Известия НАН Армении. Математика, **39**, № 6, 2004, 56–76

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ПАРЫ БОРСУКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Э. А. Мирзаханян и Н. Э. Мирзаханян

Ереванский государственный университет

Резюме. В настоящей работе представляются модификации некоторых главных результатов, относящихся к парам Борсука в категории $K_0(H))^\infty$, где H есть произвольное вещественное сепарабельное гильбертово пространство. Описываются допустимые K_0-отображения и устанавливаются K_0-аналоги главных свойств пары Борсука.

ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена построению бесконечномерной алгебраической топологии в вещественных сепарабельных гильбертовых пространствах. Одним из важных понятий класической алгебраической топологии является понятие пары Борсука [1], обладающей свойством продолжения гомотопий.

В работе определяется модификация этого понятия, называемая K_0-парой Борсука, а также приводятся модификации некоторых, относящихся к этому понятию результатов в категории $(K_0(H))^\infty$ (см. определение 6, параграфа 2), где H – произвольное зафиксированное вещественное сепарабельное гильбертово пространство.

В параграфе 1 приводятся определения допустимых отображений, называемых K_0-отображениями, и некоторых необходимых понятий, а также сведения, относящиеся к этим отображениям [2 – 7].

В параграфе 2 определяются некоторые понятия и доказываются некоторые факты о K_0-отображениях, необходимые для их применения в параграфе 3.
В параграфе 3 доказываются несколько теорем и предложений, представляющих собой K_0-аналоги некоторых основных свойств пар Борсука.

§ 1. ДОПУСТИМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть H – произвольное зафиксированное вещественное гильбертово пространство.

Определение 1. Назовем непрерывное отображение $f : G \longmapsto H$ открытого множества $G \subset H$ в пространство H K_0-отображением (относительно H), если выполнено следующее условие :

(K_0) : для любой точки $x_0 \in G$ и любого вещественного числа $\varepsilon > 0$ существуют окрестность $U \subset G$ точки x_0, конечномерное (линейное) подпространство $L \subset H$ и вещественные числа λ и $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ такие, что, если для точек $x, y \in U$ угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2} - \delta$, то выполнено соотношение

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x - y)\| \leq \varepsilon\|x - y\|. \tag{1}$$

Замечание 1. Условие (K_0) равносильно [2] одновременному выполнению следующих двух условий : условию (K) и локальному условию Липшица (L) :

(K) : для любой точки $x_0 \in G$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют окрестность $U \subset G$ точки x_0, конечномерное подпространство $L \subset H$ и вещественное число λ такие, что если $x, y \in U$ и вектор $x - y$ ортогонален подпространству L, то выполнено соотношение (1) ;

(L) : для каждой точки $x_0 \in G$ существуют числа $r = r(x_0) > 0$ и $c = c(x_0) > 0$ такие, что, если точки $x, y \in G$ $\|x - x_0\| < r$ и $\|y - x_0\| < r$, то

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|.$$

Важным характеризующим свойством K_0-отображений является то, что число λ в условии (K_0) можно выбрать так, чтобы оно зависело бы лишь от x_0, но не от числа ε. Получающуюся при этом единственную, непрерывную,

вещественнозначную функцию $\lambda(x) = \lambda_f(x)$ $(x \in G)$ назовем *терминальной производной отображения* $f : G \longmapsto H$. Композиция двух K_0-отображений есть K_0-отображение; из ортопроекторов $p : H \longmapsto L$ K_0-отображением являются только те, для которых L – конечномерно или имеет конечную коразмерность относительно H.

Определение 2. Пусть M – произвольное (необязательно открытое) подмножество H. Непрерывное отображение $f : M \longmapsto H$ будем называть K_0-отображением, если существуют открытое подмножество $G \subset H$, содержащее M, и K_0-отображение $g : G \longmapsto H$ такие, что $f(x) = g(x)$ для любого $x \in M$.

Пусть X и Y – произвольные подмножества пространства H. Непрерывное отображение $f : X \longmapsto Y$ называется K_0-отображением, если композиция $i \circ f : X \longmapsto H$ является K_0-отображением, где $i : Y \longmapsto H$ есть вложение. Гомеоморфизм $f : X \cong Y$ называется K_0-гомеоморфизмом, если отбражения f и $f^{-1} : Y \longmapsto X$ суть K_0-отображения.

Определение 3. Семейство (f_t) $(0 \leq t \leq 1)$ K_0-отображений $f_t : X \longmapsto Y$ называется K_0-гомотопией, если отображение $F : I \times X \longmapsto Y$, определяемое формулой $F(t, x) = f_t(x)$ $(x \in X,\ t \in I = [0, 1])$ является K_0-отображением.

Два K_0-отображения $f, g : X \longmapsto Y$ называются K_0-гомотопными и пишутся в виде $f \overset{K_0}{\simeq} g$, если существует связывающая их K_0-гомотопия (f_t), т.е. такая, что $f_0 = f$ и $f_1 = g$. Аналогично, два отображения $f, g : X \longmapsto Y$ называются K_0-гомотопными, если существует K_0-отображение $F : I \times X \longmapsto Y$ такое, что $F(0, x) = f(x)$ и $F(1, x) = g(x)$ для всех $x \in X$.

Определение 4. Подпространство A такое, что $A \subset X \subset H$, называется K_0-ретрактом в X, если существует K_0-ретракция X на A, т.е. K_0-отображение $r : X \longmapsto A$ такое, что $r|A = id_A$ ($r|A = id_A$ означает, что $r \circ i = id_A$, где $i : A \longmapsto X$ есть вложение). Ретракт A называется K_0-деформационным ретрактом в X, если существует такая K_0-ретракция $r : X \longmapsto A$, называемая K_0-деформационной ретракцией, что выполнено условие $i \circ r \overset{K_0}{\simeq} id_X$. Если эта K_0-гомотопия неподвижна, т. е. связана на A, то r называется K_0-строгой (или сильной) деформационной ретракцией, а A называется K_0-строгим деформационным ретрактом в X.

Существуют окрестностные варианты этих ретрактов, а именно : A называется окрестностным K_0-ретрактом, окрестностным K_0-деформационным ретрактом или окрестностным K_0-строгим деформационным ретрактом в X, соответственно, если существует такое открытое в X подмножество $U \supset A$, что A является K_0-ретрактом, K_0-деформационным ретрактом или K_0-строгим деформационным ретрактом в U, соответстенно.

