

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЁННЫХ ПРОСТРАНСТВ ТИПА ЛИЗОРКИНА-ТРИБЕЛЯ И НИКОЛЬСКОГО-БЕСОВА

А. Г. Багдасарян

Ереванский государственный университет

E-mail : angen@arminco.com

Резюме. В работе вводятся и рассматриваются обобщённые пространства типа Лизоркина–Трибеля, порождённые положительными, бесконечно дифференцируемыми функциями полиномиального роста. Доказывается двусторонняя оценка K -функционала Петре для пар пространств типа Никольского–Бесова с разными анизотропиями. Доказаны некоторые интерполяционные формулы “вещественного метода” пространств типа Лизоркина–Трибеля и Никольского–Бесова.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Ещё в шестидесятых годах были введены пространства Соболева, порождённые некоторым полным многогранником. Для принадлежности функции к таким пространствам требуется, чтобы не только чистые производные соответствующего порядка принадлежали L_p , но и некоторые смешанные производные.

Если вершины многоугольника не являются мультииндексами, то гладкость функций из соответствующих пространств типа Соболева, задаётся как образы Фурье с помощью некоторой функции $\mu(\xi)$ полиномиального роста, которая определяется первоначальным многогранником. В работах [1], [2] были введены и рассмотрены пространства типа Соболева–Лиувилля $H_p^*(\mu, \mathbb{R}^n)$ для некоторых весовых функций $\mu(\xi)$.

В классическом случае, если $p \neq 2$, то для описания пространств следов и интерполяционных пространств “вещественного” для пространств Соболева, приходится рассматривать пространства Бесова. Если функция $\mu(\xi)$ отвечает некоторому полному многограннику, то, как и в классическом случае, пространства

Бесова допускают представление методом декомпозиции (см. [3], [4]).

В более общем случае, например когда нарушается условие $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \mu(\xi) = \infty$ и следовательно метод декомпозиции не применим, обобщённые пространства типа Никольского-Бесова были введены в работах [5], [6] посредством интерполяции соответствующих пар пространств типа Соболева-Лиувилля. Основным обстоятельством является свойство "квазилинеаризуемости" (см. [7]) пары пространств типа Соболева-Лиувилля, которое даёт возможность двусторонней оценки K -функционала Петре [7], [8], [9].

Таким образом, используя интерполяционные свойства "вещественного" метода, имея соответствующие результаты для пространств типа Соболева-Лиувилля, удаётся перенести их и на пространства типа Никольского-Бесова.

Как и в случае классических пространств, случай пространств Лизоркина-Трибеля обстоит несколько иначе. Для рассматриваемых пространств типа Лизоркина-Трибеля имеет место аналог теоремы Пэли-Литтлвуда, которая устанавливает связь между исследуемыми пространствами типа Лизоркина-Трибеля и Соболева-Лиувилля. Доказательство основано на теореме П. И. Лизоркина о мультипликаторах Фурье [10] для векторнозначных функций (автор намеревается привести доказательство в ближайших заметках).

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ

Будем говорить, что положительная функция $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ полиномиального роста принадлежит множеству G^+ , если существует постоянная $c > 0$ такая, что неравенство

