Известия НАН Армении. Математика, 41, № 3, 2006, 13–26

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО q-ХРОМАТИЧЕСКОГО ПОДГРАФА

Р. О. Адамян и С. Е. Маркосян

Ереванский Государственный Университет
E-mail : ruboam@yahoo.com

Резюме. В настоящей работе исследована задача нахождения максимального q-хроматического подграфа, где q – натуральное число. Построен класс графов сравнения, для которых алгоритм, приведенный в [1], не дает оптимального решения, когда $q = \omega - 2$, где ω – число вершин наибольшего полного подграфа. Предложен оптимальный алгоритм для графов сравнения, когда $q = \omega - 2$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть G – обыкновенный граф с хроматическим числом $\chi(G)$ и q $(1 \leq q \leq \chi(G))$ – целое число. Найти частичную q-раскраску (q-хроматический подграф) в графе G значит найти q непересекающихся, независимых подмножеств $S_1, S_2, \ldots, S_q$ множества вершин G. q-хроматический подграф будем называть максимальным (т.е. обладающим оптмальной q-раскраской), если число "раскрашенных вершин" $|\bigcup_{1\leq j\leq q} S_j|$ принимает свое максимальние заначение. Поэтому задачу нахождения максимального q-хроматического подграфа иногда называют задачей нахождения q-максимальных независимых множеств (q-MIS).

Проблема нахождения максимального q-хроматического подграфа является обобщением проблем нахождения наибольшего независимого множества ($q = 1$) и раскраски графа минимальным количеством красок ($q = \chi(G)$). Впервые задача q-MIS была сформулирована и решена для графов интервалов в работах [2], [3]. Потом были разработаны алгоритмы решения этой задачи для классов хордальных [4], транзитивно и котранзитивно ориентируемых графов [1], [5], [11]. Некоторые свойства оптимального (максимального) q-хроматического подграфа, связанные со свойствами minimax соотношений, были исследованы в работах [6], [7].

Обыкновенный неориентированный граф $G = (V, E)$ будем называть ***графом сравнения***, если существует взаимно-однозначное отображение между вершинами графа и элементами некоторого частично упорядоченного множества такое, что между двумя вершинами существует ребро тогда и только тогда, когда соответствующие элементы частично упорядоченого множества сравнимы [8]. Класс графов сравнения совпадает с классом транзитивно ориентируемых графов. Иногда граф сравнения будем обозначать $\vec{G} = (V, \Gamma)$, где Γ – многозначное отображение как в [9].

Граф будем называть ***графом косравнения***, если его дополнение является графом сравнения. Нахождение максимального q-хроматического подграфа в графе G эквивалентно нахождению таких полных подграфов $K_1, K_2, \cdots, K_q$ в дополнении графа G, что $|\bigcup_{1 \leq j \leq q} K_j|$ имеет максимальное значение. Эта задача является задачей нахождения q максимальных полных подграфов. Задача нахождения q максимальных полных подграфов для графов сравнения имеет эффективное решение [5]. Следовательно, задача нахождения максимального q-хроматического подграфа для графов косравнения имеет эффективное решение.

Если каким-то способом транзитивно ориентировать граф сравнения G, то длина самой длинной цепи в транзитивно ориентированном графе $\vec{G}$ равна хроматическому числу графа G [9]. Следовательно, для нахождения максимального q-хроматического подграфа графа $\vec{G}$, необходимо удалить из $\vec{G}$ минимальное количество вершин Y, чтобы в графе $\vec{G} - Y$ не осталось цепи длиннее q. Количество удаляемых вершин не зависит от того, каким образом транзитивно ориентирован граф G, чтобы получить ориентированный граф $\vec{G}$, так как число вершин наибольшего полного подграфа произвольного графа сравнения G равно длине самой длинной цепи любого транзитивно ориентированного графа $\vec{G}$, полученного от G.

Теперь определим понятие ранжировки транзитивно ориентированного графа. ***Ранжировкой*** транзитивно ориентированного графа $\vec{G} = (V, \Gamma)$ называется разделение множества его вершин V на подмножества $X_1, X_2, \cdots, X_{\omega(G)}$ следующим образом

$$X_1 = \{v \in V \;/\; \Gamma^{-1}v = \emptyset\},$$

$$X_i = \left\{ v \in V \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j \;\Big/\; \Gamma^{-1}v \subseteq \bigcup_{j=1}^{i-1} X_j \right\}, \quad i = 2, \cdots, \omega$$

. Очевидно, что каждое подмножество X_j является независимым множеством вершин, а разбиение $X_1, X_2, \dots, X_{\omega(G)}$ – минимальной раскраской графа G.

В [1] приведен следующий алгоритм для нахождения максимального q-хроматического подграфа в графе сравнения G.

1. Граф G транзитивно ориентировать и обозначить полученный граф через $\vec{G}_\omega$.
2. Взять $k = \omega$.
3. Ранжировать граф $\vec{G}_k$.
4. Построить сеть N_k с добавлением вершин s и t к вершинам $\vec{G}_k$, где участвуют только ребра между соседними рангами ранжированного графа $\vec{G}_k$, а вершины s и t соединены со всеми вершинами первого и последнего рангов соответственно.
5. Найти в сети N_k минимальный вершинный разрез Y_k с помощью алгоритма нахождения максимального потока.
6. Построить граф $\vec{G}_{k-1} = \vec{G}_k - Y_k$.
7. Если $k = q + 1$, то завершить работу алгоритма, в противном случае взять $k = k - 1$ и перейти к шагу 3.

