

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ХАРДИ И ДЖРБАШЯНА С ВЕСАМИ МАКЕНХАУПТА

Р. Ф. Шамоян

Брянский государственный университет, Россия

E-mail : rsham@mail.ru

Резюме. Получены неравенства для классов Джрбашяна в Харди с весами Макенхаупта. Эти неравенства использованы для обобщения некоторых хорошо известных результатов о проекциях и мультипликаторах в классических пространствах Джрбашяна.

ВВЕДЕНИЕ

Основная цель этой работы получение оценок в пространствах A^p аналитических функций с весами Макенхаупта на прямой \mathbb{R}^1 или на плоскости \mathbb{R}^2 . Эти оценки далее используются для обобщения некоторых теорем из [6], [9], [12] на пространства Харди и Джрбашяна с весами Макенхаупта. Автор надеется распространить эти результаты на полидиски в отдельной работе, готовящейся к печати.

Хотя матричнозначные и другие многомерные варианты пространств A^p в настоящее время интенсивно изучаются, много одномерных вопросов, связанных с пространствами A^p остаются открытыми (см., например, [3], [7] и указанную там литературу).

§1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определение 1. Весовой функцией $\omega(z)$ в \mathbb{R}^n назовём любую локально интегрируемую функцию $\omega(z)$ со значениями в $(0, +\infty)$ для почти всех $z \in \mathbb{R}^n$ (в частности $d_n(\omega = \infty) = d_n(\omega = 0) = 0$, где d_n – мера Лебега в \mathbb{R}^n), см. [10].

Неотрицательная мера ω принадлежит классу A_p , ($1 < p < +\infty$), если

$$\sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (\omega(x))^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} < +\infty, \quad (1)$$

где супремум берётся по кубам (или шарам) в \mathbb{R}^n , см. [10]), а $|Q|$ – его мера. Вес $\omega \geq 0$ принадлежит $A_1(\mathbb{R}^n)$, если для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$M(\omega)(x) = \sup_{z \in B} \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega(t) dt \right) \leq C_1 \omega(x). \quad (1')$$

где супремум берётся по всем шарам $B \subset \mathbb{R}^n$ или кубам $Q \subset \mathbb{R}^n$, содержащим точку x , а $C_1 > 0$ – постоянная.

Всюду ниже. $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ – круг единичного радиуса на комплексной плоскости \mathbb{C} , $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ – его граница, $H(\mathbb{D})$ – класс всех голоморфных в \mathbb{D} функций. $dm(\xi)$ и $dm_2(z)$ суть нормированные меры Лебега в \mathbb{T} и \mathbb{D} соответственно. H^p ($0 < p < +\infty$) – пространства Харди в круге. Обозначим через $\diamond I = \{r\xi : \xi \in I, 1 - |I| \leq r < 1\}$ известную коробку Карлесона, где I – дуга на \mathbb{T} , а через $P(g)$ интеграл Пуассона функции $g \in L_p(\mathbb{T})$. Пусть

$$\Gamma(\xi) = \{z \in \mathbb{D} : |1 - \bar{\xi}z| < 1 - |z|, \quad \xi \in \mathbb{T}\}$$

конус Лузина и

$$\Delta_{i,k} = \{z = r\xi : \xi \in I_{i,k}, \quad r \in I_k = (1 - 2^{-k}, 1 - 2^{-k-1})\}, \quad |\Delta_{i,k}| = m_2(\Delta_{i,k}),$$

$$I_{i,k} = \left\{ \xi \in \mathbb{T} : \arg \xi \in \left(\frac{\pi i}{2^k}, \frac{\pi(i+1)}{2^k} \right) \right\}, \quad i = -2^k, \dots, 2^k - 1,$$

где интервалы $\left(\frac{\pi i}{2^k}, \frac{\pi(i+1)}{2^k} \right)$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) являются днадическим разбиением круга (см. [9]). Обозначим через $\Delta_{i,k}^*$, строящиеся по $\Delta_{i,k}$, расширенные днадические четырехугольники (см. [9]).

Через Mg в (1') и всюду ниже обозначается максимальная функция Харди-Литтлвуда (см. [10]), $C, C_1, C(\alpha)$ всюду ниже положительные константы. Результаты параграфа 2 навеяны следующими обобщениями известной теоремы Карлесона, установленными сравнительно недавно и изложенными в [1] – [3].