Определение 5. Подмножество A подпространства X называется K_0-окрестностным строгим деформационным ретрактом в слабом смысле подпространтва X, если существует такое открытое в X множество $U \supset A$ и такая K_0-гомотопия $(g_t) : U \longmapsto X$, что (g_t) неподвижна на A (т.е. $g_t(x) = g_0(x)$ при $x \in A$ и $t \in I$) и $g_0(x) = x$, $g_1(x) \in A$ при всех $x \in U$.

§ 2. КАТЕГОРИИ $K_0(H)$ И $(K_0(H))^\infty$. ЛОКАЛЬНО K_0–ОТОБРАЖЕНИЯ

Для некоторых конкретных задач рамки одного гилбертова пространства H становятся узкими. Для исследования различных сторон задачи приходится вводить расширенные гильбертовы пространства. Для наших целей необходимо рассматривать такие действительные гильбертовы пространства H^* (например, $R^n \times H$), в которых простанство H содержится как линейное (векторное) подпространство конечной коразмерности, т.е. $H \subset H^*$ и $Codim\, H$ относительно H^* конечно. В связи с этим существенным является следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть X и Y – подмножества гильбертова пространства H, $f : X \longmapsto Y$ – непрерывное отображение. Тогда для того, чтобы f было K_0-отображением относительно H необходимо и достаточно, чтобы f было K_0-отбражением относительно гильбертова пространства $H^* = R^n \times H$, где n некоторое произвольное натуральное число.*

Доказательство : Необходимость. Пусть $f : X \longmapsto Y$ есть K_0-отображение относительно H, G – открытое в H множество такое, что $X \subset G$ и $g : G \longmapsto H$ есть K_0-отображение такое, что $g(x) = f(x)$ для всех $x \in X$. Далее, пусть

$p : H^* \longmapsto H$ – ортогональное проектирование, $G^* = p^{-1}(G)$ и $g^* = g \circ p : G^* \longmapsto H \subset H^*$. Выберем произвольно точку $x_0^* \in G^*$ и число $\varepsilon > 0$ и положим $x_0 = p(x_0^*)$. Так как g есть K_0-отображение относительно H, то существуют окрестность U точки x_0 в G, линейное конечномерное подпространство $L \subset H$ и число λ такие, что, если для точек $x, y \in U$ вектор $x - y$ ортогонален подпространству L, то (см. условие (K)) выполнено соотношение

$$\|g(x) - g(y) - \lambda(x - y)\| \leq \varepsilon\|x - y\| \tag{2}$$

Пусть U^* такая окрестность точки x_0^* в G^*, что $p(U^*) \subset U$ и $L^* \subset H^*$ – линейное конечномерное подпространство в H^*, содержащее R^n и L (R^n, $L \subset L^*$). Пусть теперь для точек $x^*, y^* \in U^*$ вектор $x^* - y^*$ ортогонален к L^*. Тогда точки $x = p(x^*)$ и $y = p(y^*)$ принадлежат U и вектор $x - y = x^* - y^*$ ортогонален подпространству L. Поэтому, в силу формулы (2) будем иметь

$$\|g^*(x^*) - g^*(y^*) - \lambda(x^* - y^*)\| = \|(g \circ p)(x^*) - (g \circ p)(y^*) - \lambda(x^* - y^*)\| =$$
$$= \|g(x) - g(y) - \lambda(x - y)\| = \varepsilon\|x - y\| = \varepsilon\|x^* - y^*\|.$$

Таким образом, отображение g^* в каждой точке $x_0^* \in G^*$ удовлетворяет условию (K) и, поскольку отображения p и g локально удовлетворяют условию Липшица, то отображение g^* тоже локально удовлетворяет условию Липшица. Следовательно, g^* есть K_0-отображение относительно H^*, и то же самое утверждение верно для f, так как $X \subset G^*$ и $g^*(x) = f(x)$ для всех $x \in X$.

Достаточность. Пусть теперь $f : X \longmapsto Y$ есть K_0-отображение относительно H^*. По определению 1 существуют открытое в H^* множество G^* и K_0-отображение $g^* : G^* \longmapsto H^*$ относительно H^* такие, что $X \subset G^*$ и $g^*(x) = f(x)$, $x \in X$. Пусть $G = G^* \cap H$ и $g = g^*|G$. Тогда G открыто в H и $g(x) = f(x)$, $x \in X$. Покажем, что g является K_0-отображением относительно H, для этого выберем произвольно точку $x_0 \in G$ и число $\varepsilon > 0$. По определению существуют окрестность $U^* \subset G^*$ точки x_0, линейное конечномерное подпространство L^* из H^* и число λ такие, что если для точек $x^*, y^* \in U^*$ вектор $x^* - y^*$ ортогонален к L^*, то выполнено соотношение

$$\|g^*(x^*) - g^*(y^*) - \lambda(x^* - y^*)\| \leq \varepsilon\|x^* - y^*\| \tag{3}$$

Положим $U = U^* \cap H$. Ясно, что U есть окрестность точки x_0 в G. Обозначим через L_1 и L_2 проекции подпространств L^* на R^n и H соответственно. Пусть теперь $x, y \in U$ такие точки, что вектор $x - y$ ортогонален к L_2. Так как вектор $x-y$ ортогонален и к L_1, то $x-y$ будет ортогонален и к L^*. Из того, что $x, y \in U^*$ и в силу (3) будем иметь

$$\|g(x) - g(y) - \lambda(x-y)\| = \|g(x^*) - g(y^*) - \lambda(x-y)\| \leq \varepsilon\|x-y\|.$$

Таким образом, отображение $g : G \longmapsto H$ удовлетворяет условию (K) и, так как g^* локально удовлетворяет условию Липшица, то и его ограничение g удовлетворяет условию Липшица. Из изложенного следует, что отображение g является K_0-отображением относительно H ; откуда и следует, что отображение $f : X \longmapsto Y$ является K_0-отображением относительно H. Лемма 1 доказана.

Так как композиция K_0-отображений есть K_0-отображение, то можем построить категорию $K_0(H)$, объектами которой являются всевозможные подмножества из H, а морфизмами – всевозможные K_0-отображения этих множеств относительно H. Если H^* – произвольное гильбертово пространство, содержащее H как линейное подпространство конечной коразмерности $n \geq 0$, то, согласно лемме 1, $K_0(H)$ является полной подкатегорией категории $K_0(H^*)$.

