{(s_0)} & \text{при } k \in [N_{s_0-1}, N_{s_0}) \\ 0 & \text{при } k \in [N, N_{s_0-1}) \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что числа M и α_k , $k \in [N, M]$ удовлетворяют требованиям леммы 4.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 3. Если обозначить через

$$(41) \quad \{f_k(x)\}_{k=1}^\infty, \quad x \in [0, 1],$$

последовательность всех алгебраических многочленов с рациональными коэффициентами и последовательно применить лемму 2, то можно найти последовательности множеств $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ и полиномов по системе $\{\varphi_n(x)\}$

$$(42) \quad Q_k^{(j)}(x) = \sum_{i=N_{j,k}}^{M_{j,k}} a_{n_i} \varphi_{n_i}(x),$$

где

$$(43) \quad N_{1,1} = 1, \quad N_{j+1,1} = M_{j,j} + 1, \quad N_{j,k} = M_{j,k-1} + 1, \quad 2 \leq k \leq j,$$

которые удовлетворяют условиям:

$$(44) \quad 2^{-j} > a_{n_i} \geq a_{n_{i+1}} > 0, \quad i \in [N_{j,k}, M_{j,k}], \quad k \in [2, j], \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$(45) \quad \int_0^1 \left| Q_k^{(j)}(x) - f_j(x) \right|^r dx < 2^{-4j+1}, \quad k \in [2, j], \quad r \in [2^{-j}, 1 - 2^{-j}],$$

$$(46) \quad \max_{N_{j,k} \leq m \leq M_{j,k}} \int_0^1 \left| \sum_{i=N_{j,k}}^m a_{n_i} \varphi_{n_i}(x) \right|^r dx < 2 \int_0^1 |f_j(x)|^r dx + 2^{-j}, \quad k \in [2, j], \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$(47) \quad \max_{N_{j,k} \leq m \leq M_{j,k}} \left| \sum_{i=N_{j,k}}^m a_{n_i} \varphi_{n_i}(x) \right| < 2^k |f_j(x)| + 2^{-j}, \quad x \in G_k^{(j)}, \quad 2 \leq k \leq j,$$

$$(48) \quad |G_k^{(j)}| > 1 - 2^{-k}, \quad 2 \leq k \leq j.$$

Рассмотрим ряд

$$(49) \quad \sum_{s=1}^{\infty} a_s \varphi_s(x), \quad \text{где } a_s = a_{n_i} \text{ при } s \in [n_i, n_{i+1}).$$

очевидно, что $a_s \searrow 0$ (см. (44) и (49)). Покажем, что ряд (49) – искомый. В самом деле, пусть $r \in (0, 1)$, тогда для некоторого $j_0 \in \mathbb{N}$ имеем $r \in (1/j_0, 1 - 1/j_0)$. Для каждой функции $f(x) \in L_{(0,1)}^r$ возьмем функцию $f_{\nu_1}(x)$, $\nu_1 > j_0$ из последовательности (41) такую, что

$$\int_0^1 |f - f_{\nu_1}|^r dx < 2^{-4 \cdot 1}.$$

Предположим, что уже определены числа $j_0 < \nu_1 < \dots < \nu_{q-1}$, полиномы $Q_1^{(\nu_1)}, \dots, Q_{q-1}^{(\nu_{q-1})}$ и множества $G_1^{(\nu_1)}, \dots, G_{q-1}^{(\nu_{q-1})} \subset [0, 1]$, удовлетворяющие условиям

$$(50) \quad \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{n=1}^s Q_n^{(\nu_n)} \right|^r dx < 2 \cdot 2^{-4(s+1)}, \quad s \in [2, q-1],$$

$$(51) \quad \max_{N_{\nu_n, n} \leq m \leq M_{\nu_n, n}} \int_0^1 \left| \sum_{i=N_{\nu_n, n}}^m a_{n_i} \varphi_{n_i}(x) \right|^r dx < 2 \int_0^1 |f_{\nu_n}(x)|^r dx + 2^{-n},$$

$$(52) \quad \max_{N_{\nu_n, n} \leq m \leq M_{\nu_n, n}} \left| \sum_{i=N_{\nu_n, n}}^m a_{n_i} \varphi_{n_i}(x) \right| < 2^n |f_{\nu_n}(x)| + 2^{-n}, \quad x \in G_n^{(\nu_n)},$$

$$(53) \quad |G_n^{(\nu_n)}| > 1 - 2^{-n}, \quad 2 \leq n \leq q-1.$$

Возьмем функцию $f_{\nu_q}(x)$, $\nu_q > \nu_{q-1}$ из последовательности (41) такую, что

$$(54) \quad \int_0^1 \left| \left[f(x) - \sum_{j=1}^{q-1} Q_j^{(\nu_j)}(x) \right] - f_{\nu_q}(x) \right|^r dx < 2^{-4(q+1)}.$$