Теорема А. 1) Пусть функция $\omega \geq 0$ и $\omega, \omega^{-1} \in L^1(\mathbb{T})$. Предположим, что $\mu \geq 0$ – мера в \mathbb{D} такая, что

$$\int_{\mathbb{D}} P_z(\zeta) (\omega(\zeta))^2 d\mu(\zeta) \leq C_2 \bar{\omega}(z) \equiv C_2 \int_{\mathbb{T}} P_z(\xi) \omega(\xi) dm(\xi), \quad (1'')$$

где $z \in \mathbb{D}$, C_2 – константа, а $P_z(\xi) = (1 - |z|^2)/|1 - \bar{\xi}z|^2$ – ядро Пуассона. Тогда для любой функции $f \in L^2(\mathbb{T}, \omega^{-1})$ имеет место неравенство :

$$\int_{\mathbb{D}} |Pf(\zeta)|^2 d\mu(\zeta) \leq C' \int_{\mathbb{T}} |f(\xi)|^2 (\omega(\xi))^{-1} dm(\xi).$$

2) Пусть $\omega \in A_2$ и μ - мера Карлесона в \mathbb{D} . Тогда

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \bar{\omega}(z) d\mu(z) \leq C \int_{\mathbb{T}} |f(\xi)|^2 \omega(\xi) dm(\xi)$$

для любой функции $f(z)$ из класса

$$H^2(\omega) = \{f \in H^1(\mathbb{T}) : f(e^{i\theta}) \in L^2(\omega, d\theta)\}.$$

3) Пусть $\omega \in L^1(\mathbb{T})$ и пусть

$$H^p(\omega) = \{f \in H^1(\mathbb{T}) : f(e^{i\theta}) \in L^p(\omega, d\theta)\}, \quad 1 \leq p < +\infty.$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{D}} |D^\alpha f(z)|^p d\mu(z) \leq C \int_{\mathbb{T}} |f(e^{i\theta})|^p \omega(\theta) d\theta, \quad (2)$$

где $\omega \in A_p$ и $\alpha = 0$. Если $\mu(\diamond I) \leq C \int_I \omega d\xi$, и $\mu(\diamond I) \leq C|I|^{1+\epsilon} \int_I \omega(\xi) d\xi$ для некоторого $\epsilon > 0$, то (2) имеет место при $\omega \in A_1$, $\alpha = 1$.

Нам в дальнейшем понадобится следующая лемма из [3].

Лемма А. Пусть $\omega \in A^2(\mathbb{T})$ - вес Макенхаупта. Тогда для любой меры Карлесона μ в \mathbb{D} имеем

$$\int_{\mathbb{D}} P_s(\zeta) \bar{\omega}(\zeta) d\mu(\zeta) \leq C \bar{\omega}(z).$$

Будем говорить, что весовая функция ω удовлетворяет условию (\bar{L}) , если

$$\inf_K \frac{1}{|K|} \int_K (\omega(\xi))^{-q} d\xi \geq C(q) > 0, \quad 0 < q < +\infty,$$

где $K = \Delta_{i,k}(I_{i,k})$ ($k = 0, 1, 2, \dots, i = -2^k, \dots, 2^k - 1$) - "куб" в $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$.

§2. НЕРАВЕНСТВА

Одна из основных целей этого параграфа - получить некоторые обобщения известных теорем вложения (в частности, теоремы вложения Карлесона) на пространства голоморфных функций в \mathbb{D} :

$$H_{\omega}^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in L_{\omega}^p(\mathbb{T}) \cap H(\mathbb{D}) : \left(\int_{\mathbb{T}} \left(\sup_{z \in \Gamma(\xi)} |f(z)|^p \right) \omega(\xi) d\xi \right)^{1/p} < +\infty \right\}, \quad 0 < p < +\infty,$$

где $\omega \in A_{\bar{p}}$ для некоторого $1 \leq \bar{p} \leq +\infty$ (в обзоре [7] приводится ряд утверждений о распространении известных теорем о пространствах Харди $H^p(\mathbb{D})$ на $H_{\omega}^p(\mathbb{D})$)

$$A^p(\omega^s) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{D}) \cap H(\mathbb{D}) : \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \omega^s(z) dm_2(z) < +\infty \right\} \quad (0 < p, s < +\infty)$$

в духе Теоремы А. В качестве приложения, в §3 приведены обобщения известных утверждений о коэффициентных мультипликаторах, функционалах и проекторах в пространствах H_{ω}^p и $A^p(\omega)$.