Определение 6. Категорию, объектами и морфизмами в которой соответственно являются всевозможные объекты и морфизмы категорий $K_0(H)$ и всех категорий $K_0(H^*)$ будем обозначать через $(K_0(H))^\infty)$ и называть K_0-категорией, ассоциированной с гильбертовым пространством H. Таким образом, $(K_0(H))^\infty = \bigcup_{H^* \supset H} K_0(H^*)$, где $Codim\, H$ конечна относительно H^*.

$(K_0(H))^\infty$ есть категории с гомотопиями (см. [1]), где гомотопиями являются K_0-гомотопии. Морфизмы этой категории $(K_0(H))^\infty$ в дальнейшем будем называть K_0-отображениями.

Определение 7. Декартово произведение $Z \times X$ будем наывать K_0-допустимым, если оно является подмножеством $R^n \times H^*$, т.е. $Z \subset R^n$ и $X \subset H^*$, где $H \subset H^*$ и $\dim(H^*/H)$ конечна. В этом случае обе проекции $Z \times X \longmapsto Z$ и $Z \times X \longmapsto X$ суть K_0-отображения.

Определение 8. Непрерывную функцию $\varphi : G \longmapsto R$ открытого подмножества из H в вещественную прямую R будем называть K_0-функцией (относительно H), если отображение $f : G \longmapsto H$, определяемое формулой $f(x) = \varphi(x)e$ для произвольного единичного вектора $e \in H$, является K_0-отображением относительно H.

Замечание 2. Когда область значений K_0-отображений $f : G \longmapsto H$ является конечномерным подпространством, терминальная прозводная $\lambda_f(x)$ всюду на G равна нулю. Таким образом, непрерывная функция $\varphi : G \longmapsto R$ будет K_0-функцией тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим условиям :

1) для любой точки $x_0 \in G$ и любого числа $\epsilon > 0$ существуют окрестность $U \subset G$ точки x_0 и конечномерное подпространство $L \subset H$ такие, что при $x, y \in U$ и $(x - y) \perp L$ будем иметь $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \epsilon||x - y||$;
2) существуют вещественные числа $r > 0$ и $c > 0$ такие, что выполняется $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq c||x - y||$ при $||x - x_0|| < r$ и $||y - x_0|| < r$.

Лемма 2. *Пусть G – открытое подмножество H. Тогда всякая непрерывно дифференцируемая, в частности, линейная непрерывная функция (функционал) $\varphi : G \longmapsto R$ является K_0-функцией.*

Доказательство : Сначала рассмотрим случай, когда φ есть линейная непрерывная функция. Как известно из теории гильбертовых пространств, между линейными непрерывными функционалами, заданными на H, и элементами из H существует взаимнооднозначное соответствие. Поэтому функция φ, являющаяся ограничением на G некоторого непрерывного линейного функционала, будет иметь вид $\varphi(x) = (x, a)$ $(x \in G)$, где $a \in H$ – вектор, а (x, a) – скалярное произведение в H. Обозначим через L_a – одномерное линейное подпространство из H, являющееся прямой, проходящей через точки 0 и a. Пусть $U \subset G$ – произвольная окрестность точки x_0 и $\epsilon > 0$ произвольно. Тогда при $x, y \in U$ и $(x-y) \perp L_a$ будем иметь

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |(x - y, a)| = 0 \leq \epsilon||x - y||.$$

Далее, для любых $x, y \in U$ будем иметь

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |(x - y, a)| \leq ||a||||x - y|| = c||x - y|| \quad (c = ||a||).$$

Таким образом, функция φ удовлетворяет обоим условиям, приведенным в замечании 2. Откуда следует, что φ есть K_0-функция.

Пусть теперь φ – непрерывно дифференцируемая функция, $x_0 \in G$ и $\varepsilon > 0$ произвольны. Так как производная $\varphi'(x_0)$ является линейной, непрерывной функцией, то по доказанному $\varphi'(x_0)$ есть K_0-функция. В силу замечания 2 существуют окрестность $U_1 \subset G$ точки x_0 и линейное, конечномерное подпространство $L \subset H$ такие, что при $x, y \in U_1$ и $(x-y)\perp L$ имеет место

$$|\varphi'(x_0)(x-y)| = |\varphi'(x_0)(x) - \varphi'(x_0)(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\|x-y\|. \tag{4}$$

Далее, в силу непрерывной дифференцируемости φ существует окрестность $U_2 \subset G$ точки x_0 такая, что при $y \in U_2$ имеет место

$$\|\varphi'(y) - \varphi'(x_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

С другой стороны, из дифференцируемости φ следует, что существует такая окрестность $V \subset G$ точки x_0, что при любых $x, y \in V$ имеет место

$$|\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi'(y)(x-y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\|x-y\|. \tag{6}$$

Согласно соотношениям (4) – (6), получим, что при $x, y \in W = V \cap U_2$ имеет место

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - \varphi(y)| &= |\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi'(y)(x-y) + \varphi'(y)(x-y) - \varphi'(x_0)(x-y) + \\
&+ \varphi'(x_0)(x-y)| \leq |\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi'(y)(x-y)| + |\varphi'(y)(x-y) - \varphi'(x_0)(x-y)| + \\
&+ |\varphi'(x_0)(x-y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\|x-y\| + \frac{\varepsilon}{3}\|x-y\| + \frac{\varepsilon}{3}\|x-y\| = \varepsilon\|x-y\|.
\end{aligned}$$

Итак, условие 2) замечания 2 выполнено.

Покажем теперь, что φ локально удовлетворяет условию Липшица. Пусть $x_0 \in G$ и $\varepsilon > 0$ произвольны. Из непрерывной дифференцируемости φ имеем, что существует окрестность $W \subset G$ точки x_0 такая, что $\|\varphi'(y) - \varphi'(x_0)\| \leq \varepsilon$ при любом $y \in W$, и, следовательно,

$$\|\varphi'(y)\| \leq c_1\|x-y\|, \quad \text{где} \quad c_1 = \|\varphi'(x_0)\| + \varepsilon. \tag{7}$$

Далее, из дифференцируемости φ следует, что при $x \in W$ будем иметь

$$\|\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi'(y)(x-y)\| \leq c_2\|x-y\|, \tag{8}$$

где $c_2 > 0$ – некоторая константа. Таким образом, применяя соотношения (7) и (8), для любых $x, y \in W$ будем иметь

$$\begin{aligned}|\varphi(x) - \varphi(y)| &= |\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi'(y)(x-y) + \varphi'(y)(x-y)| \leq \\ &\leq |\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi'(y)(x-y)| + |\varphi'(y)(x-y)| \leq \\ &\leq c_2\|x-y\| + c_1\|x-y\| = c\|x-y\|.\end{aligned}$$

Таким образом, φ удовлетворяет обоим условиям 1) и 2) замечания 2 и, следовательно, φ является K_0-функцией.

