Известия НАН Армении. Математика, 41, № 5, 2006, 58–68

УРАВНЕНИЕ АМБАРЦУМЯНА В ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКЕ

А. Х. Хачатрян

Институт математики НАН Армении
E-mail : aghavard@hotbox.ru

Резюме. Работа носит обзорный характер и в ней приводятся основные результаты по исследованию и решению интегро-дифференциальных или интегральных уравнений типа свёртки. С помощью этих уравнений описывается ряд задач физической кинетики. Для этих уравнений разработаны различные факторизационные методы и показана универсальная и фундаментальная роль уравнения Амбарцумяна.

ВВЕДЕНИЕ

В начале 40-х годов В. А. Амбарцумяном был сформулирован принцип инвариантности, который первоначально применялся для задачи многократного рассеяния света в мутной среде [1]. Принцип инвариантности сводит решение многих задач к нелинейному функциональному уравнению, именуемого уравнением Амбарцумяна (А-уравнение)

$$\varphi(s) = 1 + \varphi(s)\int_a^b \frac{\varphi(p)G(p)}{s+p}dp, \quad G(p) \geq 0. \tag{0.1}$$

Функция Амбарцумяна $\varphi(s)$ является основным решением (предел простых итераций с нулевым приближением) А-уравнения. Функция $\varphi(s)$ обладает следующими свойствами :

$$\int_a^b \frac{\varphi(s)G(s)}{s}ds = 1 - \sqrt{1-\lambda}, \quad 1 \leq \varphi(s)\downarrow \quad \text{in} \quad s,$$

если $\lambda < 1$, то $\varphi(+0) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}$ а если $\lambda = 1$, то $\varphi(s) = O(s)$ при $s \to +\infty$. Здесь $\lambda \leq 1$ – так называемая вероятность выживания при элементарном акте рассеяния.

С А-уравнением ассоциируется основное уравнение переноса излучения относительно функции источника

$$f(x) = g(x) + \int_0^r K(x-t)f(t)dt, \quad r \le +\infty. \tag{0.2}$$

Во всех приложениях ядро интегрального уравнения (2.2) является вполне монотонной функцией вида :

$$K(x) = \int_a^b e^{-|x|s}G(s)ds, \quad 2\int_a^b G(s)\frac{ds}{s} = \lambda \le 1. \tag{0.3}$$

Заметим, что в случае $r = +\infty$, уравнение (0.2) представляет собой интегральное уравнение Винера–Хопфа (WH-уравнение).

Изучению А-уравнения и разработке его математической теории посвящены многочисленные работы (см. [2, 3] и ссылки в них). Впервые в [2] была установлена связь между функцией Амбарцумяна и факторизацией интегральных операторов Винера–Хопфа. В дальнейшем стало ясно, что сочетание А-уравнения с нелинейным уравнением факторизации Енгибаряна является мощным орудием для эффективного аналитического решения WH-уравнения.

В различных областях физической кинетики, таких как теория переноса излучения, кинетическая теория газов, металлов и др., существует ряд задач, которые описываются скалярными или векторными интегральными уравнениями с суммарно–разностным ядром или интегро–дифференциальными уравнениями первого или второго порядка типа свёртки.

Настоящая работа носит обзорный характер основных результатов по исследованию вышеуказанных уравнений и показана центральная роль А-уравнения. Основные результаты получены в последние годы (см. [4 – 9], [11]), а некоторые из них находятся в процессе публикации.

§1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С СУММАРНО–РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ

Задача 1 (из кинетической теории газов). Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана декартова система координат (x, y, z). Пусть газ заполняет полупространство $x > 0$, ограниченное твёрдой плоскостью $x = 0$. Газ течёт вдоль этой плоскости со скольжением, со среднемассовой скоростью $U(x)$. Будем считать, что градиент температуры и концентрации отсутствуют.