Теорема 1. 1) Пусть $1 < q \leq p < +\infty$ и $\omega^{-q} \in A_{q/p+1}(\mathbb{R}^2)$ мера, удовлетворяющая условию $\omega^{-q} \in (\bar{L})$ и пусть $f \in H(\mathbb{D})$. Тогда

$$\left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (\omega(z))^p dm_2(z) \right)^{q/p} \leq \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^q (\omega(z))^{-q} (1 - |z|)^{2q/p-2} dm_2(z), \quad (2')$$

если

$$\frac{1}{|\Delta_{jk}^*|} \int_{\Delta_{jk}^*} |f(z)|^q dm_2(z) \leq C \frac{\int_{\Delta_{jk}^*} |f(z)|^q (\omega(z))^{-q} dm_2(z)}{\int_{\Delta_{jk}^*} (\omega(z))^{-q} dm_2(z)}.$$

2) Пусть $0 < q \leq 1$ и функция ω такова, что $\omega^{-q} \in A_1$ и $\omega^{-q} \in (\bar{L})$. Тогда для любой функции $f \in H(\mathbb{D})$ имеем

$$\left(\int_0^1 M_p(f, r) \omega(r) dr \right)^q \leq C_{p,q} \int_0^1 M_p^q(f, r) (\omega(r))^{-q} (1 - r)^{q-1} dr, \quad (2'')$$

где

$$M_p^p = \int_{\mathbb{T}} |f(r\xi)|^p dm(\xi).$$

Определение 2. Будем говорить, что неотрицательная борелевская мера μ удовлетворяет ω_α -условию Карлесона ($\alpha \in \mathbb{R}$), если для некоторой весовой функции $\omega \in L_{i\alpha}^1(\mathbb{T})$

$$\left\| \sup_{I \in \mathcal{I}} \left(\frac{1}{|I|} \int_{\Pi I} \varphi(z) dm_2(z) \right) (\omega(\xi))^\alpha \right\|_{L^\infty(dm(\xi))} < +\infty,$$

где

$$\varphi(z) = \sum_{j,k} 2^{2k} \mu(\Delta_{jk}) \lambda_{\Delta_{jk}^*}(z).$$

Ниже будем предполагать, что $\omega \in A_p(\mathbb{T})$ ($1 < p < +\infty$) и p' такое, что $1/p + 1/p' = 1$. Нам понадобится следующая легко выводимая формула [6]:

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^t d\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\Gamma(\xi)} \frac{|f(z)|^t}{1 - |z|} d\mu(z) \right) dm(\xi), \quad (2''')$$

где $t \in (0, +\infty)$, а μ - положительная борелевская мера.

Замечание 1. Легко видеть из доказательства утверждения 1) Теоремы 1, что подобные (2') формулы верны и в несколько более общем случае, когда $dm_2(z)$ заменена весом $(1 - |z|)^\alpha dm_2(z)$ ($\alpha > -1$).

Теорема 2. Пусть $\omega \in A_p(\mathbb{T})$, ($p \geq q = 1, 2, \dots$) и пусть μ — ω -мера Карлесона, где $\alpha = -q/p$. Тогда для любой функции $f \in H_p^\omega$ удовлетворяющей условию

$$(V) \quad \frac{1}{|\Delta_{ik}|} \left[\max_{\Delta_{ik}} |P(g)(z)| \right] \int_{\Delta_{ik}} |f(z)|^q dm_2(z) \leq \frac{1}{|\Delta_{ik}|} \int_{\Delta_{ik}} |P(g)(z)| |f(z)|^q dm_2(z)$$

для любого $k = 0, 1, \dots$, $i = -2^k, \dots, 2^k - 1$, любой $f \in H_p^\omega$ и $g \in L^{(p/q)'}(\omega)$ имеет место оценка :

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\Gamma(\xi)} \frac{|f(z)|^q}{1-|z|} d\mu(z) \right)^{p/q} dm(\xi) \leq C \|f\|_{H_p^\omega}^p. \quad (3)$$

Замечание 1'. Для $\omega \equiv C$, первые два неравенства в (2') и (2'') хорошо известны и имеют много приложений в теории пространств голоморфных функций (описание ограниченных линейных функционалов, теоремы вложения, теоремы о мультипликаторах и т.д., см. [3], [9]). Некоторые следствия (3), известные при $\omega \equiv C$, приведены в параграфе 3. Без условия (V), Теорема 2, в силу (2'') является обобщением классической теоремы Карлесона (случай $\omega \equiv C$, $p = q$ Теоремы 2) и теоремы У. Кона из [6] (случай $\omega \equiv 1$, $q = 1$ теоремы 2). Ограничение (V) на наш взгляд, заслуживает отдельного изучения.

Доказательство Теоремы 1. Нам понадобится следующее простое утверждение : если вес удовлетворяет условию Макенхаупта $A_p(\mathbb{R}^2)$ ($p \geq 1$) на комплексной плоскости, то для любых $k = 0, 1, 2, \dots$ и $i = -2^k, \dots, 2^k - 1$ имеют место соотношения :

$$(a) \quad \sup_{z \in \Delta_{ik}} \frac{1}{|\Delta_{ik}|} \int_{\Delta_{ik}} \omega(\zeta) dm_2(\zeta) \leq C \omega(z), \quad z \in \Delta_{ik}, p = 1, \quad (3')$$

$$(b) \quad \sup_{\Delta_{ik}} \left(\frac{1}{|\Delta_{ik}|} \int_{\Delta_{ik}} \omega(z) dm_2(z) \right) \left(\frac{1}{|\Delta_{ik}|} \int_{\Delta_{ik}} (\omega(z))^{-\frac{1}{p-1}} dm_2(z) \right)^{p-1} < +\infty, \quad p > 1. \quad (3'')$$