Лемма 3. *Пусть G – открытое подмножество из H, $\varphi : G \longmapsto R$ – K_0-функция и $g : G \longmapsto H$ – K_0-отображение относительно H. Тогда отображение $f : G \longmapsto R \times H = H^*$, определенное формулой $f(x) = (\varphi(x), g(x))$, является K_0-отображением относительно H^*.*

Доказательство : Пусть $q : R \times H \longmapsto H$ – ортогональное проектирование, $G^* = q^{-1}(G)$ и $f^* = f \circ q : G^* \longmapsto H^*$. Покажем, что f^* является K_0-отображением относительно H. С этой целью рассмотрим произвольную точку $x_0^* = (t_0, x_0) \in G^*$, число $\epsilon > 0$ и положим $x_0 = q(x_0^*)$.

Поскольку, по условию отображение g есть K_0-отображение, то существуют окрестность $U_1 \subset G$ точки x_0 и (линейное) конечномерное подпространство $L_1 \subset H$ такие, что при $x, y \in U_1$ и $(x-y) \perp L_1$ имеет место

$$\|g(x) - g(y) - \lambda_g(x_0)(x-y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x-y\|. \tag{9}$$

Далее, существуют окрестность $V_1 \subset G$ точки x_0 и число $c_1 > 0$ такие, что для любых $x, y \in V_1$ имеет место

$$\|g(x) - g(y)\| \leq c_1\|x-y\|. \tag{10}$$

Аналогично, (см. замечание 2), существуют окрестность $U_2 \subset G$ точки x_0 конечномерное подпространство $L_2 \subset H$ такие, что для любых $x, y \in U_2$ и $(x-y) \perp L_2$ имеем

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x - y\|. \tag{11}$$

Далее, существуют окрестность $V_2 \subset G$ и число $c_2 > 0$, что для любых $x, y \in V_2$ имеем

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq c_2\|x - y\|. \tag{12}$$

Положим $U = U_1 \cap U_2$, $V = V_1 \cap V_2$, $c = c_1 + c_2$ и пусть $U^* \subset G^*$, $V^* \subset G^*$ окрестности точки x_0^* такие, что $q(U^*) \subset U$ и $q(V^*) \dot{\subset} V$. Обозначим через L^* линейное, конечномерное подпространство H^*, содержащее объединение $R \cup L_1 \cup L_2$. Пусть теперь $(t, x) \in U^*$ и $(t', y) \in U^*$ такие точки, что вектор $(t, x) - (t', y)$ ортогонален к L^*. Тогда необходимо $t = t'$, и, приняв $\lambda = \lambda_g(x_0)$, в силу (9) и (11) получаем

$$\begin{aligned}
\|f^*(t,x) - f^*(t,y) - \lambda_g(x_0)((t,x) - (t,y))\| &= \|f(x) - f(y) - \lambda_g(x_0)(0, x-y)\| = \\
&= \|(\varphi(x), g(x)) - (\varphi(y), g(y)) - \lambda_g(x_0)(0, x-y)\| = \\
&= \|(\varphi(x) - \varphi(y), g(x) - g(y)) - \lambda_g(x_0)(0, x-y)\| = \\
= \|(\varphi(x) - \varphi(y))e + (g(x) - g(y)) - \lambda_g(x_0)(0, x-y)\| &\leq \|(\varphi(x) - \varphi(y))e\| + \\
&+ \|(g(x) - g(y)) - \lambda_g(x_0)(0, x-y)\| = \\
&= |(\varphi(x) - \varphi(y)|\|e\| + \|(g(x) - g(y)) - \lambda_g(x_0)(0, x-y)\| \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\|x-y\| + \frac{\varepsilon}{2}\|x-y\| = \varepsilon\|x-y\| = \varepsilon\|(t,x) - (t',y)\|,
\end{aligned}$$

где e – единичный вектор на прямой R.

Итак, для f^* условие (K) замечания 1 выполнено. Покажем теперь, что f^* локально удовлетворяет условию Липшица. Для точек $(t, x) \in V^*$ и $(s, y) \in V^*$ будем иметь

$$\begin{aligned}
\|f^*(t,x) - f^*(s,y)\| &= \|f(x) - f(y)\| = \|(\varphi(x), g(x)) - (\varphi(y), g(y))\| = \\
&= \|(\varphi(x) - \varphi(y))e + (g(x) - g(y))\| \leq \|(\varphi(x) - \varphi(y))e\| + \|g(x) - g(y)\| = \\
&= |\varphi(x) - \varphi(y)| + \|g(x) - g(y)\| \leq c_2\|x-y\| + c_1\|x-y\| = (c_1 + c_2)\|x-y\| = \\
&= c\|x-y\| \leq c\|(t,x) - (s,y)\|.
\end{aligned}$$

Таким образом, f^* удовлетворяет обоим условиям принадлежности к классу K_0 относительно H^*. Отсюда, отображение $f : G \longmapsto H^*$ является K_0-отображением и $\lambda_f(x_0) = \lambda_g(x_0)$, поскольку множество G^* открыто в H^* и f^* является продолжением f. Лемма 3 доказана.

Следствие 1. Пусть G – открытое подмножество из H, $\varphi : G \longmapsto R$ есть K_0-функция и $g : G \longmapsto H$ есть K_0-отображение. Тогда отображение $h : G \longmapsto H$, определенное формулой $h(x) = \varphi(x)g(x)$ является K_0-отображением.

Действительно, $f : G \longmapsto R \times H$ –отображение, определенное формулой $f(x) = (\varphi(x), g(x))$ является K_0-отображением в силу леммы 3. Далее, $\psi : R \times H \longmapsto H$ – отображение, определенное формулой $\psi(\lambda, x) = \lambda x$ $(\lambda \in R,\ x \in H)$ является K_0-отображением относительно H^* [4]. Ясно, что h представляет собой композицию отображений f и ψ, и, следовательно, h есть K_0-отображение относительно H^*. Согласно лемме 1 h будет K_0-отображением относительно H.

Определение 9. Непрерывное отображение $f : M \longmapsto H$ произвольного множества $M \subset H$ будем называть локально K_0-отображением (относительно H), если существует такое открытое относительно M покрытие $\{U_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ подпространства M, что ограничение $f_\alpha = f|U_\alpha$ есть K_0-отображение $\alpha \in A$ (в смысле определения 2).