$$|\xi^\alpha D^\alpha \mu(\xi)| \leq c \mu(\xi) \quad (1)$$

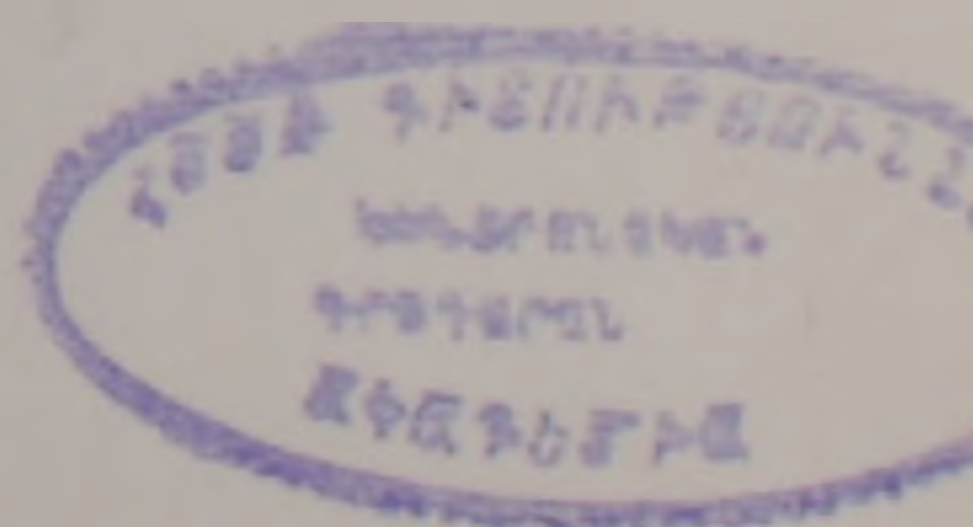
выполняется для любого мультииндекса α с компонентами из множества $\{0; 1\}$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ такого, что $\prod_{i=1}^n \xi_i \neq 0$. Из теоремы П. Лизоркина о мультипликаторах Фурье (см. [10]) и оценки (1) следует, что любая ограниченная в $\mathbb{R}^n$ функция из G^+ является мультипликатором.

Определение 1. Пусть $1 < p < \infty$, $-\infty < s < \infty$ и $\mu \in G^+$. Положим

$$H_p^s(\mu, \mathbb{R}^n) \equiv H_p^s(\mu) = \left\{ f \in S' : \|f\|_H = \|F^{-1} \{\mu^s F f\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}.$$

Пространства $H_p^s(\mu, \mathbb{R}^n)$ были рассмотрены в [1], [2]. При $\mu(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ они совпадают с классическими пространствами типа Соболева-Лиувилля, поэтому в дальнейшем будем их называть пространствами типа Соболева-Лиувилля. Если положить

$$I_{\mu^s} = F^{-1} \{\mu^{-s} F\}, \quad \mu \in G^+, \quad -\infty < s < \infty,$$



то определение указанных пространств типа Соболева–Лиувилля принимает вид

$$H_p^s(\mu) = I_{\mu^*} L_p.$$

Как и в случае классических пространств, определим пространства типа Никольского–Бесова посредством интерполяции пар соответствующих пространств типа Соболева–Лиувилля.

Определение 2. Для любых $1 < s < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$ и любого $\mu \in G^+$, положим

$$B_{p,q}^0(\mu, \mathbb{R}^n) \equiv B_{p,q}^0(\mu) = (H_p^1(\mu), H_p^{-1}(\mu))_{1/2,q},$$

$$B_{p,q}^s(\mu) = I_{\mu^*} B_{p,q}^0(\mu).$$

Для этих пространств имеет место аналог известной формулы “вещественной” интерполяции [6]:

$$B_{p,q}^s(\mu) = (H_p^{s_0}(\mu), H_p^{s_1}(\mu))_{\vartheta,q},$$

где $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \vartheta < 1$, $-\infty < s_0 \neq s_1 < \infty$, $s = (1 - \vartheta)s_0 + \vartheta s_1$, $\mu \in G^+$.

Следующая теорема о представлении рассматриваемых пространств типа Никольского–Бесова доказана в [6].

Теорема 1. Для любых $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$ и $\mu \in G^+$, имеют место следующие представления (с обычными видоизменениями при $q = \infty$):

a)

$$B_{p,q}^s(\mu) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_B^{(1)} = \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \mu^{1+s}}{\mu^2 + t} F f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

b)

$$B_{p,q}^s(\mu) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_B^{(2)} = \left(\sum_{k=-\infty}^\infty \left\| F^{-1} \frac{2^{k/2} \mu^{1+s}}{\mu^2 + 2^k} F f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^q \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Определение 3. Пусть $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $-\infty < s < \infty$ и $\mu \in G^+$. Положим

$$F_{p,q}^s(\mu) = \left\{ f \in S' : \|f\|_F = \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^\infty \left| F^{-1} \left\{ \frac{2^{k/2} \mu^{1+s}}{\mu^2 + 2^k} F f \right\} \right|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}.$$