Для доказательства (3''), достаточно заметить, что для любого $\Delta_{ik} \subset D$ ($k = 0, 1, 2, \dots$, $i = -2^k, \dots, 2^k - 1$) найдутся кубы $K_2, K_1 \subset \mathbb{R}^2$ такие, что $K_1 \subset \Delta_{ik} \subset K_2$ и $C_1 |K_1| \leq |\Delta_{ik}| \leq |K_2| C_2$ ($i = 1, 2$) для некоторых постоянных C_1 и C_2 . Для доказательства (3'), см. [9], стр. 40.

Нетрудно проверить, что

$$S = \left(\int_D |f(z)|^p (\omega(z))^p dm_2(z) \right)^{q/p} \leq \sum_{i,k} \max_{\Delta_{ik}} |f(z)|^q \left(\int_{\Delta_{ik}} (\omega(z))^p dm_2(z) \right)^{q/p}. \quad (3''')$$

Учитывая субгармоничность $|f|^q$, получаем

$$\max_{z \in \Delta_{ik}} |f(z)|^q \leq \frac{C_q}{|\Delta_{ik}^*|} \int_{\Delta_{ik}^*} |f(z)|^q dm_2(z), \quad 0 < q < \infty,$$

где Δ_{ik}^* ($k = 0, 1, 2, \dots, i = -2^k, \dots, 2^k - 1$) суть увеличенные диадические кубы (см. [9]).

Далее, при $s = q/p + 1$ используя (3'') и известное "обратное неравенство Гёльдера" для весов Макенхаупта (см. [10]), получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Delta_{ik}} (\omega(z))^p dm_2(z) \right)^{q/p} &= |\Delta_{ik}|^{q/p} \left\{ \left(\int_{\Delta_{ik}} (\omega(z))^q dm_2(z) \right)^{-p/q} \frac{1}{|\Delta_{ik}|} \right\}^{q/p} \leq (\tilde{L}), \\ (\omega^{-q} \in A_s) &\leq |\Delta_{ik}|^{q/p} \left(\int_{\Delta_{ik}} (\omega(z))^{-q} dm_2(z) \right) \frac{1}{|\Delta_{ik}|} \leq \\ &\leq |\Delta_{ik}|^{\frac{2-p}{p}} \int_{\Delta_{ik}} (\omega(z))^{-q} dm_2(z). \end{aligned} \quad (4)$$

Далее

$$\begin{aligned} S &\leq \sum_{i,k} \frac{|\Delta_{ik}|^{q/p-1}}{|\Delta_{ik}^*|} \int_{\Delta_{ik}^*} |f(z)|^q dm_2(z) \int_{\Delta_{ik}^*} (\omega(z))^{-q} dm_2(z) \leq \\ &\leq \int_D |f(z)|^q (\omega(z))^{-q} (1-|z|)^{2q/p-2} dm_2(z), \end{aligned}$$

где последняя оценка следует из соотношений

$$(1-|z|)^2 \sim 2^{-2k} \sim |\Delta_{ik}| \sim |\Delta_{ik}^*|, \quad z \in \Delta_{ik},$$

в оценки (см. [10])

$$\frac{1}{|\Delta_{ik}^*|} \int_{\Delta_{ik}^*} |f(z)|^q dm_2(z) \leq [\omega^{-q}]_{A_s} \frac{\int_{\Delta_{ik}^*} |f(z)|^q (\omega(z))^{-q} dm_2(z)}{\int_{\Delta_{ik}^*} (\omega(z))^{-q} dm_2(z)}, \quad (4')$$

вытекающей из (3') и неравенства (см. [9])

$$\sum_{i,k} \int_{\Delta_{ik}^*} |G(z)|^q dm_2(z) \leq C_q \int_D |G(z)|^q dm_2(z), \quad q \in (0, +\infty), \quad G \in L^q(D), \quad (4'')$$

которое вытекает в силу конечнократности покрытия $\{\Delta_{ik}^*\}$.

