Известия НАН Армении. Математика, том 42, н. 4, 2007, стр. 27-36

ЗАДАЧА КОШИ В КЛАССЕ МОНОТОННО ВОЗРАСТАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Н. Е. ТОВМАСЯН И О. А. БАБАЯН

Армянский Государственный Инженерный Университет
E-mail: barmenak@gmail.com

Аннотация. В работе устанавливаются условия разрешимости задачи Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений в классе монотонных функций. Полученные результаты применяются для выяснения возможности полета летательного аппарата по заданной траектории с учетом воздействия сил торможения.

1. ОБЗОР ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

При определении основных параметров полета летательных аппаратов по заданной траектории, с учетом воздействия силы тяжести, реактивной силы, силы сопротивления среды и силы торможения, возникает следующая задача:

$$u'(x) = a(x)u(x) + w(x), \quad 0 \le x \le x_0, \tag{1}$$

$$u(0) = m_0 > 0, \tag{2}$$

$$u'(x) \ge 0, \quad 0 \le x \le x_0, \tag{3}$$

где m_0 и x_0 – заданные положительные конечные постоянные, $u(x)$ – искомая, а $a(x)$ и $w(x)$ – заданные, непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[0, x_0]$. Ясно, что задача(1), (2) без дополнительного условия (3) всегда имеет единственное решение, однако это решение не всегда удовлетворяет условию (3) и проверка этого условия в большинстве случаев представляет определенную трудность.

Цель данной работы – установить условие разрешимости задачи (1)-(3), не решая заранее эту задачу. Если задача (1)-(3) имеет решение, то очевидно, этим решением является решение задачи (1)-(2), которое выписывается в явном виде через систему интегралов ([1]).

Рассмотрим следующие четыре случая.

(1) $a(x) \ge 0$, $w(x) \ge 0$,
(2) $a(x) < 0$, $w(x) \le 0$ или $a(x) \le 0$, $w(x) < 0$,
(3) $a(x) > 0$, $w(x) < 0$,
(4) $a(x) < 0$, $w(x) > 0$.

В общем случае, разбивая интервал $[0, x_0]$, можем привести задачу (1)-(3) к одному из этих случаев.

Легко видеть, что в первом случае задача (1)-(3) всегда разрешима, а во втором случае не имеет решения. Рассмотрим случай 3. Обозначая

$$A(x) = -a(x), \quad W(x) = -\frac{w(x)}{a(x)} \tag{4}$$

приходим к задаче

$$u'(x) = A(x)\left(W(x) - u(x)\right), \quad 0 \le x \le x_0, \tag{5}$$

$$u(0) = m_0 > 0, \tag{6}$$

$$u'(x) \ge 0, \quad 0 \le x \le x_0, \tag{7}$$

где $A(x) < 0$ и $W(x) > 0$ при $0 \le x \le x_0$. В работе доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть в задаче (5)-(7)*

$$A(x) < 0, \quad W(x) > 0, \quad 0 \le x \le x_0. \tag{8}$$

Тогда:

1) *если $W'(x) \le 0$, $0 \le x \le x_0$, то для разрешимости задачи (5)-(7) необходимо и достаточно, чтобы m_0 и $W(x)$ удовлетворяли условию*

$$m_0 \ge W(0), \tag{9}$$

2) *если $W'(x) > 0$, $0 \le x \le x_0$, то для разрешимости задачи (5)-(7) необходимо и достаточно, чтобы m_0, $W(x)$ и $A(x)$ удовлетворяли условию*

$$m_0 \ge max\left(b_0, W(0)\right), \tag{10}$$

где

$$b_0 = \Phi(x_0)W(x_0) - \int_0^{x_0} \Phi(x)A(x)W(x)dx, \tag{11}$$

$$\Phi(x) = \exp\left(\int_0^x A(t)dt\right). \tag{12}$$

Теперь рассмотрим случай 4. Используя обозначения (4), приходим к задаче (5)-(7), где $A(x) > 0$, $W(x) > 0$, $0 \le x \le x_0$.

Теорема 2. *Пусть в задаче (5)-(7)*

$$A(x) > 0, \quad W(x) > 0, \quad 0 \le x \le x_0, \tag{13}$$

Тогда

1) *если $W'(x) \ge 0$, $0 \le x \le x_0$, то для разрешимости задачи (5)-(7) необходимо и достаточно, чтобы m_0 и $W(x)$ удовлетворяли условию*

$$m_0 \le W(0), \tag{14}$$

2) *если $W'(x) < 0$, $0 \le x \le x_0$, то для разрешимости задачи (5)-(7) необходимо и достаточно, чтобы m_0, $W(x)$ и $A(x)$ удовлетворяли условиям*

$$b_0 > 0 \quad \text{и} \quad m_0 \le min\left(W(x_0), b_0\right), \tag{15}$$

где b_0 определяется по формуле (11).