Отсюда и из (50) вытекает

$$(55) \quad \int_0^1 |f_{\nu_q}|^r dx < \frac{1}{2^4} 4^{-4q} + 2 \cdot 2^{-4q}.$$

Обозначая

$$(56) \quad B_q = \{x \in [0, 1]; |f_{\nu_q}(x)| < 2^{-3q}\}, \quad q \geq 2,$$

будем иметь

$$2^{-3qr} |cB_q| < \int_0^1 |f_{\nu_q}(x)|^r dx < 3 \cdot 2^{-4q}, \quad cB_q = [0, 1] \setminus B_q,$$

следовательно,

$$(57) \quad |B_q| > 1 - 3 \cdot 2^{-q}.$$

Из условий (45) и (54) следует

$$(58) \quad \int_0^1 |f(x) - \sum_{j=1}^q Q_j^{(\nu_j)}|^r dx < 4^{-4(q+1)} + 4^{-4\nu_q} < 4^{-4q} + 2 \cdot 4^{-4(q+1)},$$

$$(59) \quad \max_{N_{\nu_q, q} \leq m \leq M_{\nu_q, q}} \int_0^1 \left| \sum_{i=N_{\nu_q, q}}^m a_{n_i} \varphi_{n_i}(x) \right|^r dx < 4^{-4q+2},$$

$$(60) \quad \max_{N_{\nu_q, q} \leq m \leq M_{\nu_q, q}} \left| \sum_{i=N_{\nu_q, q}}^m a_{n_i} \varphi_{n_i}(x) \right| < 2^q |f_{\nu_q}(x)| + 2^{-\nu_q}, \quad x \in G_q^{(\nu_q)}.$$

Положим

$$(61) \quad E_q = B_q \cap G_q^{(\nu_q)}$$

(см. (48) и (57)). Очевидно, что

$$(62) \quad |E_q| > 1 - 4 \cdot 2^{-q}.$$

Учитывая соотношения (56), (60) и (61), получим

$$(63) \quad \max_{N_{\nu_q, q} \leq m \leq M_{\nu_q, q}} \left| \sum_{i=N_{\nu_q, q}}^m a_{n_i} \varphi_{n_i}(x) \right| < 2^{-2q+1}, \quad x \in E_q.$$

Ясно, что таким образом по индукции определяются последовательности полиномов $\{Q_q^{(\nu_q)}\}_{q=1}^\infty$ из (42) и множеств $\{G_q^{(\nu_q)}\}_{q=1}^\infty$, удовлетворяющих условиям (58), (59), (62) и (63) для всех $q \geq 2$. Положим

$$(64) \quad A_q = \left\{ x \in [0, 1] : \left| \sum_{j=1}^q Q_j^{(\nu_j)} - f(x) \right| < 2^{-q-1} \right\},$$

$$(65) \quad E = \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{q=n}^\infty (A_q \cap E_q).$$

В силу (58), (62) и (65)

$$|E| = 1.$$

Пусть $x \in E$. Тогда для некоторого натурального числа n_0 будем иметь $x \in A_q \cap E_q$ для всех $q \geq n_0$. Следовательно, из (63)- (65) вытекает

$$\left| \sum_{j=1}^q Q_j^{(\nu_j)} - f(x) \right| < 2^{-q}, \quad q \geq n_0,$$

$$\max_{N_{\nu_q, q} \leq m \leq M_{\nu_q, q}} \left| \sum_{i=N_{\nu_q, q}}^m a_{n_i} \varphi_{n_i}(x) \right| < 2^{-q}, \quad q \geq n_0.$$

Отсюда получим, что ряд

$$(66) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k a_k \varphi_k(x)$$

(см. (49)), где

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{если } k = n_i, \text{ где } i = \bigcup_{q=1}^{\infty} [N_{\nu_q, q}, M_{\nu_q, q}] \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

сходится к $f(x)$ п.в. на $[0, 1]$. Аналогично можно доказать, что ряд (66) сходится к $f(x)$ в метрике $L^r_{(0,1)}$, т.е. пункт 1) теоремы 3 доказан.

Подобными рассуждениями доказывается и пункт 2) теоремы 3. Теорема 3 доказана

Доказательство теоремы 4: следует из доказательства теоремы 3, с использованием леммы 4 вместо леммы 2.