Докажем оценку пункта 2). Рассуждения во многом сходны с рассуждениями приведёнными выше. Очевидно, что

$$I = \left(\int_0^1 M_p(f, r) \omega(r) dr \right)^q \leq \sum_{k \geq 0} (M_p(f, r_k))^q \left(\int_{1-2^{-k}}^{1-2^{-k-1}} \omega(r) dr \right)^q.$$

Далее, так как $\omega^{-q} \in A_p(\mathbb{R})$, то рассуждая как и выше (доказательство оценки (4), пункт 1)), получаем

$$\left(\int_{1-2^{-k-1}}^{1-2^{-k-2}} (\omega_1(r))^{-1/q} dr \right)^q \leq 2^{-k(q-1)} \int_{I_k} (\omega(|z|))^q d(|z|) \quad (\omega_1 = \omega^{-q}).$$

Далее, очевидно,

$$M_p^q(f, \tau_k) \leq \left(\int_{1-2^{-k-1}}^{1-2^{-k-2}} M_p^q(f, r) dr \right) (2^k)^q,$$

где $\tau_k = 2^{-k-1}$. Следовательно, учитывая аналог (4') для $I_k = (1 - 2^{-k-1}, 1 - 2^{-k-2})$, окончательно получаем

$$I \leq \int_0^1 M_p^q(f, r) (\omega(r))^{-q} (1-r)^{q-1} dr.$$

Доказательство теоремы 2. Наши рассуждения в корне отличаются от рассуждений У. Кона из [6], и основываются на свойствах новых функциональных пространств, введённых в работе [5]. В отличие от [6], наши рассуждения обладают преимуществом, так как отделяют условие на μ , "расщепляя" g и μ , что позволяет получать новые условия на μ и новые теоремы вложения.

Пользуясь соображениями двойственности, при $g \in L^{(p/q)'}(d\xi)$, получаем

$$S = \int_{\Gamma} \left(\int_{\Gamma(\xi)} \frac{|f(z)|^q}{1-|z|} d\mu(z) \right)^{p/q} d\tau(\xi) = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma(\xi)} \frac{|f(z)|^q}{1-|z|} d\mu(z) g(\xi) d\tau(\xi).$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$S = \int_{\mathcal{D}} |f(z)|^q |G^*g(z)| d\mu(z), \quad (G^*g)(z) = \frac{1}{1-|z|^2} \int_{\Gamma} \lambda_{\Gamma(\xi)}(z) g(\xi) d\tau(\xi).$$

Известно (см. [6]), что

$$|G^*(g)(z)| \leq P(g)(z), \quad (4''')$$

где $P(g)$ – интеграл Пуассона функции g . Далее (см. [9]), имеем

$$S \leq \int_{\mathcal{D}} |f(z)|^q |P(g)(z)| d\mu(z), \quad (5)$$

$$S \leq \sum_{i,k} \int_{\Delta_{ik}} |G(z)| d\mu(z) \leq C \sum_{i,k} \left(\max_{\Delta_{ik}} |G| \right) \mu(\Delta_{ik}) \quad (6)$$

$$\max_{z \in \Delta_{i,k}} |G(z)| \leq \max_{z \in \Delta_{i,k}} |P(g)(z)| \max_{z \in \Delta_{i,k}} |f(z)|^q, \quad |G(z)| = |P(g)(z)||f(z)|^q,$$

где, как и выше,

$$\Delta_{i,k} = \{r\xi : r \in (1 - 2^{-k}, 1 - 2^{-k-1}), \xi = e^{i\vartheta}, \pi i 2^{-k} < \vartheta \leq \pi(i+1)2^{-k}\}, \quad (7)$$

$k = 0, 1, \dots, i = -2^k, \dots, 2^k - 1$. Известно [9], что

$$\max_{z \in \Delta_{i,k}} |G_1(z)| \leq \left(\int_{\Delta_{i,k}} |G_1(z)| dm_2(z) \right) 2^{2k}, \quad |G_1(z)| = |f(z)|^q. \quad (7')$$

Следовательно, учитывая (4''), (5), (V), (6) и (7'), получаем

$$S \leq \int_D |f(z)|^q |P(g)(z)| \sum_{i,k} 2^{2k} \mu(\Delta_{i,k}) \lambda_{\Delta_{i,k}} dm_2(z), \quad \lambda_{\Delta_{i,k}} = 0, \quad z \notin \Delta_{i,k}.$$

Используя неравенство, доказанное в [5]

$$\int_D \frac{|f(z)g(z)|}{1-|z|} dm_2(z) \leq \int_T \sup_{z \in \Gamma(\xi)} |f(z)| \sup_{z \in \Gamma} \int_{\Pi_I} \frac{|g(z)|}{1-|z|} dm_2(z) dm(\xi) \quad (8)$$

и тот факт, что ядро Пуассона оценивается сверху через максимальную функцию Харди-Литтлвуда, получаем

$$S \leq \int_D |f(z)|^q |P(g)(z)| \sum_{i,k} 2^{2k} \mu(\Delta_{i,k}) \lambda_{\Delta_{i,k}} dm_2(z) \leq \int_D |f(z)|^q |P(g)(z)| \varphi(z) dm_2(z), \quad (9)$$

$$\left\| \sup_{\xi \in I} \int_{\Pi_I} \varphi(z) dm_2(z) (\omega(\xi))^{-q/p} \right\| \left\| \int_T \sup_{z \in \Gamma(\xi)} |P(g)(z)| \sup_{z \in \Gamma(\xi)} |f(z)|^q (\omega(\xi))^{q/p} dm(\xi) \right\| = \\ = S_1^\omega \times S_2, \quad (9')$$