В 5-ом шаге алгоритма существенно то, что выбирается вершинный разрез, получаемый с помощью алгоритма нахождения максимального потока, а не произвольный минимальный вершинный разрез. Например, для получения максимального $\omega - 2$-хроматического подграфа в графе, приведенном на Рис. 1, достаточно удалить вершины x_1 и x_ω, однако если алгоритм возьмет произвольный минимальный вершинный разрез, то число удаляемых вершин может быть 3.

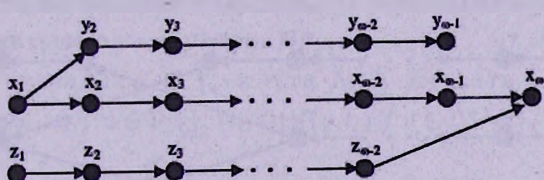

Рис. 1.

Очевидно, что этот алгоритм дает оптимальное решение при $q = \omega - 1$, но не дает оптимального решения при $q = \omega - 2$, см. Рис. 2.

Ясно, что в первом цикле алгоритм удалит из графа $\vec{G}_\omega$ вершину v_ω. В результате получится $\omega-1$-хроматический граф $\vec{G}_{\omega-1}$. Во втором цикле из графа $\vec{G}_{\omega-1}$ будут удалены вершины $v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{41}$ (см. Рис. 3). Итак, мы получили $\omega-2$-хроматический граф $\vec{G}_{\omega-2}$ имеющий $4\omega-8$ вершин.

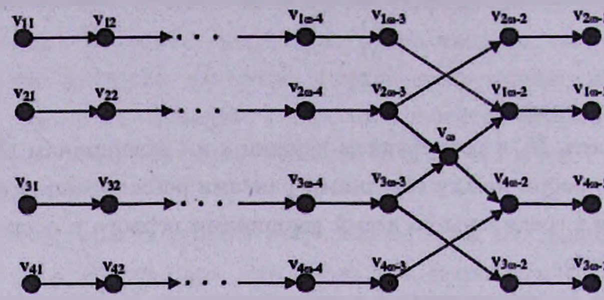

Рис. 2. Исходный граф $\vec{G}_\omega$.

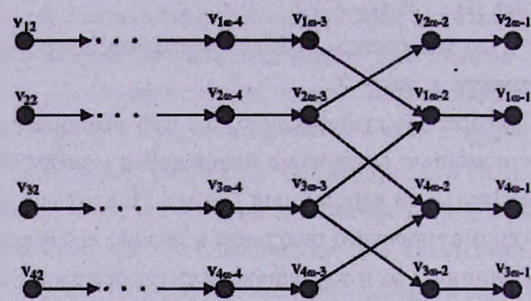

Рис. 3. Граф $\vec{G}_{\omega-2}$, полученный в конце второго цикла.

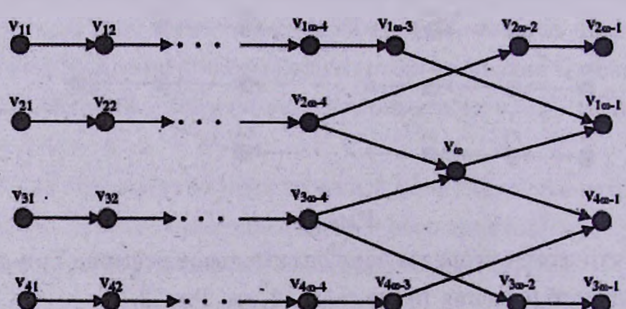

Рис. 4. Максимальныйl $\omega-2$-хроматический подграф.

Заметим, что максимальный $\omega-2$-хроматический подграф в графе G, который получается из G удалением вершин $v_{2\omega-3}, v_{1\omega-2}, v_{3\omega-3}, v_{4\omega-2}$, содержит $4\omega-7$ вершин (см. Рис. 4). Следовательно, алгоритм полученный в [1] не оптимален.

§2. ОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ q–ХРОМАТИЧЕСКОГО ПОДГРАФА ПРИ $q = \omega - 2$

Рассмотрим следующий алгоритм.