Если в теореме 4 в качестве центрированной системы $\psi = \{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \Psi$, возьмем $\psi_k(x) = a_k \chi_k(x)$ где $a_k \searrow 0$, $a_k \notin l^2$, а $\{\chi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — система Хаара, то получим теорему 2 (см. [11]).

Abstract. Let $\chi = \{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ be the Haar system normalized in $L^2(0, 1)$ and $M = \{M_s\}_{s=1}^{\infty}$ be an arbitrary, increasing sequence of nonnegative integers. For any subsystem of χ of the form $\{\varphi_k\} = \chi_S = \{\chi_n\}_{n \in S}$, where $S = S(M) = \{n_k\}_{k=1}^{\infty} = \{n \in V[p] : p \in M\}$, $V[0] = \{1, 2\}$ and $V[p] = \{2^p + 1, 2^p + 2, \dots, 2^{p+1}\}$ for $p = 1, 2, \dots$ a series of the form $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i$ with $a_i \searrow 0$ is constructed, that is universal with respect to partial series in all classes $L^r(0, 1)$, $r \in (0, 1)$, in the sense of a.e. convergence and in the metric of $L^r(0, 1)$. The constructed series is universal in the class of all measurable, finite functions on $[0, 1]$ in the sense of a.e. convergence. It is proved that there exists a series by Haar system with decreasing coefficients, which has the following property: for any $\varepsilon > 0$ there exists a measurable function $\mu(x)$, $x \in [0, 1]$, such that $0 \leq \mu(x) \leq 1$ and $|\{x \in [0, 1], \mu(x) \neq 1\}| < \varepsilon$, and the series is universal in the weighted space $L_{\mu}[0, 1]$ with respect to subseries, in the sense of convergence in the norm of $L_{\mu}[0, 1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Н. Лузин, *Интеграл и тригонометрический ряд* (Москва, 1951).
- [2] А. А. Талалян, "О рядах, универсальных относительно перестановок", Изв. АН СССР, сер. матем. **24**, 567-604 (1960).

- [3] Г. М. Мушегян, “Об универсальности рядов относительно перестановок”, Изв. АН АРМ. ССР, сер. матем. **12** (4), 278-302 (1977).
- [4] M. G. Grigorian, “On the Convergence of Fourier Series in the Metric of L^1 ”, **17** (3), 211-237, 1991.
- [5] М. Г. Григорян, С. Л. Гогян, “О переставленных рядах по системе Хаара”, Изв. НАН Армении, сер. матем. **42** (2), 92-108, 2007.
- [6] Д. Е. Меньшов, “О частичных суммах тригонометрических рядов”, Мат. сборник **20** (2), 197-238 (1947).
- [7] В. Я. Козлов, “О полных системах ортогональных функций”, Мат. сборник **26** (3), 351-364 (1950).
- [8] А. А. Талалян, “О сходимости почти всюду подпоследовательностей частичных сумм общих ортогональных рядов”, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем. **10** (3), 17-34 (1957).
- [9] А. А. Талалян, “Представление измеримых функций рядами”, УМН **15** (5), 567-604 (1960).
- [10] В. И. Иванов, “Представление функций рядами в метрических симметричных пространствах без линейных функционалов”, Труды МИАН СССР **189**, 34-77 (1989).
- [11] П. Л. Ульянов, “О рядах по системе Хаара”, Мат. Сборник, **63(105)** (3), 356-391 (1964).
- [12] Ф. Г. Арутюнян, “Представление функций кратными рядами”, ДАН Арм. ССР **64** (2), 72-76 (1976).
- [13] Н. Г. Погосян, “Представление измеримых функций базисами $L^p_{[0,1]}$, $p \geq 2$ ”, ДАН Арм. ССР **64** (4), 205-209 (1976).
- [14] W. Orlicz, “Über die unabhängig von der Anordnung fast überall konvergenten Reihen”, Bull de l' Academie Polonaise des Sciences, **81**, 117 - 125 (1927).
- [15] Г. М. Фихтенгольца *Курс дифференциального и интегрального исчисления 2*, (Наука, Москва, 1996).
- [16] М. Г. Григорян, “Представление функций классов L^p , $1 \leq p < 2$ ортогональными рядами”, ДАН Арм. ССР **67** (5), ??? (1978).
- [17] М. Г. Григорян, “О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам”, Мат. сборник **181** (8), 1011-1030 (1990).
- [18] M. G. Grigorian, “On the Representation of Functions by Orthogonal Series in Weighted L^p Spaces”, Studia. Math., **134** (3), 207-216 (1999).
- [19] М. Г. Григорян, “Пример универсального ортогонального ряда”, Изв. НАН Армении, сер. матем. **35** (4), 44-64 (2000).

Поступила 21 марта 2007