Теорема 1. *В сепарабельном (т.е. обладающем счетным базисом) гильбертовом пространстве H для того, чтобы непрерывное отображение $f : M \longmapsto H$ было K_0-отображением (см. определение 2), необходимо и достаточно, чтобы f было локально K_0-отображением.*

Доказательство : Необходимость очевидна. Докажем достаточность. По предположению для каждого $\alpha \in A$ существуют открытое в H множество G_α и K_0-отображение $g_\alpha : G_\alpha \longmapsto H$ такие, что $U_\alpha \subset G_\alpha$ и $f|U_\alpha = G_\alpha|U_\alpha$. Используя индуцированную топологию в M, можно, уменьшив G_α, считать, что $U_\alpha = M \cap G_\alpha$. Положим $G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Поскольку открытые множества из H, являясь гладкими многообразиями, допускают гладкое разбиение единицы (см. [9]), то существует гладкое разбиение единицы $\{\varphi_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$, подчиненное открытому покрытию $\{G_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ подпространства G. Посредством разбиения $\{\varphi_\alpha\}$ из семейства

g_α, $(\alpha \in A)$ K_0-отображений склеим K_0-отображение $g : G \longmapsto H$, являющееся продолжением отображения f. Пусть $x_0 \in G$ – произвольная точка. Положим

$$g(x_0) = \sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(x_0) g_\alpha(x_0). \tag{13}$$

По определению разбиения единицы у точки x_0 существует такая открытая окрестность $U_{x_0} \subset H$, что все функции φ_α, за исключением конечного их числа, тождественно равны нулю на U_{x_0}. Поэтому в правой части формулы (13) стоит конечная сумма. И в результате, можем однозначно построить некоторое отображение $g : G \longmapsto H$.

По определению разбиения единицы множество $B = \{\alpha \in A \,|\, x_0 \in G_\alpha\}$ конечно, положим $V_{x_0} = \bigcap_{\alpha \in B} G_\alpha$, где G_α заданы на V_{x_0} и непрерывны на нем. Определим открытую окрестность $W_{x_0} = V_{x_0} \bigcap U_{x_0}$: для каждого $x \in W_{x_0}$ будем иметь

$$g(x) = \sum_{\alpha \in B} \varphi_\alpha(x) g_\alpha(x). \tag{14}$$

Каждое из отображений g_α в этой сумме является K_0-отображением на W_{x_0}, а каждая функция $\varphi_\alpha(x)$, будучи гладкой в силу леммы 2, будет K_0-функцией. Откуда следует, что каждое из слагаемых $\varphi_\alpha(x) g_\alpha(x)$ в (14), согласно следствию 1, будет K_0-отображением окрестности W_{x_0} в H. Поскольку конечная сумма K_0-отображений есть K_0-отображение, то ограничение $g|W_{x_0} : W_{x_0} \longmapsto H$ будет K_0-отображением.

Таким образом, семейство $\{W_x\}$ $(x \in G)$ является открытым покрытием подпространства G и все ограничения отбражения g на элементах этого покрытия являются K_0-отображениями. Отсюда следует, что отображение $g : G \longmapsto H$ также есть K_0-отображение. Для завершения доказательства остается показать, что g на M совпадает с f. Поскольку $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(x_0) = 1$, то для произвольной точки $x_0 \in M$ будем иметь

$$g(x_0) = \sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(x_0) g_\alpha(x_0) = \left(\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(x_0) \right) f(x_0) = f(x_0).$$

§ 3. K_0-ПАРА БОРСУКА

В этом параграфе все рассматриваемые множества, составляющие пары множества, декартовы произведения и K_0-отображения, являются соответственно объектами и морфизмами категории $K_0(H))^\infty$ (см. определение 6).

Определение 10. Назовем K_0-отображение $i : A \longmapsto X$ K_0-корасслоением или обладающим свойством продолжения (распространения) K_0-гомотопий, если для любых множества Y, K_0-отображения $f : X \longmapsto Y$ и K_0-гомотопии $g_t : A \longmapsto Y$ такой, что $g_0 = f \circ i$, существует K_0-гомотопия $f_t : X \longmapsto Y$ такая, что $f_0 = f$ и $g_t = f_t \circ i$ для каждой $t \in I$.

Очевидно, что композиция K_0-корасслоений есть K_0-корасслоение.

Мы будем в дальнейшем рассматривать тот важный частный случай K_0-корасслоения, когда $A \subset X$ и $i : A \longmapsto X$ есть отображение вложения. В этом случае пару (X, A) будем называть K_0-парой Борсука.

Таким образом, (X, A) есть K_0-пара Борсука, если для любых Y, K_0-отображения $f : X \longmapsto Y$ и частичной K_0-гомотопии $g_t : A \longmapsto Y$, т.е. $g_0 = f \circ i$, существует K_0-гомотопия $f_t : X \longmapsto Y$ с $f_0 = f$ и $g_t = f_t|A$ для всех $t \in I$.

Существенное свойство K_0-пары Борсука заключается в следующем : если (X, A) – K_0-пара Борсука, $g, g' : A \longmapsto Y$ – K_0-гомотопные K_0-отображения и одно из них непрерывно продолжимо до K_0-отображения на X, то и другое непрерывно продолжимо до K_0-отображения на X. Это означает, что если (X, A) есть K_0-пара Борсука, то непрерывное K_0-продолжение на X K_0-отображение $g : A \longmapsto Y$ зависит только от K_0-гомотопического класса отображения g.

Приведем часто используемую форму определения понятия K_0-пары Борсука : пара (X, A) есть K_0-пара Борсука, если для любых множества Y, K_0-отображения $f : X \longmapsto Y$ и K_0-гомотопии $G : I \times A \longmapsto Y$ такой, что $G(0, x) = f(x)$ $(x \in A)$, существует K_0-гомотопия $F : I \times X \longmapsto Y$ такая, что $F(0, x) = f(x)$ при всех $x \in X$ и $F(t, x) = G(t, x)$ при всех $t \in I$ и $x \in A$.

Пару (X, A) будем называть замкнутой, если множество A замкнуто в X.

В оставшейся части статьи гильбертово пространство H будет предполагаться сепарабельным.