Уравнение Больцмана в рамках модели Бхатнагар–Гросс–Крук (BGK) имеет вид (см. [4])

$$s_1\frac{\partial f^{\pm}(x,\vec{s})}{\partial x}=-f(x,\vec{s})+\pi^{-3/2}e^{-(\vec{s}-\vec{U}(x))^2}, \tag{1.1}$$

$$U(x)=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}s_2\left[f^+(x,\vec{s})+f^-(x,\vec{s})\right]ds_1ds_2ds_3, \tag{1.2}$$

здесь $\vec{s}=(s_1,s_2,s_3)$ – вектор молекулярной скорости и

$$f^+(x,\vec{s})=\begin{cases} f(x,\vec{s}) & \text{если} \quad s_1\geq 0 \\ 0 & \text{если} \quad s_1<0 \end{cases}, \qquad f^-(x,\vec{s})=\begin{cases} 0 & \text{если} \quad s_1>0 \\ f(x,\vec{s}) & \text{если} \quad s_1\leq 0 \end{cases},$$

где $f(x,\vec{s})$ – функция распределения молекул. К уравнениям (1.1) и (1.2) присоединим граничные условия

$$f^+(0,s_1,s_2,s_3)=\frac{1-\varepsilon}{\pi^{3/2}}e^{-s^2}+\varepsilon f^-(0,-s_1,s_2,s_3), \tag{1.3}$$

$$f^-(x,s_1,s_2,s_3)\to 0 \quad \text{если} \quad x\to+\infty, \tag{1.4}$$

где $0\leq\varepsilon\leq 1$ – коэффициент аккомодации.

Теорема 1.1. *Нелинейная граничная задача (1.1) – (1.4) эквивалентна следующему интегральному уравнению с суммарно–разностным ядром относительно среднемассовой скорости*

$$U(x)=\int_0^{+\infty}K(x-t)U(t)dt+\varepsilon\int_0^{+\infty}K(x+t)U(t)dt, \tag{1.5}$$

с ядром

$$K(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-|x|s}e^{-1/s^2}\frac{ds}{s}. \tag{1.6}$$

Заметим, что ядро K удовлетворяет условию консервативности $\|K\|_{L_1}\equiv 1$. Искомые функции распределения $f^+(x,\vec{s})$ и $f^-(x,\vec{s})$ можно определить из следующих простых нелинейных соотношений :

$$f^+(x,\vec{s})=Ce^{-x/s_1}+\int_0^x e^{-(x-t)/s_1}e^{-(s_1^2+s_3^2)}e^{-(s_2-U(t))^2}\frac{dt}{s_1}, \tag{1.7}$$

$$f^-(x,\vec{s})=\int_x^{\infty}e^{-(t-x)/s_1}e^{-(s_1^2+s_3^2)}e^{-(s_2-U(t))^2}\frac{dt}{s_1}, \tag{1.8}$$

$$C=\frac{1-\varepsilon}{\pi^{3/2}}e^{-s^2}+\frac{\varepsilon}{\pi^{3/2}}\int_0^{+\infty}e^{-t/s_1}e^{-(s_1^2+s_3^2)}e^{-(s_2-U(t))^2}\frac{dt}{s_1}. \tag{1.9}$$

Задача 2 (из теории переноса излучения). Пусть водный бассейн со стороны атмосферы освещается излучением интенсивности $I_0^+(\zeta)$, где ζ – косинус угла между направлением падающего солнечного излучения и нормалью к поверхности моря. Задача состоит в нахождении поля излучения в море, учитывая, что фотоны в ходе диффузии могут отразиться от поверхности моря (внутреннее отражение). Предполагается, что отражающая поверхность ограничивает рассматриваемую среду со стороны падающего на неё излучения.

Будем считать, что рассеяние света внутри водного бассейна является когерентным и изотропным. Тогда уравнение переноса имеет вид (см. [5] и ссылки в ней)

$$\pm\zeta\frac{dI^{\pm}(x,\zeta)}{dx} = -I^{\pm}(x,\zeta) + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \left[I^{+}(x,\zeta') + I^{-}(x,\zeta')\right] d\zeta', \tag{1.10}$$

где λ – альбедо рассеяния, а $I^{+}(x,\zeta)$, $I^{-}(x,\zeta)$ суть искомые интенсивности, распространяющиеся в сторону возрастания и убывания x.