§3. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПАР ПРОСТРАНСТВ ТИПА НИКОЛЬСКОГО-БЕСОВА С РАЗНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

В [9] доказано, что пара $\{H_p^1(\mu), H_p^1(\nu)\}$ “квазилинеаризуема” с помощью операторов

$$V_0(t) = F^{-1} \left\{ \frac{t\nu}{\mu + t\nu} F \right\}, \quad V_1(t) = F^{-1} \left\{ \frac{\mu}{\mu + t\nu} F \right\}. \quad (3)$$

Следовательно имеет место следующая двусторонняя оценка для K -функционала Петре :

$$K(t, f; H_p^1(\mu), H_p^1(\nu)) \sim \left\| F^{-1} \left\{ \frac{t\mu\nu}{\mu + t\nu} F f \right\} \right\|_{L_p} \quad (4)$$

(см. Лемму 1.8.4 в [7]). Используя (3), можно оценить K -функционал Петре также для пары $\{B_{p,q}^1(\mu), B_{p,q}^1(\nu)\}$ пространств типа Никольского-Бесова.

Теорема 2. Если $\mu, \nu \in G^+$, $1 < p < \infty$ и $1 \leq q \leq \infty$, то интерполяционная пара $\{B_{p,q}^1(\mu), B_{p,q}^1(\nu)\}$ пространств типа Никольского-Бесова квазилинеаризуема с помощью операторов

$$W_0(t)f = F^{-1} \left\{ \frac{t^2\nu^2}{\mu^2 + t^2\nu^2} F f \right\}, \quad W_1(t)f = F^{-1} \left\{ \frac{\mu^2}{\mu^2 + t^2\nu^2} F f \right\},$$

где $f \in B_{p,q}^1(\mu) + B_{p,q}^1(\nu)$, $t > 0$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $W_0(t) + W_1(t) = E$ ($t > 0$) и

$$\frac{t^2\nu^2}{\mu^2 + t^2\nu^2} \in M_p, \quad \frac{\mu^2}{\mu^2 + t^2\nu^2} \in M_p \quad (t > 0),$$

где нормы этих функций не зависят от t (см. [10]). Следовательно,

$$\|W_0(t)f\|_{H_p^2(\mu)} = \left\| F^{-1} \frac{t^2(\mu\nu)^2}{\mu^2 + t^2\nu^2} F f \right\|_{L_p} \leq ct^2 \|f\|_{H_p^2(\nu)},$$

$$\|W_1(t)f\|_{H_p^2(\nu)} = \left\| F^{-1} \frac{(\mu\nu)^2}{\mu^2 + t^2\nu^2} F f \right\|_{L_p} \leq \frac{c}{t^2} \|f\|_{H_p^2(\mu)},$$

$$\|W_i(t)f\|_{L_p} \leq c \|f\|_{L_p} \quad (i = 0, 1),$$

т.е.

$$W_0(t) : \begin{cases} H_p^2(\nu) \xrightarrow{ct^2} H_p^2(\mu), \\ L_p \xrightarrow{c} L_p \end{cases}, \quad W_1(t) : \begin{cases} H_p^2(\mu) \xrightarrow{c/t^2} H_p^2(\nu), \\ L_p \xrightarrow{c} L_p. \end{cases}$$

Тогда, используя интерполяционное свойство “вещественного” метода, получаем

$$W_0(t) : (H_p^2(\nu), L_p)_{1/2,q} \xrightarrow{ct} (H_p^2(\mu), L_p)_{1/2,q},$$

$$W_1(t) : (H_p^2(\mu), L_p)_{1/2, q} \xrightarrow{c/t} (H_p^2(\nu), L_p)_{1/2, q}, \quad (5)$$

где интерполяционные пространства определяются с помощью (2). Тогда

$$W_0(t) : B_{p,q}^1(\nu) \xrightarrow{ct} B_{p,q}^1(\mu), \quad W_1(t) : B_{p,q}^1(\mu) \xrightarrow{c/t} B_{p,q}^1(\nu).$$

Аналогично получаем

$$W_j(t) : B_{p,q}^1(\nu) \xrightarrow{c} B_{p,q}^1(\nu), \quad W_j(t) : B_{p,q}^1(\mu) \xrightarrow{c} B_{p,q}^1(\mu) \quad (j = 0, 1).$$

Теорема 2 доказана.