1. Любым способом транзитивно оринтировать граф G, затем ранжировать полученный граф $\vec{G}_\omega$.
2. Добавляя вершины s и t к графу $\vec{G}_\omega$, построить сеть N_ω, где участвуют только ребра между соседними рангами ранжированного графа $\vec{G}_\omega$, а вершины s и t соединены со всеми вершинами первого и последнего рангов соответственно.
3. Найти в сети N_ω минимальный вершинный разрез Y_ω.
4. Построить транзитивно ориентированный и ранжированный граф $\vec{G}_{\omega-1} = \vec{G}_\omega - Y_\omega$.
5. Из ранжированного графа $\vec{G}_{\omega-1}$ построить сеть $N_{\omega-1}$, как это было сделано для сети N_ω and $\vec{G}_\omega$.
6. Добавить удаленные вершины Y_ω к $N_{\omega-1}$ следующим способом. Пусть $X_0 = \{s\}, X_1, \ldots, X_{\omega-1}, X_\omega = \{t\}$ – ранги сети $N_{\omega-1}$. Вершину $y \in Y_\omega$ добавить между рангами X_k и X_{k+1}, так, чтобы все вершины, предшествующие y в графе $\vec{G}_\omega - (Y_\omega \setminus \{y\})$, находились бы в рангах $X_0, X_1, \cdots, X_k$, а все последующие y вершины находились бы в рангах $X_{k+1}, \cdots, X_{\omega-1}, X_\omega$. Очевидно, что для каждой вершины $y \in Y_\omega$ существует единственное число k такое, что вершину y можно добавить между рангами X_k и X_{k+1}. С каждой вершиной $y \in Y_\omega$, добавленной между рангами X_k и X_{k+1}, добавить те дуги из графа $\vec{G}_\omega$, которые соединяют вершины y с вершинами в рангах X_k и X_{k+1}. Полученную сеть обозначить через $N^+_{\omega-1}$.
7. Для каждой вершины $y_i \in Y_\omega$ к сети $N^+_{\omega-1}$ добавить вершины s_i и t_i и дуги (s, s_i), $\{(s_i, u) \ / \ u \in \Gamma y_i\}$, (t_i, t), $\{(v, t_i) \ / \ v \in \Gamma^{-1} y_i\}$. Полученную сеть обозначить $N^{++}_{\omega-1}$.
8. Найти минимальный вершинный разрез $Y_{\omega-1}$ в $N^{++}_{\omega-1}$.
9. $Y_{\omega-1}$ раделить на две части $Y_{\omega-1} = Y'_{\omega-1} \cup Y_{st}$, где

$$Y_{st} = Y_{\omega-1} \cap \{s_i, t_i \ / \ y_i \in Y_\omega\}, \quad Y'_{\omega-1} = Y_{\omega-1} \setminus Y_{st}.$$

Затем построить $Y = Y'_{\omega-1} \cup Y'_\omega$, где

$$Y'_\omega = \{y_i \in Y_\omega \ / \ \{s_i, t_i\} \cap Y_{st} \neq \emptyset\}.$$

Если $Y_{st} \cap \{s_i, t_i\} \neq \emptyset$, то $|Y_{st} \cap \{s_i, t_i\}| = 1$ и $Y_\omega \cap Y_{\omega-1} = \emptyset$ (см. свойства 5 и 6 пункта 2.1 ниже). Таким образом, $|Y'_\omega| = Y_{st}$ и $|Y| = |Y_{\omega-1}|$.

Граф $\vec{G}_{\omega-2} = \vec{G}_\omega - Y$ будет максимальным $\omega-2$-хроматическим подграфом.

Для обоснования алгоритма сперва покажем, что полученный подграф – $\omega-2$-хроматический, а потом, что он – максимальный. *Во время доказательства при вычислении длин цепей мы будем игнорировать вершины s и t.*

2.1. Некоторые свойства в сетях $N^+_{\omega-1}$ и $N^{++}_{\omega-1}$.

1. *Если в сети $N^{++}_{\omega-1}$ существует вершина $y \in Y_\omega$ такая, что $\Gamma^{-1}y = \{s\}$ или $\Gamma y = \{t\}$, то $y \in Y$.*

   Доказательство : Предположим $y_i \in Y_\omega$ и $\Gamma^{-1}y_i = \{s\}$. Тогда согласно построению сети $N^{++}_{\omega-1}$ добавлена вершина t_i в $N^{++}_{\omega-1}$, которая соединена с вершинами s и t дугами (s, t_i) и (t_i, t). Следовательно, в сети $N^{++}_{\omega-1}$ существует цепь st_it, откуда следует, что $t_i \in Y_{\omega-1}$. Следовательно, $y_i \in Y'_\omega \subseteq Y$.

   Аналогичным способом покажем, что если $y_i \in Y_\omega$ и $\Gamma y = \{t\}$.

2. *В $N^+_{\omega-1}$ существуют $|Y_\omega|$ вершино-непересекающиеся цепи длиной ω, каждая из них проходит через точно одну вершину из Y_ω.*

   Доказательство : Так как Y_ω – минимальный вершинный разрез в N_ω, то существуют вершино-непересекающиеся цепи $P_1, P_2, \cdots, P_{|Y_\omega|}$ длиной ω, каждая из которых проходит через точно одну вершину из Y_ω. Покажем, что подобные цепи существуют в $N^+_{\omega-1}$. Пусть $y_i \in Y_\omega$ и $y_i \in P_i$, $P_i = sv_1 \cdots v_{k-1}y_iv_{k+1} \cdots v_\omega t$. Покажем, что в $N_{\omega-1}$ существует цепь $P_i - y_i = sv_1 \cdots v_{k-1}v_{k+1} \cdots v_\omega t$. Из этого будет следовать, что в $N^+_{\omega-1}$ существует цепь P_i. Ясно, что в $N_{\omega-1}$ существует цепь $sv_1 \cdots v_{k-1}$, так как из него не была удалена ни одна из его вершин. Предположим, (v_{j-1}, v_j) – первая дуга, отсутствующая в P_i (при $j = k+1$ будем рассматривать дугу (v_{k-1}, v_{k+1})). Эта дуга может отсутствовать только тогда, когда вершины v_{j-1} и v_j не находятся в соседних рангах $\vec{G}_{\omega-1}$. Следовательно, в $N_{\omega-1}$ существует $s - v_j$ цепь R, длина которой больше j. Но в этом случае цепь $Rv_{j+1} \cdots v_\omega t$ будет иметь длину ω, что противоречит тому, что Y_ω – разрез. Итак, в $N_{\omega-1}$ имеем цепи $P_i - y_i$.