Теорема 2. *Для того, чтобы замкнутая пара (X, A) была K_0-парой Борсука необходимо и достаточно, чтобы множество $\widetilde{A} = (0 \times X) \cup (I \times A)$ было K_0-ретрактом цилиндра $I \times X$.*

Отметим, что ход доказательства теоремы 2 таков же, что и в случае категории Top всех топологических пространств и их непрерывных отображений. Теорема остается справедливой и в категории $(K_0(H))^\infty$, благодаря тому, что все шаги этого доказательства не выводят нас из допустимого класса K_0 непрерывных отображений.

Замечание 3. K_0-пара Борсука необходимо замкнута.

Предложение 1. *Если (X, A) есть K_0-пара Борсука, то множество $\widetilde{A} = (0, \times X) \cup (I \times A)$ будет K_0-строгим деформационным ретрактом цилиндра $I \times X$.*

Доказательство : Пусть (X, A) есть K_0-пара Борсука. Тогда по теореме 2, множество $\widetilde{A}$ будет K_0-ретрактом в $I \times X$. Пусть $r : I \times X \longmapsto \widetilde{A}$ некоторая K_0-ретракция, положим $r_1 = p \circ r : I \times X \longmapsto I$ и $r_2 = q \circ r : I \times X \longmapsto X$, где p и q – проекции. Для каждого $s \in I$ построим отображение $F_s : I \times X \longmapsto I \times X$, приняв $F_s : (t, x) \longmapsto ((1-s)r_1(t, x) + ts, r_2((1-s)t, x))$.

Поскольку r_1 и r_2 являются K_0-отображениями, то, F_s являясь диагональным произведением K_0-отображений (см. лемму 3), также будет K_0-отображением. Далее, семейство (F_s) $(s \in I)$ является K_0-гомотопией, причем $F_0 = i \circ r$, где $i : \widetilde{A} \longmapsto I \times X$ есть отображение вложения, $F_1 = id_{I \times X}$ и K_0-гомотопия (F_s) неподвижна на $\widetilde{A}$, т.е. $F_s(t, x) = (i \circ r)(t, x)$ при $(t, x) \in \widetilde{A}$ и $s \in I$. Таким образом, отображение $r : I \times X \longmapsto \widetilde{A}$ есть K_0-строгая деформационная ретракция, следовательно, $\widetilde{A}$ есть K_0-строгий деформационный ретракт в $I \times X$.

Лемма 4. *Подмножество $Y \subset H$ будет K_0-окрестностным ретрактом в H тогда и только тогда, когда для любой пары (Z, C) подмножеств из H, любое K_0-отображение $f : C \longmapsto Y$ продолжимо до K_0-отображения $f^* : U \longmapsto Y$, где $U \subset Z$ есть некоторое открытое множество, содержащее C.*

Доказательство : Пусть $Y \subset H$ есть K_0-окрестностный ретракт в H, а $G_0 \subset H$ – открытое множество, в котором Y есть K_0-ретракт и $r_0 : G_0 \longmapsto Y$ – некоторая K_0-ретракция. Пусть, далее, $G \subset H$ – открытое множество и $g : G \longmapsto H$

– K_0-отображение такие, что $C \subset G$ и $g|C = f$ (см. Параграф 1), положим, $G' = g^{-1}(G_0)$, $g' = g|G'$, $U = Z \cap G'$ и $f^* = r_0 \circ g' : U \longmapsto Y$. Ясно, что U открыто в Z и f^* является K_0-продолжением отображения f до U.

Обратно, взяв пару (H, Y) за (Z, C), а тождественное отображение $id_Y : Y \longmapsto Y$ за f, получим открытое в H множество $G^* \supset Y$, в котором Y будет K_0-ретрактом и, значит, Y будет K_0-окрестностным ретрактом в H.

Теорема 3. *Пусть (X, A) – замкнутая пара подмножеств из H, где X есть K_0-окрестностный ректракт в H. Тогда для того, чтобы (X, A) была K_0-парой Борсука необходимо и достаточно, чтобы A было K_0-окрестностным ретрактом в H (эквивалентно, K_0-окрестностным ретрактом в X).*

Доказательство : Необходимость. В силу теоремы 2, множество $\widetilde{A} = (0, X) \cup (I \times A)$ есть K_0-ретракт в $I \times X$. Так как I есть K_0-ретракт в R, множество $I \times X$ есть K_0-окрестностный ретракт в гильбертовом пространстве $H^* = R \times H$. Отсюда следует, что $\widetilde{A}$ есть K_0-окрестностный ретракт в H^*.

Покажем, что A есть K_0-окрестностный ретракт в H. С этой целью рассмотрим произвольую пару (Z, C) подмножеств H и K_0-отображение $f : C \longmapsto A$. Посредством K_0-гомеоморфизма $x \longmapsto (1, x)$ отждествим A с $1 \times A$. Таким образом, $f : C \longmapsto A \subset \widetilde{A}$.

Положим $W = \{(t, x) \in \widetilde{A} : t > 0\}$. Ясно, что W – окрестность множества A в $\widetilde{A}$. Очевидно, что отображение $\varphi : W \longmapsto A$, $\varphi : (t, x) \longmapsto (1, x)$ является K_0-отображением, и $\widetilde{A}$ есть K_0-окрестностный ретракт в H^*. Следовательно, согласно лемме 4, f можно продолжить до K_0-отображения $f^* : U \longmapsto \widetilde{A}$, где U – открытое в Z множество, содержащее C. Рассмотрим открытое в Z множество $V = (f^*)^{-1}(W)$ и отображение $\widetilde{f} = \varphi \circ f^* : V \longmapsto A$. Отображение $\widetilde{f}$, будучи композицией K_0-отображений, является само K_0-отображением, являясь продолжением отображения f и A, согласно лемме 4, будет K_0-окрестностным ретрактом в H (значит, и в X).

Достаточность. Пусть $G \subset H$ – открытое множество и $r : G \longmapsto X$ некоторая K_0-ретракция. По условию A есть K_0-окрестностный ретракт в H и, следовательно, в X. Пусть G_0 открыто в X, $r_0 : G_0 \longmapsto A$ есть K_0-ретракция. Обозначим через $U_x \subset G$ ε_x-окрестность точки $x \in A$. В силу непрерывности r_0 для точки x, ее окрестности W_x существует окрестность $V_x \subset G_0$ точки x, такая что $V_x \subset U_x$ и $r_0(V_x) \subset W_x = A \cap U_x$.