Непосредственным следствием свойства “квазилинеаризуемости” является двусторонняя оценка K -функционала Петре (см. [7], [8]).

Следствие. Если $\mu, \nu \in G^+$, $1 < p < \infty$ и $1 \leq q \leq \infty$, то для $f \in B_{p,q}^1(\mu) + B_{p,q}^1(\nu)$ и $t > 0$ имеем

$$K(t, f; B_{p,q}^1(\mu), B_{p,q}^1(\nu)) \sim \left\| F^{-1} \frac{t^2 \nu^2}{\mu^2 + t^2 \nu^2} F f \right\|_{B_{p,q}^1(\mu)} + t \left\| F^{-1} \frac{\mu^2}{\mu^2 + t^2 \nu^2} F f \right\|_{B_{p,q}^1(\nu)}. \quad (6)$$

Теорема 3. Пусть $\mu, \nu \in G^+$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $0 < \vartheta < 1$. Тогда

$$(B_{p,q}^1(\mu), B_{p,q}^1(\nu))_{\vartheta, q} = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{(B_{p,q}^1(\mu), B_{p,q}^1(\nu))_{\vartheta, q}}^* < \infty \right\},$$

где

$$\|f\|_{(B_{p,q}^1(\mu), B_{p,q}^1(\nu))_{\vartheta, q}}^* = \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \mu \nu}{\mu^2 + t \nu^2} \mu^{1-\vartheta} \nu^\vartheta F f \right\|_{B_{p,q}^0(\mu) \cap B_{p,q}^0(\nu)}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

Доказательство. Из (6) и определения метода “вещественной” интерполяции [7], [8], имеем

$$\|f\|_{(B_{p,q}^1(\mu), B_{p,q}^1(\nu))_{\vartheta, q}}^q \sim A_0 + A_1, \quad (7)$$

где

$$A_0 = \int_0^\infty t^{-\vartheta q} \left\| F^{-1} \frac{t^2 \nu^2}{\mu^2 + t^2 \nu^2} F f \right\|_{B_{p,q}^1(\mu)}^q \frac{dt}{t},$$

$$A_1 = \int_0^\infty t^{(1-\vartheta)q} \left\| F^{-1} \frac{\mu^2}{\mu^2 + t^2 \nu^2} F f \right\|_{B_{p,q}^1(\nu)}^q \frac{dt}{t}.$$

Заменой переменной $u = t^2$ и применением Теоремы 1, получаем

$$A_0 \sim \int_0^\infty u^{-\vartheta q/2} \left\| F^{-1} \frac{u \nu^2}{\mu^2 + u \nu^2} F f \right\|_{B_{p,q}^1(\mu)}^q \frac{du}{u} \sim$$

$$\sim \int_0^\infty \int_0^\infty u^{-\theta q/2} \left\| F^{-1} \frac{u\nu^2\mu^2}{\mu^2 + u\nu^2} \frac{t^{1/2}}{\mu^2 + t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{du}{u} \frac{dt}{t}. \quad (8)$$

Далее, с помощью (4) убеждаемся, что

$$\left\| F^{-1} \frac{u\nu^2\mu^2}{\mu^2 + u\nu^2} \frac{t^{1/2}}{\mu^2 + t} Ff \right\|_{L_p}^q \quad \text{и} \quad K \left(u, F^{-1} \frac{t^{1/2}}{\mu^2 + t} Ff; H_p^2(\mu), H_p^2(\nu) \right)$$