3. *В $N^+_{\omega-1}$ не существует цепь из y_i в y_j, где $y_i, y_j \in Y_\omega$ и $y_i \neq y_j$.*

   Доказательство. Если существует цепь между двумя вершинами из Y_ω, то найдутся две вершины y_i и y_j, между которыми существует цепь, не проходящая через другие вершины из Y_ω. Пусть y_i находится между рангами $k_i - 1$ и k_i Y_ω, а y_j – рангами $k_j - 1$ и k_j ($k_i < k_j$). Предположим, что существует цепь $P = y_iv_{k_i} \cdots v_{k_j-1}y_j$. Возьмем части $sv_1 \cdots v_{k_i-1}y_i$ и $y_jv_{k_j} \cdots v_{\omega-1}t$ цепей P_i и P_j, проходящих через вершины y_i и y_j, как описано в свойстве 2. В этом случае цепь $R = v_1 \cdots v_{k_i-1} y_i v_{k_i} \cdots v_{k_j-1} y_j v_{k_j} \cdots v_{\omega-1} t$ будет иметь длину $\omega + 1$, что приводит к противоречию.

4. *Любая цепь в сети $N^{++}_{\omega-1}$ от s до t может пройти не более, чем через одну s_i или t_j вершину. Таким образом, любая цепь в сети $N^{++}_{\omega-1}$ может иметь самое большее один прыжок.*

   Доказательство : Согласно свойству 3 в сети $N^{+}_{\omega-1}$ не существует цепи между двумя разными вершинами из Y_ω, поэтому в $N^{++}_{\omega-1}$ нет цепи между какими-то вершинами s_i и t_j. Таким образом, любая цепь в $N^{++}_{\omega-1}$, проходящая от s до t, может пройти самое большее через одну вершину s_i или t_j.

5. $Y_\omega \cap Y_{\omega-1} = \emptyset$.

   Доказательство : Предположим, $y \in Y_\omega \cap Y_{\omega-1}$. Так как $Y_{\omega-1}$ – минимальный вершинный разрез в $N^{++}_{\omega-1}$, то в $N^{++}_{\omega-1}$ существуют $|Y_{\omega-1}|$ вершинонепересекающиеся цепи, каждая из которых проходит через точно одну вершину из $Y_{\omega-1}$. Пусть $P = s \cdots uyv \cdots t$ – одна из этих цепей, которая проходит через y. Согласо конструированию сети $N^{+}_{\omega-1}$, в $N^{+}_{\omega-1}$ существует дуга(u, v), следовательно, удалением вершины y цепь P не разорвется. Это противоречит тому, что $Y_{\omega-1}$ – вершинный разрез.

6. *Если $Y_{st} \cap \{s_i, t_i\} \neq \emptyset$, то $|Y_{st} \cap \{s_i, t_i\}| = 1$.*

   Доказательство. Предположим, что $Y_{st} \supseteq \{s_i, t_i\}$. $Y_{\omega-1}$ – минимальный вершинный разрез в $N^{++}_{\omega-1}$. поэтому существуют $|Y_{\omega-1}|$ вершинонепересекающиеся цепи, каждая из которых проходит через точно одну вершину из $Y_{\omega-1}$. Пусть через s_i и t_i проходят P_{s_i} и P_{t_i} из этих цепей : $P_{s_i} = s s_i v_1 \cdots v_k t$, $P_{t_i} = s u_1 \cdots u_m t_i t$. Тогда дуга (u_m, v_1) принадлежит $N^{++}_{\omega-1}$. Следовательно, $R = s u_1 \cdots u_m v_1 \cdots v_k t$ – цепь в $N^{++}_{\omega-1}$, что противоречит тому, что $Y_{\omega-1}$ – вершинный разрез.

7. *Если $y_i \in Y_\omega \setminus Y$, то любые $s - y_i$ и $y_i - t$ цепи проходят по крайней мере через одну вершину из Y.*

   Доказательство : Очевидно, $y_i \in Y_\omega$ и $y_i \notin Y$, следовательно, $\{s_i, t_i\} \cap Y_{\omega-1} = \emptyset$. Следовательно, любая $s - t_i$ цепь проходит по крайней мере через одну вершину из $Y_{\omega-1}$, так как $Y_{\omega-1}$ – вершинный разрез в $N^{++}_{\omega-1}$. Аналогично, любая $s_i - t$ цепь проходит по крайней мере через одну вершину из Y.