Обобщая вышесказанное, окончательно получаем следующие условия для разрешимости задачи (1)-(3).

Теорема 3. 1. *$a(x) \geq 0$ и $w(x) \geq 0$. В этом случае задача (1)-(3) всегда разрешима.*
2. *$a(x) < 0$ и $w(x) \leq 0$ или $a(x) \leq 0$ и $w(x) < 0$. В этом случае задача (1)-(3) не имеет решения.*
3. *$a(x) > 0$ и $w(x) < 0$. В этом случае условия разрешимости задачи (1)-(3) определяются теоремой 1, где функции $A(x)$ и $W(x)$ определяются формулами (4).*
4. *$a(x) < 0$ и $w(x) > 0$. В этом случае условия разрешимости задачи (1)-(3) определяются теоремой 2, где функции $A(x)$ и $W(x)$ определяются формулами (4).*

В параграфе 2 доказываются теоремы 1-3. Далее, в параграфе 3 рассматривается общий случай задачи (1)-(3). В параграфе 4 полученные результаты используются для исследования полета летательного аппарата по заданной траектории.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Сначала отметим, что решение задачи (5)-(7) определяется формулой (см. [1]):

$$u(x) = \frac{m_0}{\Phi(x)} + \frac{1}{\Phi(x)} \int_0^x \Phi(t)A(t)W(t)dt, \tag{16}$$

где функция $\Phi(x)$ определяется формулой (12).

2.1. **Доказательство теоремы 1.** 1. Пусть

$$W'(x) \leq 0, \quad 0 \leq x \leq x_0. \tag{17}$$

Из (5)-(7) и (8) при $x = 0$ имеем условие (9). Следовательно, условие (9) необходимо для разрешимости задачи (5)-(7). Теперь докажем, что это условие является также достаточным для разрешимости этой задачи. Из (5) и (8) следует, что условие (7) равносильно условию

$$W(x) \leq u(x), \quad 0 \leq x \leq x_0. \tag{18}$$

Подставляя $u(x)$ из (16) в (18), получим

$$\psi(x) \equiv \Phi(x)W(x) - \int_0^x \Phi(t)A(t)W(t)dt - m_0 \leq 0, \quad 0 \leq x \leq x_0. \tag{19}$$

Так как $\Phi'(x) = A(x)\Phi(x)$, то из (17) и (19) получим

$$\psi'(x) = \Phi'(x)W(x) + \Phi(x)W'(x) - \Phi(x)A(x)W(x) \leq 0.$$

Отсюда следует, что условие (19) выполняется тогда и только тогда, когда $\psi(0) \leq 0$, т.е. когда $m_0 \geq W(0)$.

2. Теперь докажем вторую часть теоремы. Пусть

$$W'(x) > 0, \quad 0 \le x \le x_0. \tag{20}$$

Из (5)-(7) и (8) при $x = 0$ имеем условие

$$m_0 \ge W(0). \tag{21}$$

Следовательно, оно необходимо для разрешимости задачи (5)-(7). Так же, как и в первой части доказательства, получим, что задача (5)-(7) имеет решение тогда и только тогда, когда имеет место неравенство (19). Из (19) и (20) получим $\psi'(x) > 0$, $0 \le x \le x_0$. Поэтому условие (19) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\psi(x_0) \le 0. \tag{22}$$

Подставляя $\psi(x)$ из (19) в (22) и имея ввиду обозначение (11), получим

$$\Phi(x_0)W(x_0) - m_0 - \int_0^{x_0} \Phi(t)A(t)W(t)dt \le 0,$$

$$b_0 - m_0 \le 0 \quad \Longrightarrow \quad m_0 \ge b_0.$$

Отсюда и из (21) следует, что $m_0 \ge \max(b_0, W(0))$. Теорема доказана.