К уравнению (1.10) присоединим граничные условия

$$I^{+}(0,\zeta) = I_0^{+}(\zeta) + \varepsilon I^{-}(0,\zeta), \tag{1.11}$$

$$I^{-}(x,\zeta) = O(1) \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{1.12}$$

Заметим, что граничная задача (1.10) – (1.12) сводится к неоднородному интегральному уравнению вида (1.5) :

$$S(x) = g(x) + \int_0^{+\infty} K(x-t)S(t)dt + \varepsilon\int_0^{+\infty} K(x+t)S(t)dt, \tag{1.13}$$

относительно функции источника

$$S(x) = \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \left[I^{+}(x,\zeta') + I^{-}(x,\zeta')\right] d\zeta' \tag{1.14}$$

с ядром

$$K(x) = \frac{\lambda}{2}\int_1^{+\infty} e^{-|x|s}\frac{ds}{s}.$$

Здесь

$$g(x) = \int_1^{+\infty} e^{-xs}\frac{ds}{s^2}.$$

Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x)dx = \lambda \le 1.$$

§ 2. ФАКТОРИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА И УРАВНЕНИЕ АМБАРЦУМЯНА

Перепишем уравнение (1.13) (или (1.5)) в операторном виде

$$(I-\widehat{K}-\widehat{K}_0)S=g. \tag{2.1}$$

В работах [10, 11] была рассмотрена возможность построения следующей факторизации :

$$I-\widehat{K}-\widehat{K}_0=(I-\widehat{V}_-)(I-\widehat{U}_0)(I-\widehat{V}_+), \tag{2.2}$$

где $\widehat{V}_\pm$ суть вольтеровые операторы вида

$$(\widehat{V}_+f)(x)=\int_0^x V(x-t)f(t)dt \quad \text{и} \quad (\widehat{V}_-f)(x)=\int_x^\infty V(t-x)f(t)dt, \tag{2.3}$$

а $\widehat{U}_0$ – интегральный оператор типа “Ханкеля”

$$(\widehat{U}_0f)(x)=\int_0^{+\infty} U_0(x+t)f(t)dt. \tag{2.4}$$

Ядро операторов $V_\pm$ задаётся формулой

$$V(x)=\int_a^b e^{-xs}\varphi(s)G(s)ds, \tag{2.5}$$

где $\varphi(s)$ – функция Амбарцумяна. Очевидно, что $V>0$ и

$$\alpha_0=\int_0^{+\infty}V(x)dx=1, \quad \alpha_k=m_k(V)=\int_0^{+\infty}x^kV(x)dx=k!\int_a^b\varphi(s)G(s)\frac{ds}{s^{k+1}}. \tag{2.7}$$

Заметим, что ядро оператора $\widehat{U}_0$ выражается через функцию Амбарцумяна посредством соотношения (см. [11]) :

$$U_0(x)=\varepsilon\int_a^b e^{-xs}\varphi^2(s)G(s)ds. \tag{2.8}$$

Факторизация (2.2) сводит решение исходного уравнения (1.5) (или (1.13)) к трём связанным простым уравнениям

$$(I-\widehat{V}_-)F=g, \tag{2.9}$$

$$(I-\widehat{U}_0)\Psi=F, \tag{2.10}$$

$$(I-\widehat{V}_+)U=\Psi. \tag{2.11}$$

Факторизация (2.2) даёт возможность получить аналитическое решение исходного уравнения (1.5) через функцию Амбарцумяна (см. [5, 11]). Факторизация позволяет также получить асимптотическое поведение решения, что имеет важное значение в приложениях (см. [8]). Для различных физических характеристик получены явные выражения через функцию Амбарцумяна. Эти результаты хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами (см. [12] и ссылки в ней). Результаты, относящиеся к аналитическому решению уравнения (1.5) (или (1.13)) можно найти в работах автора [5 – 8, 11].