8. *Если $y_i \in Y \cap Y_\omega$, то или любая $s - y_i$ цепь проходит по крайней мере через одну вершину из $Y \setminus \{y_i\}$ или любая $y_i - t$ цепь проходит по крайней мере через одну вершину из $Y \setminus \{y_i\}$.*

Доказательство : Очевидно, $y_i \in Y \cap Y_\omega \Rightarrow \{s_i, t_i\} \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow |\{s_i, t_i\} \cap Y| = 1$. Поэтому, если $s_i \notin Y$, то любая $y_i - t$ цепь проходит по крайней мере через одну вершину из $Y \setminus \{y_i\}$. Аналогично, если $t_i \notin Y$, то любая $s - y_i$ цепь проходит по крайней мере через одну вершину из $Y \setminus \{y_i\}$.

2.2. Доказательство $\omega - 2$-хроматичности графа $\vec{G}_{\omega-2}$.

Теорема 1. *Граф $\vec{G}_{\omega-2}$ $\omega - 2$-хроматичен.*

Доказательство : Чтобы показать, что граф $\vec{G}_{\omega-2}$ $\omega - 2$-хроматичен, достаточно показать, что в $\vec{G}_{\omega-2}$ нет цепи длиннее, чем $\omega - 2$. Предположим, $Q = u \cdots v$ – цепь в $\vec{G}_{\omega-2}$. Если Q не содержит вершин из множества Y_ω, то Q не может иметь длину больше $\omega - 2$, потому что в противном случае получится, что Q содержит вершины со всех рангов сети $N^+_{\omega-1} - Y$, так как $N^+_{\omega-1}$ имеет только $\omega - 1$ рангов. Следовательно, Q есть сеть в $N^+_{\omega-1} - Y$, что противоречит тому, что Y – разрез в $N^+_{\omega-1}$. Если Q содержит вершины из множества Y_ω, то из вершин $y_i \in Y_\omega$, принадлежащих Q, возьмем самую близкую к u и из вершин $y_j \in Y_\omega$ – самую близкую к v (заметим, что вершины y_i и y_j могут совпадать). Предположим, вершина y_i добавлена к сети $N_{\omega-1}$ между рангами k_i и $k_i + 1$, а вершина y_j – между рангами k_j и $k_j + 1$ $(k_i \leq k_j)$. Тогда часть цепи Q от y_i до y_j не может иметь длину больше $k_j - k_i + 1$, так как в противном случае, взяв цепи, сконструированные в свойстве 2. пункта 2.1 и проходящие через y_i и y_j и соединяя части этих цепей от s до y_i и от y_j до t (имеющие длину $k_i + 1$ и $\omega - k_j$ соответственно) с частью Q от y_i до y_j. Получим, что в графе $\vec{G}$ есть цепь длиннее, $(k_i+1)+(k_j-k_i+1)+(\omega-k_j)-2=\omega$[1] , что приводит к противоречию.

Часть цепи Q от u до y_i не может иметь длину больше k_i, так как, в противном случае, получится, что часть цепи Q от u до y_i содержит вершины из всех рангов от 1 до k_i сети $N^+_{\omega-1} - Y$, следовательно, части цепи Q от u до y_i будет цепью в $N^+_{\omega-1} - Y$, что противоречит свойству 7. из 2.1. Аналогично, по свойству 7. из 2.1 часть цепи Q от y_j до v не длиннее $\omega - k_j - 1$. Следовательно, длина цепи Q не превосходит $(k_i) + (k_j - k_i + 1) - (\omega - k_j - 1) - 2 = \omega - 2$. Итак, мы показали, что в графе $\vec{G}_{\omega-2}$ нет цепи, длиннее $\omega - 2$. Теорема доказана.

2.3. Доказательство оптимальности алгоритма.

Теорема 2. *Алгоритм удаляет минимальное количество вершин для получения $\omega - 2$-хроматического подграфа.*

Доказательство : Пусть Z – некоторое оптимальное решение. Для доказательства оптимальности алгоритма достаточно показать, что в $N^{++}_{\omega-1}$ существует

---

[1] Во время подсчета длины цепи отнимаем 2, потому что вершины y_i и y_j сосчитаны дважды.

вершинный разрез, содержащий $|Z|$ вершин.
Если $|Z| = |Y|$, то в качестве вершинного разреза в $N^{++}_{\omega-1}$ возьмем $Y_{\omega-1}$, так как $|Y_{\omega-1}| = |Y|$.

Предположим, что $|Z| < |Y|$. Так как $Y_{\omega-1}$ – минимальный вершинный разрез в $N^{++}_{\omega-1}$ и $|Y_{\omega-1}| = |Y|$, то в $N^{++}_{\omega-1} - Z$ существует $s-t$ цепь. Далее, Z – разрез в $N^{+}_{\omega-1}$, поэтому любая $s-t$ цепь в $N^{++}_{\omega-1} - Z$ обязательно должна пройти через вершины s_i или t_i. Кстати, ни для какого фиксированного i в $N^{++}_{\omega-1} - Z$ не существуют $s-t$ цепи, проходящие через и s_i и t_i, так как, соединяя эти цепи, получим, что в $N^{++}_{\omega-1} - Z$ существует цепь $s-t$. Это противоречит тому, что Z есть решение.
Пусть

$$I_t = \{i/\ t_i \in N^{++}_{\omega-1} - Z,\ \text{существует } s-t \text{ цепь, проходящая через } t_i\},$$

$$I_s = \{i/\ s_i \in N^{++}_{\omega-1} - Z,\ \text{существует } s-t \text{ цепь, проходящая через } s_i\}.$$

Очевидно, $I_s \cap I_t = \emptyset$.