2.2. **Доказательство теоремы 2.** 1. Пусть

$$W'(x) \ge 0, \quad 0 \le x \le x_0. \tag{23}$$

Из (5)-(7) и (13) при $x = 0$ имеем условие (14). Следовательно, оно необходимо для разрешимости задачи (5)-(7). Теперь докажем, что это условие является также достаточным для разрешимости этой задачи. Из (5) и (13) следует, что условие (7) равносильно условию

$$W(x) \ge u(x), \quad 0 \le x \le x_0. \tag{24}$$

Подставляя $u(x)$ из (16) в (24), получим

$$\psi(x) = \Phi(x)W(x) - \int_0^x \Phi(t)A(t)W(t)\,dt - m_0 \ge 0, \quad 0 \le x \le x_0. \tag{25}$$

Так как $\Phi'(x) = A(x)\Phi(x)$, то из (23) и (25) имеем

$$\psi'(x) = \Phi(x)W'(x) \ge 0, \quad 0 \le x \le x_0.$$

Отсюда следует, что условие (25) имеет место тогда и только тогда, когда $\psi(0) \ge 0$, т.е. $m_0 \le W(0)$.

2. Пусть

$$W'(x) < 0, \quad 0 \le x \le x_0. \tag{26}$$

Из (5)-(7) и (13) при $x = 0$ имеем условие

$$m_0 \le W(x_0) \tag{27}$$

следовательно, оно необходимо для разрешимости задачи (5)-(7). Из (26) аналогично получим, что задача (5)-(7) имеет решение тогда и только тогда, когда имеет место неравенство (25). Из (25) и (27) получим $\psi'(x) \le 0$, $0 \le x \le x_0$. Поэтому условие (25) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\psi(x_0) \le 0. \tag{28}$$

Подставляя $\psi(x)$ из (25) в (28) и имея ввиду обозначение (12), получим $0 < m_0 \le b_0$. Отсюда и из (27) следует, что $m_0 \le min\,(W(x_0), b_0)$. Теорема доказана.

3. ЗАДАЧА (1)-(3) В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Введем обозначения:

$$\psi_1(x) = \Phi(x)W(x) - \int_0^x \Phi(t)A(t)W(t)\,dt,$$

$$b = \min_{0\le x\le x_0} \psi_1(x), \quad B = \max_{0\le x\le x_0} \psi_1(x).$$

Пусть $A(x)$ и $W(x)$ удовлетворяют условиям (8). Из (5)-(7) имеем $u(x) \ge W(x)$, $0 \le x \le x_0$, и, следовательно,

$$u(0) = m_0 \ge W(0). \tag{29}$$

Таким образом, условие (29) необходимо для разрешимости задачи (5)-(7).

В параграфе 2 мы доказали, что условие (19) необходимо и достаточно для разрешимости задачи (5)-(7). Это условие можно записать в виде

$$m_0 \ge \psi_1(x), \quad 0 \le x \le x_0,$$

а это в свою очередь записывается в виде

$$m_0 \ge B. \tag{30}$$

Итак, получена следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (8). Тогда для разрешимости задачи (5)-(7) необходимо и достаточно, чтобы $A(x)$, $W(x)$ и m_0 удовлетворяли условию*

$$m_0 \ge \max(W(0), B). \tag{31}$$

Замечание 1. *Из доказательства теоремы 4 следует, что условие (31) эквивалентно условию (30).*

Теперь пусть $A(x)$ и $W(x)$ удовлетворяют условиям (13). Из (5)-(7) имеем $m_0 = u(0) \le u(x) \le W(x)$, $0 \le x \le x_0$. Отсюда следует, что

$$m_0 \le W(0). \tag{32}$$

Следовательно, условие (32) необходимо для разрешимости задачи (5)-(7).

В параграфе 2 мы доказали, что условие (25) необходимо и достаточно для разрешимости задачи (5)-(7). Это условие можно записать в виде

$$m_0 \leq \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq x_0,$$

а это условие в свою очередь записывается в виде

$$0 < m_0 \leq b. \tag{33}$$

Таким образом получена

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (13). Тогда для разрешимости задачи (5)-(7) необходимо и достаточно, чтобы $A(x)$, $W(x)$ и m_0 удовлетворяли условиям*

$$W(0) > 0, \quad 0 < m_0 \leq \min(W(0), b). \tag{34}$$

Замечание 2. *Из доказательства теоремы 5 следует, что условия (34) эквивалентны условиям (33).*

Замечание 3. *В доказательстве теоремы 5 $m_0 \leq W(x)$ для любого $0 \leq x \leq x_0$, и следовательно,*

$$m_0 \leq W_{min} = \min_{0 \leq x \leq x_0} W(x).$$

Таким образом, вместо условий (34) можно записать более строгие условия:

$$W_{min} > 0, \quad m_0 \leq \min(W_{min}, b).$$

Отметим, что условия (31) and (34) во многих задачах удобнее условий (30) и (33) соответственно. Поэтому можно использовать эти условия, исходя из конкретной задачи. Например, если выполнены условия (8) и $m_0 < W(0)$, то уже нет необходимости вычислять значения B для определения разрешимости задачи (5)-(7), поскольку необходимое условие разрешимости уже нарушено.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОЛЕТА ПО ЗАДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ

Пусть летательный аппарат с переменной массой движется под одновременным воздействием силы тяжести $m(t)\vec{g}$, реактивной силы

$$\vec{F}_R = -\kappa \frac{dm(t)}{dt} \frac{\vec{V}}{V},$$

силы сопротивления среды

$$\vec{F}_C = -k_0 \vec{V}$$

и силы торможения

$$\vec{F}_T = -k_1 \vec{V},$$

где $\vec{g}$ – ускорение свободного падения, $m(t)$ – масса летательного аппарата в момент времени t, $\vec{V}$ – вектор скорости летательного аппарата, $V = |\vec{V}|$ – его модуль и $\kappa > 0$, $k_0 > 0$ и $k_1 > 0$ – заданные постоянные. Предполагается, что скорость летательного аппарата меньше скорости звука, следовательно, сила сопротивления среды прямо пропорциональна скорости летательного аппарата $\vec{V}$.

Движение тел с переменной массой описывается уравнением Мещерского (см. [2])

$$m(t)\frac{d\vec{V}}{dt} = m(t)\vec{g} + \vec{F}_R + \vec{F}_C + \vec{F}_T.$$

Обозначим проекции вектора скорости $\vec{V}$ на оси X и Y через V_1 и V_2 соответственно. Тогда уравнение Мещерского примет вид

$$m(t)\frac{dV_1}{dt} = -\kappa\frac{dm}{dt}\frac{V_1}{V} - (k_0 + k_1)V_1, \tag{35}$$

$$m(t)\frac{dV_2}{dt} = -\kappa\frac{dm}{dt}\frac{V_2}{V} - (k_0 + k_1)V_2 - gm(t). \tag{36}$$

В качестве новой независимой переменной возьмем x. В этом случае

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_1}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dV_1}{dx}V_1, \quad \frac{dV_2}{dt} = \frac{dV_2}{dx}V_1, \quad \frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dx}V_1. \tag{37}$$

Пусть полет летательного аппарата происходит по траектории

$$y = f(x), \quad 0 \le x \le x_0, \tag{38}$$

где $f(x)$ – заданная, трижды дифференцируемая функция. Дифференцируя обе части (38) по t, получим

$$V_2 = \frac{dy}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt} = f'(x)V_1. \tag{39}$$

Используя это соотношение, а также формулы (37), уравнения (35), (36) примут вид

$$m(x)\frac{dV_1}{dx} = -\kappa\frac{dm}{dx}\frac{V_1}{V} - (k_0 + k_1), \quad 0 \le x \le x_0, \tag{40}$$

$$m(x)V_1\frac{dV_2}{dx} = -\kappa\frac{dm}{dx}V_1\frac{V_2}{V} - (k_0 + k_1)V_2 - gm(x), \quad 0 \le x \le x_0. \tag{41}$$

Пусть масса летательного аппарата без топлива равна m_0, т.е.

$$m(x_0) = m_0. \tag{42}$$

Исходя из физического смысла, будем считать, что

$$m'(x) \le 0, \quad 0 \le x \le x_0. \tag{43}$$

Дифференцируя обе стороны (39) по x, получим

$$V_2'(x) = f''(x)V_1(x) + f'(x)V_1'(x). \tag{44}$$

Используя (38), (39) и (44) уравнения (40) и (41) примут вид

$$mV_1' = \frac{-\kappa m'}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} - (k_0+k_1), \quad 0 \le x \le x_0, \tag{45}$$

$$f''(x)V_1^2(x) = -g, \quad 0 \le x \le x_0. \tag{46}$$

Из (46) следует, что условие $f''(x) \le 0, 0 \le x \le x_0$, необходимо для разрешимости задачи (39)-(42). Предположим, что оно выполнено. Из (46) имеем

$$V_1(x) = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{-f''(x)}} \quad \text{и} \quad V_1'(x) = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{(-f''(x))^3}} f'''(x).$$

Учитывая эти соотношения, уравнение (45) примет вид

$$m' = \frac{-\sqrt{g}f'''(x)}{2\kappa\sqrt{(-f''(x))^3}}\sqrt{1+(f'(x))^2}m - \frac{k_0+k_1}{\kappa}\sqrt{1+(f'(x))^2}. \tag{47}$$

Обозначая

$$x_0 - x = z, \quad f(x_0-z) = \varphi(z), \quad m(x_0-z) = u(z), \quad 0 \le z \le x_0,$$

из (42), (43) и (47) получим

$$u' = \frac{-\sqrt{g}\varphi'''(z)}{2\kappa\sqrt{(-\varphi''(z))^3}}\sqrt{1+(\varphi'(z))^2}u + \frac{k_0+k_1}{\kappa}\sqrt{1+(\varphi'(z))^2}, \tag{48}$$

$$u(0) = m_0, \tag{49}$$

$$u'(z) \ge 0, \quad 0 \le z \le x_0. \tag{50}$$

Из необходимого условия $f''(x) < 0, 0 \le x \le x_0$ следует, что $\varphi''(z) < 0, 0 \le z \le x_0$.