§ 3. ОБ ОДНОМ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим следующее интегро–дифференциальное уравнение

$$\frac{dE}{dx}+\lambda\int_0^{+\infty}K(x-t)E(t)dt=0,\quad E(+\infty)=0,\quad \lambda>0, \tag{3.1}$$

с ядром

$$K(x)=\int_1^{+\infty}e^{-|x|s}\frac{ds}{s^2}=\int_1^{+\infty}e^{-|x|s}G(s)ds. \tag{3.2}$$

Уравнение (3.1) выводится из стационарного линейного, модельного уравнения Больцмана без учёта в интеграле члена столкновений, который учитывает энергетические взаимодействия. Уравнением (3.1) описывается задача распределения электрического поля в полубесконечном металле, при наличии чисто внешнего электрического поля.

Физический параметр $\lambda=\left(\frac{\Omega_p}{\nu}\right)^2$ фигурирующий в уравнении (3.1), представляет собой квадрат отношения плазменной частоты Ω_p к частоте столкновений электронов ν в металле.

Теорема 3.1. *Пусть $\alpha=\alpha_0$ – точка максимума функции*

$$\lambda(\alpha)=\alpha\left(2\int_a^b\frac{sG(s)}{s^2-\alpha^2}ds\right)^{-1},\quad 0<\alpha<a.$$

Тогда если $0<\lambda\le\lambda(\alpha_0)$ $(\equiv\lambda_0)$, то задача (3.1) в пространстве Соболева $W_1^1(0,+\infty)$ обладает решением вида

$$E(x)=[S(x)+H(x)]e^{-\alpha x},$$

где

i) если $0<\lambda<\lambda_0$, то $H(x)\in L_1(0,+\infty)$ и из

$$S(x)=1+\int_0^{+\infty}\left(1-e^{-ux}\right)\frac{d\rho(u)}{u},\ \text{следует, что } S(x)=O(1) \text{ при } x\to+\infty$$

ii) если $\lambda = \lambda_0$, то $H(x) \in L_1^{loc}$, причём $\int_0^x H(t)dt = o(x^2)$ при $x \to +\infty$ и из

$$S(x) = 1 + mx + \int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-ux}\right) \frac{d\rho(u)}{u}, m \geq 0, \text{ следует, что } S(x) = O(x).$$

Теорема 3.2. *Если $\lambda > \lambda_0$ и существует $\alpha \in (0, a)$ такое, что уравнение*

$$2\lambda \int_a^b \frac{s\,G(s)ds}{(z+\alpha)[s^2 - (z+\alpha)^2]} = 1$$

имеет комплексный корень z_0, для которого $0 < \operatorname{Re} z_0 < a - \alpha$ и $\operatorname{Im} z_0 > 0$, то задача (3.1) в пространстве Соболева имеет решение вида :

$$E(x) = e^{-\alpha x} \left\{ 2A\,e^{-\beta x} \cos(\omega x - \vartheta) - \int_0^{+\infty} e^{-xu} d\rho(u) \right\} + H(x)e^{-\alpha x},$$

где $H(x) = f_1(x) + f_2(x)$,

$$f_1(x) \in L_1(0, +\infty), \quad f_2(x) \in C_M(0, +\infty), \quad \beta = \operatorname{Re} z_0, \quad w = \operatorname{Im} z_0,$$

$$Ae^{i\vartheta} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} te^{z_0 t} T_\alpha(t)dt \right)^{-1},$$

ρ – конечная на $[0, +\infty)$ мера, непрерывная в нуле и $T_\alpha = e^{\alpha x} \int_x^{+\infty} K(t)dt$.

Заметим, что при $0 < \lambda \leq \lambda_0$ решение положительно и экспоненциально убывает. При $\lambda > \lambda_0$ возникает затухающее знакопеременное решение. Качественный характер решения связан с физическими явлениями и нуждается в физической интерпретации.

Результаты этого параграфа опубликованы в работах [9, 13].

§ 4. ОБ ОДНОЙ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим задачу температурного скачка в кинетической теории газов в рамках линеаризованной BGK модели уравнения Больцмана. Эта задача описывается системой консервативных интегральных уравнений свёртки на полупрямой с 2×2 матричным ядром :

$$f_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^{2} \int_0^{+\infty} K_{ij}(x-t) f_j(t)dt, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{4.1}$$

где

$$\int_0^{+\infty} K_{ij}(x)dx = 2 \int_a^b G_{ij}(\rho) \frac{d\rho}{\rho} = (\delta_{ij})^2, \tag{4.2}$$

а (δ_{ij}) – единичная матрица.