Пусть $K_t = \{y_i \in Y_\omega \ / \ i \in I_t\}$ и $K_s = \{y_i \in Y_\omega \ / \ i \in I_s\}$. Далее, пусть $\{P_i \ / \ i \in I_t\}$ и $\{R_i \ / \ i \in I_s\}$ – множества вершино-непересекающихся $s-t$ цепей длиной ω, построенные в свойстве 2. из 2.1 и прохдящие через все вершины K_t и K_s соответственно. Соединяя существующую в $N^{++}_{\omega-1} - Z$ $s-t_i$ цепь с $y_i - t$ частью цепи P_i, получим цепь P_i'. Аналогично, соединяя существующую в $N^{++}_{\omega-1} - Z$ $s_i - t$ цепь с $s - y_i$ частью цепи R_i, получим R_i' цепь. По построению цепи P_i' его $y_i - t$ часть проходит по крайней мере через две вершины из Z. Пусть v_{i_0} самая близкая к y_i вершина из Z на $y_i - t$ части цепи P_i' (v_{i_0} и y_i могут совпадать).

Пусть $V_t = \{v_{i_0} \ / \ i \in I_t\}$. Аналогично, пусть v_{i_0} самая близкая к y_i вершина из Z на $s - y_i$ части цепи R_i' и пусть $V_s = \{v_{i_0} \ / \ i \in I_s\}$. Кстати, $V_s \cap V_t = \emptyset$, так как цепи P_i и R_i – вершино-непересекающиеся. По построению множества V_t, каждая вершина из V_t следует за некоторой вершиной из Y_ω в $N^{+}_{\omega-1}$. Итак, никакая вершина из V_t не может предшествовать никакой вершине из Y_ω в $N^{+}_{\omega-1}$, так как в противном случае получим цепь между двумя вершинами из Y_ω в $N^{+}_{\omega-1}$.

Аналогично, каждая вершина в V_s предшествует какой-нибудь вершине из Y_ω и не следует ни за какой вершиной из Y_ω. Итак, в $N^{+}_{\omega-1}$ никакая вершина из V_t не может предшествовать никакой вершине из V_s.

Теперь покажем, что если $S = \{s_i \ / \ i \in I_s\}$ и $T = \{t_i \ / \ i \in I_t\}$, то множество

$$Z' = Z \backslash (V_s \cup V_t) \ \cup \ T \cup S$$

есть вершинный разрез в $N^{++}_{\omega-1}$. Предположим обратное, в $N^{++}_{\omega-1} - Z'$ существует $s-t$ цепь Q. Так как $Z \cup S \cup T$ есть вершинный разрез в $N^{++}_{\omega-1}$, то Q содержит вершины из множества $V_s \cup V_t$. Если Q содержит вершины из V_t, то пусть v_{i_0} самая близкая к t вершина из V_t на Q (v_{i_0} будет ближайшей из множества $V_s \cup V_t$, так как все вершины из V_t следуют за вершинами из V_s). Соединяя $s - v_{i_0}$ часть цепи P_i', проходящей через v_{i_0} и $v_{i_0} - t$ часть цепи Q, построим новую цепь W в $N_{\omega-1}^{++}$. Заметим, что v_{i_0} не предшествует ни одной вершине из Y_ω, поэтому она не предшествует ни одной вершине t_i. Следовательно, $v_{i_0} - t$ часть цепи Q проходит через все ранги $N_{\omega-1}^{++}$, между v_{i_0} и t. Следовательно, W имеет длину ω, но содержит только одну вершину v_{i_0} из Z. Это противоречит тому, что Z есть решение. Если Q не содержит вершины из V_t, то взяв самую близкую к s вершину из V_s на Q, получим цепь длиной ω, как в предыдущем случае, которая содержит только одну вершины из Z. Это противоречит тому, что Z есть решение задачи.

Таким образом, мы доказали, что Z' есть вершинный разрез в $N_{\omega-1}^{++}$ и $|Z| = |Z'|$. Следовательно, алгоритм оптимальный. Теорема доказана.

§3. ПРИМЕР, ИЛЛЮСТРИРУЮЩИЙ РАБОТУ АЛГОРИТМА

Рассмотрим такой пример, где в графе $\vec{G}_\omega$ есть цепь между двумя вершинами из Y_ω, но в сети $N_{\omega-1}^{+}$ нет такой цепи. В качестве входа в алгоритм возьмем граф G из Рис. 5.

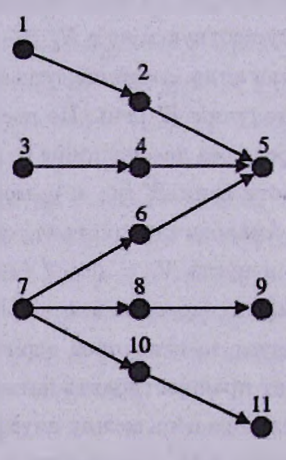

Рис. 5. Исходный граф $\vec{G}_\omega$.

В конце 2-ого шага получим сеть N_ω, представленную на Рис. 6.