Таким образом, задача определения возможности полета летательного аппарата по траектории $y = f(x)$ и вычисление основных параметров этого полета сводится к задаче (48)-(50), рассмотренной в предыдущих параграфах. Отсюда, в частности, следует, что если $f''(x) < 0$ и $f'''(x) \ge 0$, то полет летательного аппарата по траектории $y = f(x)$ всегда возможен. Этот результат совпадает с результатом, полученным в [3].

Пусть теперь

$$f''(x) < 0, \quad f'''(x) < 0, \quad 0 \le x \le x_0. \tag{51}$$

Тогда уравнение (48) можно записать в виде

$$u'(z) = A(z)(W(z) - u(z)), \quad 0 \le z \le x_0, \tag{52}$$

где

$$A(z) \equiv \frac{\sqrt{g}\varphi'''(z)}{2\kappa\sqrt{(-\varphi''(z))^3}}\sqrt{1+(\varphi'(z))^2} > 0, \quad 0 \le z \le x_0,$$

$$W(z) \equiv \frac{(k_0+k_1)\sqrt{(-\varphi''(z))^3}}{\sqrt{g}\varphi'''(z)} > 0, \quad 0 \le z \le x_0.$$

Применяя теоремы 2 и 5 для задачи (49), (50), (52), мы получим условия разрешимости этой задачи. Решая эту задачу, мы определим основные параметры полета по заданной траектории $y = f(x)$.

Приведем один конкретный пример применения полученных результатов. Допустим полет летательного аппарата осуществляется по траектории

$$y = f(x) \equiv \frac{g}{\eta^2} \ln \frac{V_0 \cos\alpha - \eta x}{V_0 \cos\alpha} + \left(\frac{g}{\eta} + V_0 \sin\alpha\right) \frac{x}{\cos\alpha}, \quad 0 \le x \le x_0, \tag{53}$$

где V_0 – начальная скорость полета ($V(0) = V_0 > 0$), постоянная g – модуль ускорения свободного падения, η, x_0 и α – постоянные, такие, что $\eta > 0$ и $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, $0 < x_0 < V_0 \cos\alpha/\eta$. Легко проверить, что (53) удовлетворяет условиям (51) и уравнение (52) примет вид

$$u'(z) = A(x_0 - z)\left(\frac{k_0 + k_1}{\eta} - u(z)\right), \quad 0 \le z \le x_0, \tag{54}$$

где

$$A(x) = \frac{\eta}{\kappa}\sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Применяя теорему 2 для задачи (49), (50), (54), получим, что эта задача имеет решение тогда и только тогда, когда

$$0 < m_0 \le \frac{k_0 + k_1}{\eta}. \tag{55}$$

Таким образом имеет место следующая

Теорема 6. *Полет летательного аппарата по траектории (53) с дополнительными условиями $m(x_0) = m_0$ и $V(0) = V_0$ возможен тогда и только тогда, когда m_0 удовлетворяет неравенству (55).*

С точки зрения применения, особый интерес представляет исследование возможности полета летательного аппарата по заданной траектории $y = f(x)$, $0 \le x \le x_0$, когда на отрезке $[0, x_0]$ $f''(x) < 0$, а $f'''(x)$ – знакопеременная функция. Но это представляет собой предмет отдельного исследования.

Abstract. The paper establishes some solvability conditions of the Cauchy problem for ordinary linear differential equation in the class of monotone functions. The obtained results are applied for clarifying the possibility of the flight of a vehicle along a given trajectory under existence of braking forces.

Список литературы

[1] И. Г. Петровский, *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений* (Наука, Москва, 1970).
[2] А. А. Дмитриевский, *Внешняя баллистика*, Машиностроение, Москва, 1979).
[3] N. E. Tovmasyan, "The Flight of an Aircraft Along a Given Trajectory and Optimal Flight Control". in *Topics in Analysis and its Applications. NATO Science Series, Series II, 147* (Kluwer Academic Publishers, 2004).

Поступила 16 ноября 2006