Вопрос необратимости оператора $I - \widehat{K}$ определяется с помощью символа $I - \overline{K}(s)$, где $\overline{K}(s)$ – по компонентное преобразование Фурье от K. А именно, для обратимости оператора $I - \widehat{K}$ необходимо и достаточно выполнения следующих условий (см. [15]) :

a) Символ невырожден, т.е.

$$\det\,[I - \overline{K}(s)] \neq 0, \tag{4.3}$$

b) частные индексы равны нулю, т.е. $\chi = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\operatorname{arctg}\,(I - \overline{K}(s))ds = 0.$

Однако, в случае системы (4.1), (4.2) условие (4.3) в точке $s = 0$ нарушается, и символ имеет нуль четвёртого порядка. Такая высокая степень вырожденности существенно усложняет изучение и прямое численное решение системы (4.1). Несмотря на это, справедлива следующая лемма.

Лемма 4.1. *Символ $I - \overline{K}(s)$ допускает разложение*

$$I - \overline{K}(s) = \frac{s^2}{s^2 + \beta^2}[I - \overline{T}(s)], \tag{4.4}$$

где $I - \overline{T}(s)$ – символ оператора $I - \widehat{T}$ с ядром

$$T(x) = \int_a^{+\infty} e^{-|x|\rho} G(\rho)\left(1 - \frac{\beta^2}{\rho^2}\right)d\rho, \quad G(\rho) = (G_{ij}(\rho))_{i,j=1,2,\dots}. \tag{4.5}$$

Более того, в точке $s = 0$ имеем

$$\det\,(I - \overline{T}(0)) = \frac{5}{12}\beta^4 \neq 0, \tag{4.6}$$

где β – положительное число.

Теорема 4.1. *Оператор $I - \widehat{K}$ допускает разложение*

$$I - \widehat{K} = (I - \widehat{U}^-)(I - \widehat{T})(I - \widehat{U}^+), \tag{4.7}$$

где операторы $\widehat{U}^\pm$ суть нижние и верхние простые вольтерровые матричные операторы

$$\left(\widehat{U}^+ f\right)(x) = \beta\int_0^x e^{-\beta(x-t)} f(t)dt, \quad \left(\widehat{U}^- f\right)(x) = \beta\int_x^{+\infty} e^{-\beta(t-x)} f(t)dt, \tag{4.8}$$

а $\widehat{T}$ – матричный интегральный оператор Винера–Хопфа. Оператор $I - \widehat{T}$ обратим.

Факторизация (4.7) сводит решение системы (4.1) к последовательному решению трёх простейших связанных уравнений и даёт возможность получить аналитическое решение консервативной системы WH-уравнения. Эта факторизация даёт возможность изучить асимптотическое поведение этого решения в $+\infty$. Результаты настоящего параграфа готовятся к публикации.

§ 5. ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН

Рассмотрим интегро–дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + Af = g(x) + \lambda \int_0^{+\infty} K(x-t) f(t)dt \tag{5.1}$$

с ядерной функцией

$$K(x) = \int_a^{+\infty} e^{-|x|s} G(s)ds, \quad a \geq 0. \tag{5.2}$$

Предполагаем, что

$$A > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad G(\rho) \geq 0 \quad \text{и} \quad 2\int_a^{+\infty} G(\rho)\frac{d\rho}{\rho} = 1. \tag{5.3}$$

К числу задач, сводящихся к однородному ($g = 0$) уравнению (5.1) относятся : аномальный спин–эффект, распространение геликоновых волн вблизи циклотронного резонанса и др. (см. [14]). Член Af играет роль локального взаимодействия, g играет роль внешних сил, а интегральный член обуславливает нелокальные взаимодействия. Доказана следующая теорема :

если ядро K имеет вид (5.2), (5.3), то при произвольном $A > 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет место факторизация

$$D^2 + AI - \widehat{K} = (I - \widehat{V}_-)(D^2 + \gamma I)(I - \widehat{V}_+), \tag{5.4}$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$, $V_\pm$ суть вольтерровые операторы вида (2.3).