где

$$\varphi(z) = \sum_{i,k} 2^{2k} \mu_{\Delta_{i,k}} (\lambda_{\Delta_{i,k}}(z)).$$

Неравенство для S_2 вытекает из неравенства Гельдера с показателем p/q ($p > q$) и из теоремы Харди-Литтлвуда (см. [7, 10]) об ограниченности оператора $M_g : L^p \rightarrow L^p$ при $p > 1$. Наконец, легко показать (см. [10]), что $S_1^\omega(\omega) \leq \|\mu\|_{\text{Caro}(\omega)}$ при $\alpha = -q/p$ (см. [4]).

Замечание 2. При $\omega \equiv 1$ и $q = 1$ неравенство (3) теоремы 2 было установлено У. Коном в [6]. Из (2''') легко видеть, что результат У. Кона обобщает теорему

Карлесона при $p = q = 1$. Действительно, достаточно учесть, что при $|\Delta_{i,k}^*| = 2^{-2k}$ и (см. [4])

$$\frac{1}{|J|} \int_{\Pi J} F(z) dm_2(z) \leq C \int_D \frac{|F(z)|}{|1 - \bar{w}z|^2} (1 - |w|) dm_2(z)$$

при $w \equiv 1$ и $q = 1$ имеем

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \sup_{\xi \in J} \frac{1}{|J|} \left[\int_{D J} \sum_{i,k} 2^{2k} \mu(\Delta_{j,k}) \lambda_{\Delta_{i,k}^*}(z) dm_2 \right] \leq \\ &\leq \sup_{w \in D} \sum_{i,k} 2^{2k} \mu(\Delta_{j,k}) \int_{\Delta_{i,k}^*} \frac{1 - |w|}{|1 - \bar{w}z|^2} dm_2(z) \leq \\ &\leq \sup_{w \in D} (1 - |w|) \int_D \frac{d\mu(z)}{|1 - \bar{w}z|^2} \sup_{\xi \in J} \frac{1}{|J|} \int_{\Pi J} d\mu. \end{aligned} \quad (10)$$

§3. ТЕОРЕМЫ О МУЛТИПЛИКАТОРАХ И ПРОЕКТОРАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ И ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С ВЕСАМИ ТИПА МАКЕНХАУПТА

Начнем с доказательств двух утверждений (известных при $w \equiv C$) для пространств Джрбашяна с весами Макенхаупта. Доказательства опираются на Лемму А и Теоремы 1 и 2. Затем мы рассмотрим операторы свертки и проектирования, действующие в H_α^p и $A_\alpha^p(\omega^q)$. Сделаем сначала несколько замечаний, вытекающих из утверждений, доказанных в §1.

Из (2') легко вывести, что если $g(z)$ функция класса

$$\sup_{z \in D} |D^{\beta+1} g(z)| |\omega(z)|^{-1} (1 - |z|)^{\beta+2 - \frac{\alpha+2}{q}} < +\infty, \quad \beta > \frac{\alpha+2}{q}, \quad (11)$$

то формула

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_T f(r\xi) \overline{g(r\xi)} dm(\xi)$$

порождает ограниченный, линейный функционал на пространстве

$$A_\alpha^q(\omega^{-q}) = \left\{ f \in H(D) : \|f\|_{A_\alpha^q(\omega^{-q})}^q = \int_D |f(z)|^q (\omega(z))^{-q} (1 - |z|)^\alpha dm_2(z) < +\infty \right\}, \quad (12)$$

где $q \leq 1$ и $\omega^{-q} \in A_1(\mathbb{R}^2) \cap (\tilde{L})$ (это утверждение известно из [9] для $w \equiv 1$ (или $w \equiv C$), так как $A_\alpha^p = A_\alpha^p(1)$).