В сети N_ω $Y_\omega = \{5, 7\}$ является минимальным вершинным разрезом. Следовательно, алгоритм построит граф $\vec{G}_{\omega-1}$ и соответствующую сеть $N_{\omega-1}$ (Рис. 7).

В конце 6-ого шага алгоритма получим сеть $N_{\omega-1}^{+}$ из Рис. 8. Добавляя вершины s_i и t_i в конце 7-ого шага, получим сеть $N^{++}_{\omega-1}$ из Рис. 9. Заметим, что $Y_{\omega-1} = \{2, 4, s_5, 8, t_7, 10\}$ – минимальный вершинный разрез в $N^{++}_{\omega-1}$. Этот разрез содержит вершины s_i и t_i типов. Поэтому по алгоритму, вместо вершин s_5 и t_7 возьмем вершины 5 и 7 соответственно.

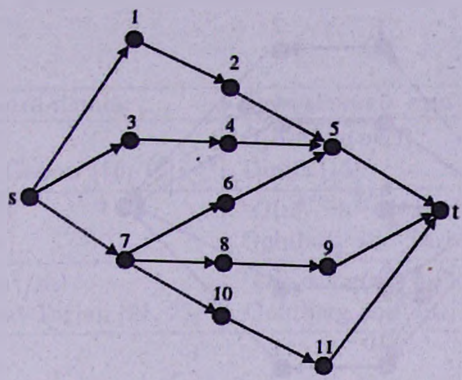

Рис. 6. Сеть N_ω.

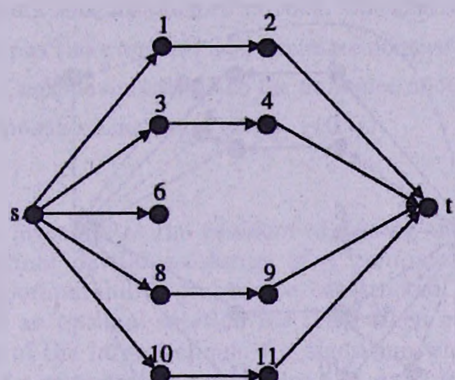

Рис. 7. Сеть $N_{\omega-1}$.

Следовательно, $\{2, 4, 5, 7, 8, 10\}$ – минимальное множество, удаление которого из G дает максимальный 1-хроматический подграф.

§4. СРАВНЕНИЕ ДАННОГО АЛГОРИТМА С ОБЩИМ АЛГОРИТМОМ

Доказательство Фомина [12] и Франка [13] теоремы Грина и Клейтмана[14] дает полиномиальный алгоритм для нахождения максимального q-хроматического подграфа для произвольного q $(1 \leq q \leq \chi(G))$. В теореме Грина и Клейтмана проблема q-MIS сформулирована в терминах частично упорядоченных множеств, т.е. надо найти максимальное объединение q антицепей. В этом алгоритме используется алгоритм нахождения циркуляции с минимальной стоимостью для ориентированного графа. Напротив, в нашем алгоритме используется алгоритм нахождения максимального потока.

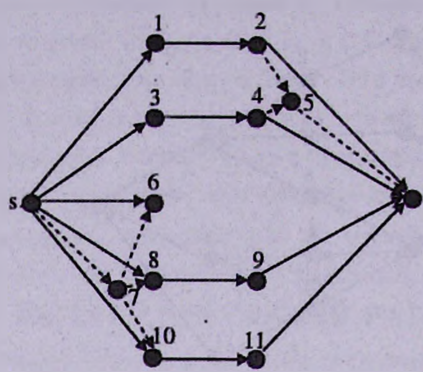

Рис. 8. Сеть $N^{+}_{\omega-1}$ (добавленные дуги показаны короткими пунктирами).

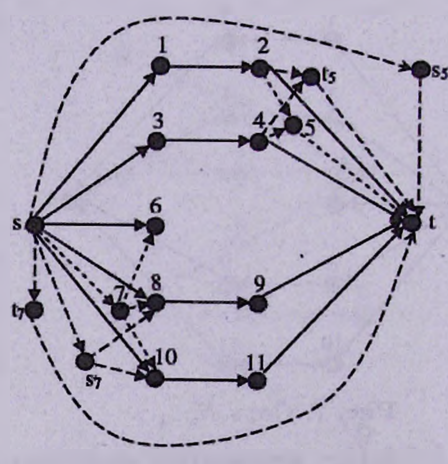

Рис. 9. Сеть $N^{++}_{\omega-1}$ (добавленные дуги показаны длинными пунктирами).

В следующей таблице приведены сложности алгоритмов для нахождения циркуляции с минимальной стоимостью и алгоритмов для нахождения максимального потока. В таблице, n обозначает число вершин, m – число ребер, C – максимум абсолютных значений пропускных способностей ребер, K – максимум абсолютных значений стоимостей ребер, * показывает асимптотически лучшие результаты в таблице.

Если в графе максимальный поток можно найти алгоритмом со сложностью $MF(n, m, C)$, то в этом графе циркуляцию с минимальной стоимостью можно найти алгоритмом со сложностью $O(n \log K \cdot MF(n, m, C))$ [24]. Но алгоритмы нахождения циркуляции и максимального потока имеют одинаковую сложность [11].