эквивалентные величины. Поэтому, из Теорем 1 и 2 работы [5] вытекает, что формула (8) принимает вид

$$\begin{aligned} A_0 &\sim \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}}{\mu^2 + t} Ff \right\|_{(H_p^2(\mu), H_p^2(\nu))_{\theta/2, q}}^q \frac{dt}{t} \sim \\ &\sim \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\mu}{\mu^2 + t} \mu^{1-\theta} \nu^\theta Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\mu/\nu)}^q \frac{dt}{t}. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично, для A_1 получим

$$\begin{aligned} A_1 &\sim \int_0^\infty u^{-\theta q/2} \left\| F^{-1} \frac{u^{1/2}\mu^2\nu}{\mu^2 + u\nu^2} Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\nu)}^q \frac{du}{u} \sim \\ &\sim \int_0^\infty \int_0^\infty u^{-(1+\theta)q/2} \left\| F^{-1} \frac{u\nu^2\mu^2}{\mu^2 + u\nu^2} \frac{t^{1/2}}{\nu^2 + t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{du}{u} \frac{dt}{t} \sim \\ &\sim \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}}{\nu^2 + t} Ff \right\|_{(H_p^2(\mu), H_p^2(\nu))_{(1+\theta)/2, q}}^q \frac{dt}{t} \sim \\ &\sim \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\nu}{\mu^2 + t} \mu^{1-\theta} \nu^\theta Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\mu/\nu)}^q \frac{dt}{t}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (8), (9) и (10) получаем

$$\begin{aligned} \|f\|_{(B_{p,q}^1(\mu), B_{p,q}^1(\nu))_{\theta, q}}^q &\sim \\ &\sim \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \left(\frac{t^{1/2}\mu}{\mu^2 + t} + \frac{t^{1/2}\nu}{\nu^2 + t} \right) \mu^{1-\theta} \nu^\theta Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\mu/\nu)}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \sim \\ &\sim \|f\|_{(B_{p,q}^1(\mu), B_{p,q}^1(\nu))_{\theta, q}}^*. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

§4. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПАР ПРОСТРАНСТВ ТИПА ЛИЗОРКИНА-Трибеля

Начнем рассмотрение со следующей теоремы вложения, аналог которой в случае классических пространств хорошо известен (см. [11]).

Теорема 4. Если $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $-\infty < s < \infty$ и $\mu \in G^+$, то

$$B_{p, \min(p, q)}^s(\mu) \subset F_{p, q}^s(\mu) \subset B_{p, \max(p, q)}^s(\mu). \quad (11)$$

Доказательство. Пусть $f \in B_{p, q}^s(\mu)$. Обозначим $G_k = F^{-1} \left\{ \frac{2^{k/2} \mu^{1+s}}{\mu^2 + 2^k} Ff \right\}$. Тогда из утверждения (b) Теоремы 1 при $1 < q \leq p < \infty$ имеем

$$\|f\|_{F_{p, q}^s(\mu)} \sim \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |G_k|^q \right\|_{L_{p/q}}^{1/q} \leq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|G_k\|_{L_{p/q}}^q \right)^{1/q} \sim \|f\|_{B_{p, q}^s(\mu)}.$$

Таким образом, левое вложение в (11) доказано. Аналогично, меняя очередность операций интегрирования и суммирования, доказываем правое вложение в (11). Теорема 4 доказана.

Теорема 4 позволяет доказать интерполяционные формулы для пространств типа Лизоркина-Трибеля (интерполяционные утверждения для пространств типа Никольского-Бесова приведены в [6]).

Теорема 5. (a) Если $1 < p < \infty$, $1 \leq q, q_0, q_1 \leq \infty$, $0 < \vartheta < 1$, $-\infty < s_0 \neq s_1 < +\infty$, $s = (1 - \vartheta)s_0 + \vartheta s_1$ and $\mu \in G^+$, тогда

$$B_{p, q}^s(\mu) = (B_{p, q_0}^{s_0}(\mu), B_{p, q_1}^{s_1}(\mu))_{\vartheta, q}.$$