Используя (3) и (2'), (2''), можно легко вывести различные оценки, связывающие пространства Джрбашяна (или со смешанной нормой) с весами Макенхаупта с

пространствами Харди с весами A_p . Кроме того, для функций из пространств A_α^p имеет место известная оценка (см. [9]):

$$|f(z)| \leq \frac{C \|f\|_{A_\alpha^p}}{(1 - |z|)^{(2+\alpha)/p}}, \quad 0 < p < +\infty, \quad \alpha > -1. \quad (14)$$

Для пространств $A_\alpha^q(\omega^{-q})$, $\omega^{-q} \in A_1$ имеет место обобщение оценки (14):

$$|f(z)| \leq \frac{C \|f\|_{A_\alpha^q(\omega^{-q})}}{\left[(1 - |z|)^\alpha \int_B \omega^{-q}(\xi) dm_2(\xi) \right]^{1/q}}. \quad (15)$$

Действительно, если $z \in \mathbb{D}$, то $B\left(z, \frac{1-|z|}{2}\right) \subset \mathbb{D}$, и из (4') и субгармоничности функции $|f(z)|^q$, для любых $0 < q < \infty$ и $\alpha > -1$, получаем

$$\begin{aligned} (1 - |z|)^\alpha |f(z)|^q &\leq \frac{C}{|B|} \int_B |f(\zeta)|^q (1 - |\zeta|)^\alpha dm_2(\zeta) \leq \\ &\leq [\omega^{-q}]_{A_1} \left(\int_B (\omega(z))^{-q} dm_2(z) \right)^{-1} \int_B |f(z)|^q (1 - |z|)^\alpha (\omega(z))^{-q} dm_2(z). \end{aligned}$$

Аналогично случаю "обычных" пространств $A_\alpha^p(\omega)$ и $A_\beta^q(\omega)$, $p \neq q$, из оценки (15) можно получать различные вложения.

Хорошо известны также следующие утверждения (см. [9], [11]): (i) при любом $\alpha > -1$, $0 < p \leq 1$ и $\beta > 0$ таких, что $\alpha > \beta + 1/p - 2$, оператор

$$(T_\alpha f)(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(z)}{(1 - \zeta \bar{z})^{\alpha+2}} (1 - |z|)^\alpha dm_2(z),$$

где $\mu(z) = (1 - |z|)^{\beta p - 1} dm_2(z)$, отображает $hA_{\beta p - 1}^p$ в пространство $A_{\beta p - 1}^p(\mathbb{D})$. Далее, (ii) если $\omega(z) \geq 0$, $1 < p < +\infty$ и $d\mu_\alpha(z) = (1 - |z|)^\alpha dm_2(z)$, то T_α отображает $L^p(D, \omega(z) d\mu_\alpha(z))$ в себя, если

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|)^{-(2+\alpha)} \left(\int_{\mathbb{D}} \omega(z) (1 - |z|)^\alpha dm_2(z) \right)^{1/p} \times \\ \times \left(\int_{\mathbb{D}} (\omega(z))^{-q/p} (1 - |z|)^\alpha dm_2(z) \right)^{1/q} < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Утверждение (i) является вариантом обычной теоремы о проекторах из L_α^p в A_α^p ($p \geq 1$) (см. [9]), а Теорема 3 (которую мы докажем опираясь на Теорему 1) является его обобщением для $0 < p \leq 1$. Теорема 3 одновременно касается ограниченности проекторов в классе $hA_\alpha^p(\omega)$ функций гармонических в круге и имеющих конечные квазинормы $\|f\|_{A_\alpha^p(\omega)}$ ($0 < p \leq 1$). Кроме того, Теорема 3 даёт аналог (ii) для гармонических пространств Джрбашяна с весами Макенхаупта A_p ($0 < p \leq 1$) и является основным результатом, опирающимся на Теорему 1.

Теорема 3. Пусть $\beta > 0$, $0 < q \leq 1$ и $\alpha > 1/q - 2 + \beta$ суть числа и пусть $g^{-q}(z) \in A_1(\mathbb{R}^2) \cap (L)$. Тогда оператор

$$(T_\alpha^g)(\omega) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(z)g(z)}{(1 - \omega\bar{z})^{\alpha+2}} (1 - |z|)^\alpha dm_2(z)$$

ограничен и отображает $hA_{\beta q-1}^q(g^{-1})$ в $A_{\beta q-1}^q(1)$.

Доказательство следует из последовательного применения оценок (2') и следующей оценки

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |\zeta|)^t}{|1 - \zeta z|^{t_1}} dm_2(\zeta) \leq \frac{C}{(1 - |z|)^{t_1 - t - 2}}, \quad t_1 > t + 2, \quad t > -1.$$

Очевидно, при $g(z) \equiv 1$ Теорема 3 даёт утверждение 1) Теоремы 1.

Наконец, дадим ещё одно применение Теоремы 1, теорему о коэффициентных мультипликаторах классов $A_\alpha^p(\omega)$ и H_t^p . Эта теорема обобщает известные утверждения (случай $\omega \equiv 1$) из [12], [14].

Напомним, что (см. [12]) последовательность $\{c_k\}_{k \geq 0}$ называется коэффициентным мультипликатором из X в Y (где пространства X и Y суть некоторые подмножества из $H(\mathbb{D})$) если для любой функции $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k \in X$ функция $g(z) = \sum_{k \geq 0} a_k c_k z^k$ принадлежит множеству Y . Через $M_T(X, Y)$ обозначим пространство мультипликаторов действующих из X в Y .