Максимальный поток	*Циркуляция с min стоимостью*
$O(nm \log C)$ Dinits [15], Gabow [16, 17]	$O(nm \log(nC))$ Dinits [15]
$O(n^{5/3}m^{2/3})$ Galil [18, 19]	$^*O(n^{5/3}m^{2/3} \log(nK))$ Goldberg and Tarjan [20]
$^*O(nm \log(n^2/m)$ Goldberg and Tarjan [21, 22]	$^*O(nm \log(n^2/m) \log(nK))$ Goldberg and Tarjan [23]

Из этой таблицы видно, что алгоритмы для нахождения циркуляции с минимальной стоимостью имеют по меньшей мере $\log n$ раз большую сложность, чем алгоритмы для нахождения максимального потока. Следовательно, наш алгоритм по меньшей мере $\log n$ раз (по степени) эффективнее общего алгоритма при частном случае $q = \omega - 2$. Следовательно, было бы полезнее обобщить предложенный алгоритм на случай произвольного q $(1 \leq q \leq \chi(G))$.

Abstract. The paper investigates the problem of finding the maximal q-colorable subgraph, i.e. the optimal partial q-coloring of a comparability graph, where q is a natural number. Comparability graphs are constructed, such that the known algorithms do not find an optimal solution for them when $q = \omega - 2$, where ω is the number of vertices of the largest clique. An algorithm which finds the maximal q-colorable subgraph of a comparability graph for $q = \omega - 2$ is described.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Е. Маркосян “О некототых алгоримах и свойствах графов сравнения”, Изв. НАН Армении. Математика, том 35, no. 3, стр. 65 – 78, 2000.
2. С. Е. Маркосян, “О раскраске вершин графов интервалов”, Вопросы радиоэлектроники, сер. ЭВТ, том 4, pp. 3 – 6, 1972.
3. С. Е. Маркосян, А. Г. Маркосян, “Некоторые алгоритмы сравнения графов интервалов”, Кибернетика, том. 2, pp. 72 – 81, 1976.
4. M. Yannakakis, F. Gavril, “The maximum k-colorable problem for chordal graphs”, Information Processing Letters, pp. 133-137, 1987.
5. F. Gavril, “Algorithms for maximum k coloring and k covering of transitive graphs”, Networks, 17, pp. 465 – 470, 1987.

6. C. Berge, "Minimax Relations for the partial q-coloring of Graphs", Discrete Mathematics, vol. 74, pp. 3 – 14, North-Holland,1989.
7. K. Cameron. A min-max relation for the partial q-coloring of a graph. Part II : Box perfection, Discrete Mathematics, vol. 74, pp. 15 – 27, North-Holland, 1989.
8. L. Lovasz, "Perfect graphs", in : Selected Topics in Graph Theory 2, pp. 55 – 87, Academic Press N.Y., 1983.
9. C. Berge. Theorie des graphes et ses applications. Paris, p. 316, 1958.
10. M. Garey, D. Johnson. Computers and intractability. San Francisco, p. 191, 1979.
11. A. Schrijver, "Combinatorial Optimization", in : Springer-Verlag, pp. 224 – 226, 2003.
12. S. V. Fomin, "Finite partially ordered sets and Young tableaux", Soviet Mathematics Dokladi, vol. 19, pp. 1510 – 1514, 1978.
13. A. Frank, "On chain and antichain families of a partially ordered set", Journal of Combinatorial Theory, Series B 29, pp. 176 – 184, 1980.
14. C. Greene, D. J. Kleitman, "The structure of Sperner k-families", Journal of Combinatorial Theory, Series A 20, pp. 41 – 68, 1976.
15. E. A. Dinits, "The method of scaling and transportation problems", Studies in Discrete Mathematics, Moscow, pp. 46 – 57, 1973.
16. H. N. Gabow, "Scaling algorithms for network problems", in : 24th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, New York, pp. 248 – 257, 1983.
17. H. N. Gabow, "Scaling algorithms for network problems", Journal of Computer and System Science, vol. 31, pp. 148 – 168, 1985.
18. Z. Galil, "New algorithm for the maximal flow problem", in : 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, New York, pp. 231 – 245, 1978.
19. Z. Galil, "An $O(V^{5/3}E^{2/3})$ algorithm for the maximal flow problem", Acta Informatica, vol. 14, pp. 221 – 242, 1980.
20. A. V. Goldberg, R. E. Tarjan, "Solving minimum-cost flow problems by successive approximation", in : Proceedings of the 19-th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, New York, pp. 7 – 18, 1987.
21. A. V. Goldberg, R. E. Tarjan, "A new approach to the maximum flow problem", in : Proceedings of the 18-th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, New York, pp. 136 – 146, 1986.
22. A. V. Goldberg, R. E. Tarjan, "A new approach to the maximum flow problem", Journal of the Association for Computing Machinery, vol. 35, pp. 921 – 940, 1988.
23. A. V. Goldberg, R. E. Tarjan, "Finding minimum cost circulations by successive approximation", Mathematics of Operations Research, vol. 15, pp. 430 – 466, 1990.
24. H. Röck, "Scaling techniques for minimal cost network flows", Discrete Structures and Algorithms, München, pp. 181 – 191, 1980.

Поступила 13 января 2006