(b) Если $1 < p < \infty$, $1 < q_0, q_1 < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \vartheta < 1$, $-\infty < s_0 \neq s_1 < +\infty$, $s = (1 - \vartheta)s_0 + \vartheta s_1$ и $\mu \in G^+$, тогда

$$B_{p, q}^s(\mu) = (F_{p, q_0}^{s_0}(\mu), F_{p, q_1}^{s_1}(\mu))_{\vartheta, q}.$$

(c) Если $1 < p < \infty$, $1 \leq q, q_1 \leq \infty$, $1 < q_0 < \infty$, $0 < \vartheta < 1$, $-\infty < s_0 \neq s_1 < +\infty$, $s = (1 - \vartheta)s_0 + \vartheta s_1$ и $\mu \in G^+$, тогда

$$B_{p, q}^s(\mu) = (F_{p, q_0}^{s_0}(\mu), B_{p, q_1}^{s_1}(\mu))_{\vartheta, q}.$$

Доказательство. Утверждение (a) доказано в [6]. Остальные утверждения теоремы докажем с помощью вложений Теоремы 4.

Пусть $r_i = \max\{p, q_i\}$ и $m_i = \min\{p, q_i\}$ ($i = 0, 1$). Тогда из утверждения (a) теоремы 5 и правого вложения в (11) имеем

$$(F_{p,q_0}^{s_0}(\mu), F_{p,q_1}^{s_1}(\mu))_{\theta,q} \subset (B_{p,r_0}^{s_0}(\mu), B_{p,r_1}^{s_1}(\mu))_{\theta,q} = B_{p,q}^s(\mu).$$

С другой стороны, используя левое вложение из (11) получаем

$$(F_{p,q_0}^{s_0}(\mu), F_{p,q_1}^{s_1}(\mu))_{\theta,q} \supset (B_{p,m_0}^{s_0}(\mu), B_{p,m_1}^{s_1}(\mu))_{\theta,q} = B_{p,q}^s(\mu).$$

Таким образом, утверждение (b) доказано. Утверждение (c) доказывается аналогично.

Abstract. Some general Lizorkin–Triebel type spaces generated by positive, infinitely differentiable functions of polynomial growth are defined. A two-sided estimate of the Peetre K -functional for pairs of Nikolskii–Besov type spaces with different anisotropies is derived. Some “real method” interpolation formulas are proved both in Lizorkin–Triebel and Nikolskii–Besov type spaces in question.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях, “Некоторые пространства обобщённых функций и теоремы вложения”, УМН, том 20, № 1, стр 3 – 74, 1965.
2. H. Triebel, “General function spaces”, Analysis Math., vol. 3, pp. 221 – 249, 1965.
3. А. Г. Багдасарян, “Об интерполяции и следах функций из некоторых анизотропных функциональных пространств”, Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 23, № 4, стр. 353 – 365, 1988.
4. А. Г. Багдасарян, “Интерполяция и следы функций из некоторых функциональных пространств”, ДАН Арм.ССР, том 87, № 5, стр. 207 – 211, 1988.
5. А. Г. Багдасарян, “Интерполяция и следы функций из некоторых пространств типа Соболева–Лиувилля”, Изв. НАН Армении, серия Математика, том 36, № 5, стр. 14 – 22, 2001.
6. А. Г. Багдасарян, “Интерполяция и вложения обобщённых пространствах типа Никольского–Бесова”, Изв. НАН Армении, серия Математика, том 38, № 6, стр. 49 – 62, 2003.
7. Х. Трибель, Теория Интерполяции. Функциональные Пространства. Дифференциальные Операторы, Мир, Москва, 1980.
8. И. Берг, И. Лёфстрём, Интерполяционные Пространства, Введение, Мир, Москва, 1980.
9. А. Г. Багдасарян, “Об интерполяционных свойствах некоторых квазилинеаризуемых пар”, Мат. сборник, том 182, № 2, стр. 73 – 80, 1998.
10. П. И. Лизоркин, “ (L_p, L_q) -мультипликаторы интегралов Фурье”, Докл. АН СССР, том 152, стр. 808 – 811, 1963.
11. Х. Трибель, Теория Функциональных Пространств, Мир, Москва, 1986.

Поступила 29 марта 2005