Рассмотрим открытое в X множество $V = \bigcup_{x \in A} V_x$. Пусть $z \in V$ – произвольная точка, такая, что $z \in V_{x_0}$ для некоторой $x_0 \in A$. По построению, z и $r_0(z)$ принадлежат U_{x_0}. Так как U_{x_0} – выпуклое множество, то прямолинейный отрезок $[z, r_0(z)] \subset U_{x_0}$. Для каждой $t \in I$ пусть $z_t \in [z, r_0(z)]$ – точка, удовлетворяющая условию :

$$||z - z_t|| = t \quad \text{при} \quad t < ||z - r_0(z)|| \qquad \text{и} \qquad z_t = r_0(z) \quad \text{при} \quad t \geq ||z - r_0(z)||.$$

Ясно, что радиус ε_{x_0} окрестности U_{x_0} можем выбрать так, чтобы выполнялось $||z - r_0(z)|| < 1$. Положив $\psi_t(z) = r(z_t)$ $(z \in V, 0 \leq t \leq 1)$, построим гомотопию $\psi_t : V \longmapsto X$. Очевидно, что ψ_0 есть вложение V в X и $\psi_t = r_0|V$ при $t \geq ||z - r_0(z)||$. Гомотопия ψ_t есть K_0-гомотопия и $\psi_t(z) = z$ при $t \geq ||z - r_0(z)||$ и $z \in A$.

Рассмотрим произвольные множество $Y \subset H$, K_0-отображение $f : X \longmapsto Y$ и его частичную K_0-гомотопию $g_t : V \longmapsto Y$ (т.е. $G_0 = f|A$). Определим K_0-гомотопию $g_t : V \longmapsto Y$, положив :

$$\widetilde{g_t}(z) = \begin{cases} f(\psi_t(z)) & \text{при} \quad t < ||z - r_0(z)||, \\ g_t(\psi_t(z)) & \text{при} \quad t \geq ||z - r_0(z)||. \end{cases}$$

Очевидно, что $\widetilde{g_0} = f|V$ и $\widetilde{g_t}|A = g_t$ при $t \in I$. Продолжим гомотопию $\widetilde{g_t}$ до полной K_0-гомотопии $f_t : X \longmapsto Y$ отображения f (т.е. $f_0 = f$). Пусть $\varphi : X \longmapsto I$ – гладкая функция Урысона пары $A, X \backslash V$, равная нулю на $X \backslash V$ и равная 1 на A [9, 4]. Определим K_0-гомотопию $f_t : X \longmapsto Y$, положив :

$$f_t(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x \in X \backslash V, \\ \widetilde{g}_{\varphi(x)t}(x) & \text{при} \quad x \in V. \end{cases}$$

Очевидно, что $f_0 = f$ и $f_t|A = g_t$ для $t \in I$. Таким образом, пара (X, A) является K_0-парой Борсука.

Следствие 2. Пусть $B^{(r)}$ – единичный замкнутый шар, $S^{(r+1)}$ его граничная сфера в линейном подпространстве $H_1 \subset H$ конечной коразмерности $r \geq 0$. Тогда пара $(B^{(r)}, S^{(r+1)})$ является K_0-парой Борсука.

Доказательство : Ортопроектор H на H_1 является K_0-ретракцией [3], и, стало быть, H_1 есть K_0-ретракт в H. С другой стороны, $B^{(r)}$ есть K_0-ретракт, а $S^{(r+1)}$ – K_0-окрестностный ретракт в H_1. В самом деле, отобтажение $r : H_1 \longmapsto B^{(r)}$, задаваемое формулой $r(x) = x$ при $x \in B^{(r)}$ и $r(x) = x/\|x\|$ при $x \in (H_1 \setminus B^{(r)})$, а также отображение $r' : H_1 \setminus \{0\} \longmapsto S^{(r+1)}$, задаваемое формулой $r'(x) = x/\|x\|$ для $x \in (H_1 \setminus \{0\})$ являются K_0-ретракциями. Следовательно, $B^{(r)}$ есть K_0-ретракт и, стало быть, является K_0-окрестностным ретрактом в H, а $S^{(r+1)}$ также является K_0-окрестностным ретрактом в H. В силу теоремы 3, $(B^{(r)}, S^{(r+1)})$ будет K_0-парой Борсука.

Предложение 2. *Если замкнутая пара (X, A) есть K_0-пара Борсука и декартово произведение $Z \times X$ K_0-допустимо (см. Определение 7), то и пара $(Z \times X, Z \times A)$, а в частности, пара $(I \times X, I \times A)$ есть K_0-пары Борсука.*

Доказательство : По теореме 2 множество $\widetilde{A} = (0 \times X) \cup (I \times A)$ есть K_0-ретракт в $I \times X$. Пусть $\overline{r} : I \times X \longmapsto \widetilde{A}$ – некоторая K_0-ретракция. Рассмотрим гомеоморфизм $h : I \times (Z \times X) \overset{K_0}{\cong} Z \times (I \times X)$. Декартово произведение $id_z \times \overline{r} : Z \times (I \times X) \longmapsto Z \times \widetilde{A}$ будет K_0-отображением [4]. Положим $r = h^{-1} \circ (id_z \times \overline{r}) \circ h$. Отображение $r : I \times (Z \times X) \longmapsto (\widetilde{Z \times A})$ будет K_0-отображением, как композиция K_0-отображений. Ясно, что $\widetilde{Z \times A} = h^{-1}(Z \times \widetilde{A})$. Наконец, легко проверить, что r есть K_0-ретракция, откуда следует, в силу теоремы 2, что $(Z \times X, Z \times A)$ является K_0-парой Борсука.

Замечание 4. Если линейная оболочка множества Z в H не конечномерна, то декартово произведение $Z \times X$ не является K_0-допустимым, ибо ортогональный проектор пространства H на эту линейную оболочку не может быть K_0-отображением. Таким образом, в отличие от классического случая, предложение 2 не всегда верно в классе K_0.