Теорема 4. Пусть $0 < p \leq 1$, $0 < q \leq p$, $t \geq 0$ и $\alpha > -1$ суть числа. Тогда

$$M_T(A_\alpha^q(\bar{\omega}), H_t^{p, \infty}) = \left\{ g \in H(\mathbb{D}) : \sup_{z \in \mathbb{D}} M_p(D^\gamma g, |z|) (\bar{\omega}(z))^{-1/q} (1 - |z|)^{t+1/q} < +\infty \right\},$$

где $\gamma = (\alpha + 2)/q - 1$,

$$H_t^{p, \infty} = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \sup_{0 < r < 1} M_p(f, r) (1 - r)^t < \infty, \quad t \geq 0, \quad 0 < p < \infty \right\}$$

где $\bar{\omega}$ определена в $|z| < 1$ по (1*), $\omega \in A_2(\mathbb{T})$ - вес Макенхаупта, $(\bar{\omega}(z))^{-1} \in A_1(\mathbb{R}^2) \cap (L)$, $\bar{\omega}(z) \geq 1$, и

$$M_T(A_\alpha^q(\bar{\omega}), A_\beta^p) = \left\{ g \in H(\mathbb{D}) : \sup_{|z| < 1} M_p(D^\gamma g, |z|) (1 - |z|)^\alpha (\bar{\omega}(z))^{-1/q} < +\infty \right\},$$

где на функцию $\bar{\omega}(z)$ и параметры наложены те же ограничения

$$\beta > 0, \quad \alpha > -1, \quad s = 1/q + (\beta + 1)/p, \quad \alpha \in (2q/p - 2, 2q/p - 1).$$

Мы только вкратце очертим доказательство этой теоремы. Доказательство вложений S стандартно и опирается на Лемму А, теорему о замкнутом графике и подбором пробной функции $f_j(z) = (1 - \bar{z}z)^{-(m+1)}$, ($m \in N$) (см. [12]). Для доказательства обратного утверждения, необходимо использовать Теорему 1 и факт, что мера

$$d\mu(z) = \frac{(1 - |z|)^\alpha}{(1 - |\omega(z)|)^{\alpha+1}}, \quad \alpha > 0, \quad |\omega(z)| \in (0, 1), \quad z \in \mathbb{D},$$

является мерой Карлесона.

Abstract. Inequalities obtained in Hardy and Djrbashian spaces with Muckenaupt weights are used to generalize some well known results on projections and coefficient multipliers in the classical Djrbashian spaces.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. D. McPhail, "A weighted interpolation problem for analytic functions," *Studia Math.*, vol. 96, no. 2, pp. 105 – 116, 1990.
2. D. Girela, M. Lorente, M. Sarrion, "Embedding derivatives of weighted Hardy spaces into Lebesgue spaces", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 116, no. 1, pp. 151 – 166, 1994.
3. N. Nikolski, *Hardy, Hankel and Toeplitz*, vol. 1, *Math. Surv. and Monog.*, vol. 92, AMS, 2001.
4. Дж. Гарнетт. *Ограниченные Аналитические Функции*, Мир, Москва, 1984.
5. R. Coifman, Y. Meyer, E. Stein, "Some new functional spaces and their application to Fourier analysis", *Journal of Func. Anal.*, vol. 62, pp. 304 – 335, 1985.
6. W. Cohn, "Generalized area operators on Hardy spaces", *Math Anal. and Appl.*, vol. 216, pp. 112 – 121, 1997.
7. Е. Дынькин, "Методы теории сингулярных интегралов. Преобразование Гильберта и теория Кальдерона-Зигмунда", том 15, стр. 197 – 292, ВИНТИ, Москва, 1987.
8. E. Stein, *Harmonic Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
9. A. Djrbashian, F. Shamoyan, *Topics in the Theory of A_p^ω Spaces*, Teubner-Texte zur Math., Leipzig, 1988.
10. L. Grafakos, *Classical and Modern Fourier Analysis*, Prentice-Hall, Missouri, 2003.
11. A. Bonami, D. Bekolle, "Inegalitis a poids pour le noyau de Bergman", *C. AC. Sci. Paris*, vol. 286, ser. 775, 1978.
12. M. Jevtić, M. Pavlović, "Coefficient multipliers on spaces of analytic functions", *Acta Math Sci.*, vol. 64, pp. 531 – 545, 1998.
13. У. Рудин, *Теория Функций в Поликруге*, Мир, Москва, 1974.
14. С. В. Шведенко, "Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре", *Итоги науки и техники*, сер. Мат., стр. 3 – 124, ВИНТИ, 1985.