Эта факторизация применяется к решению уравнения (5.1). Результаты по изучению и решению уравнения (5.1) скоро будут опубликованы.

Заключение. Первоначально А-уравнение было выведено В. А. Амбарцумяном для решения некоторых астрофизических задач. В дальнейшем оказалось, что с помощью функции Амбарцумяна решается ряд задач не только в астрофизике, но и в других областях естествознания. Несмотря на то, что рассматриваемые задачи с физической точки зрения совершенно разные (взаимодействие излучения с веществом, взаимодействие молекул со стенкой, металла под воздействием внешнего электрического поля, электрического тока в проводнике) и соответствующие процессы описываются разными скалярными (векторными) интегральными уравнениями (1.5), (4.1) или интегро–дифференциальными уравнениями (3.1), (5.1), тем не менее все решения и физические характеристики выражаются через функцию Амбарцумяна. Это еще раз подтверждает универсальную и фундаментальную роль уравнения Амбарцумяна.

Abstract. The paper presents a review of convolution type integro-differential and integral equations, that describe a series of problems in physical kinetics. For such equations, different factorization methods exist and among them the universal role of Ambartsumian equation is shown.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Амбарцумян, “К вопросу о диффузном отражении света в мутной среде”, ДАН СССР, том 38, стр. 257 – 261, 1943.
2. Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, “Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения”, Мат. сборник, том 2(139), № 1(5), стр. 35 – 58, 1975.
3. Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян, “Об одном интегральном уравнении с разностным ядром”, Мат. заметки, том 19, № 6, стр. 927 – 932, 1976.
4. Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, “О точной линеаризации задач скольжения разреженного газа в модели Бхатнагара-Гросса-Крука”, Теоретическая и математическая физика, том 125, № 2, стр. 339 – 342, 2002.
5. А. Х. Хачатрян, А. Н. Афян, “Об аналитическом и численном решении задачи переноса излучения при наличии отражающей поверхности”, Журн. выч. математики и мат. физики, РАН, том 41, № 8, стр. 1158 – 1168, 2001.
6. Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, “Вопросы нелинейной теории динамики разреженного газа”, Мат. моделирование, РАН, том 16, № 1, стр. 67 – 74, 2004.
7. А. Х. Хачатрян, С. М. Андриян, “О скачке скорости разреженного газа в рамках линеаризированной БГК модели уравнения Больцмана”, Мат. моделирование, РАН, том 16, № 2, стр. 31 – 42, 2004.
8. А. Х. Хачатрян, С. М. Андриян, “Об одной задаче физической кинетики”, Журн. выч. математики и мат. физики, РАН, том 45, № 11, стр. 2065 – 2073, 2005.
9. A. Kh. Khachatryan and Kh. A. Khachatryan, “On solvability of some integral-differential equations with sum-difference kernels”, International Journal of Pure and Applied Math. Sciences, vol. 2, no. 1, pp. 1 – 13, 2005.
10. Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, “Некоторые задачи факторизации интегральных операторов типа свёртки”, Дифф. уравнения, том 26, № 8, стр. 1442 – 1452, 1990.
11. Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, “О некоторых интегральных уравнениях типа свёртки в кинетической теории”, Журн. выч. математики и мат. физики, РАН, том 45, № 38, стр. 466 – 482, 1998.

12. К. Черчиньяни, Теория и приложения уравнения Больцмана, Мир, Москва, 1978.
13. Х. А. Хачатрян, "Интегро-дифференциальные уравнения физической кинетики", Изв АН Армении, серия Математика, том 39, № 3, стр. 72 – 80, 2004.
14. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Физическая кинетика, том 10, Наука, Москва, 1979.
15. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, "Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов", Успехи мат. наук, том 13, № 2, стр. 3 – 72, 1968.

Поступила 5 сентября 2006