Теорема 4. *Пусть (X, A) – замкнутая пара и A есть K_0-деформационный ретракт подпространства X. Тогда, если пара $(I \times X, X_A)$, где $X_A = (0 \times X) \cup (I \times A) \cup (1 \times X)$, является K_0-парой Борсука, то A будет K_0-строгим деформационым ретрактом подпространства X.*

Доказательство : Пусть $r : X \longmapsto A$ – некоторая K_0-деформационная ретракция (см. Параграф 1). По определению существует K_0-гомотопия $F : I \times X \longmapsto X$, связывающая id_x с отображением $i \circ r$, где $i : A \subset X$ есть вложение. На подмножестве X_A зададим частичную гомотопию $G_s : X_A \longmapsto X$ отображения F следующим образом :

$$G_s(t,x) = \begin{cases} F(0,x) = x & \text{где} \quad t = 0,\ x \in X, \\ F((1-s)t, x) & \text{где} \quad t \in I,\ x \in A, \\ F((1-s)t, r(x)) & \text{где} \quad t = 1,\ x \in X. \end{cases} \tag{15}$$

Легко проверить, что это определение корректно, и $G_0 = F|_{X_A}$. Далее, $G_s|_{0\times X} = id_X$ и $G_s|_{1\times X} = r$. Множества $0 \times X$, $I \times A$ и $1 \times X$ образуют замкнутое покрытие подмножества X_A, и на элементах этого покрытия отображение G_s непрерывно, откуда и следует, что отображение $G_s : X_A \longmapsto X$ тоже непрерывно. Из построения G_s следует также, что все три ограничения отображения G_s на элементы упомянутого покрытия являются K_0-отображениями. Применяя теорему 1, заключаем, что $G_s : X_A \longmapsto X$ является K_0-отображением.

Рассмотрим отображение $\overline{G} : I \times X_A \longmapsto X$, порожденное семейством (G_s) $(s \in I)$, т.е. $\overline{G}(s,t,x) = G_s(t,x)$ $(x \in X,\ s,t \in I)$. Из построения отображения G_s следует, что $\overline{G}$ является K_0-отображением. Таким образом, гомотопия G_s является частичной K_0-гомотопией K_0-отображения F. Так как $(I \times X, X_A)$ является K_0-парой Борсука, то существует K_0-гомотопия $F_s : I \times X \longmapsto X$ отображения F, продолжающая частичную K_0-гомотопию $G_s : X_A \longmapsto X$. Рассмотрим конечное отображение $F_1 : I \times X \longmapsto X$ этой гомотопии. Ясно, что $F_1(0,x) = x$ и $F_1(1,x) = r(x)$ для каждой точки $(x \in X)$. Это означает, что F_1 есть K_0-гомотопия, связывающая id_X с $i \circ r$. Из второй строки формулы (15) и построения отображения G_s следует, что $F_1(t,x) = x$ для каждой точки $x \in A$ и $t \in I$, т.е. гомотопия F_1 неподвижна на A. Таким образом, $r : X \longmapsto A$ является K_0-строгой деформационной ретракцией, т.е. A является K_0-строгим деформационным ретрактом подпространства X.

Теорема 5. *Пусть (X, A) – замкнутая пара. Тогда, если (X, A) есть K_0-пара*

Борсука, то A есть K_0-окрестностный строгий деформационный ретракт подпространства X в слабом смысле (см. определение 5 параграфа 1).

Обратно, если A является K_0-окрестностным строгим деформационным ретрактом в слабом смысле некоторого открытого в X подмножества $U \supset A$, т.е. A является K_0-окрестностным строгим деформационным ретрактом подпространста X в слабом смысле, и существует K_0-функция Урысона $\varphi : X \longmapsto I$ пары $A, X \setminus U$ и $A = \varphi^{-1}(0)$, то (X, A) будет K_0-парой Борсука.

Доказательство : Пусть (X, A) есть K_0-пара Борсука и $r : I \times X \longmapsto \widetilde{A}$ – некоторая K_0-ретракция. (По теореме 2 множество $\widetilde{A} = (0, \times X) \cup (I \times A)$ есть K_0-ретракт в $I \times X$.) Положим

$$U = \{x \in X \mid r(1, x) \in (0, 1] \times A\}.$$

Так как $\widetilde{A} \setminus (0 \times X) = (0, 1] \times A$ есть открытое множество в $\widetilde{A}$, то множество $1 \times U = (1 + X) \cap r^{-1}[(0, 1] \times A]$ открыто в $1 \times X$. Далее, $U = \psi^{-1}(1 \times U)$, где $\psi : X \longmapsto I \times X$ – отображение, оределяемое формулой $\psi : x \longmapsto (1, x)$. Откуда следует, что U есть открытое множество в X и U содержит A.

Рассмотрим K_0-отображение $F : I \times U \longmapsto X$, являющееся композицией следующих K_0-отображений :

$$I \times U \subset I \times X \overset{r}{\longmapsto} \widetilde{A} \subset I \times X \longmapsto X.$$

легко проверить, что $F(0, x) = x$ и $F(1, x) \in A$ при $x \in U$. Так как $F(t, x) = x$ при $x \in A$ и $t \in I$, то F есть неподвижная K_0-гомотопия на A, связывающая отображение включения $U \subset X$ с отображением, переводящим U в A, т.е. A есть K_0-окрестностный строгий деформационный ретракт в слабом смысле подпространства X.

Обратно, пусть теперь A есть K_0-окрестностный строгий деформационный ретракт в слабом смысле подпространства X, и пусть $\varphi : X \longmapsto I$ есть K_0-функция Урысона пары A, $X \setminus U$, выделяющая A, т.е. $A = \varphi^{-1}(0)$. По условию существует K_0-гомотопия $F : I \times U \longmapsto X$, для которой $F(0, x) = x$ и $F(1, x) \in A$ $(x \in U)$, и эта гомотопия неподвижна на A, т.е. $F(t, x) = x$ при $x \in A$ и $t \in I$. Пусть отображение $G : I \times U \longmapsto X$ корректно определено и непрерывно и таково, что

$$G(t,x) = \begin{cases} F\left(\frac{1}{\varphi(x)}, x\right) & \text{если} \quad x \in U \setminus A, \ t < \varphi(x), \\ F(1,x) & \text{если} \quad x \in U \setminus A, \ t \geq \varphi(x), \\ x & \text{если} \quad x \in A. \end{cases}$$

Ясно, что $G(0,x) = x$, $G(t,x) \in A$, если $t \geq \varphi(x)$ и G неподвижно на A. С другой стороны, из построения G заключаем, что все три ограничения являются K_0-отображениями, и, принимая во внимание утверждение теоремы 1, заключаем, что отображение $G : I \times U \longmapsto X$ является K_0-отображением.

Рассмотрим отображение $\widehat{F} : I \times X \longmapsto \widetilde{A} = (0 \times X) \cup (I \times A)$, задаваемое формулой

$$\widehat{F}(t,x) = \begin{cases} (0, G(0,x)) & \text{если} \quad x \in U, \ t \leq \varphi(x), \\ (t - \varphi(x), G(t - \varphi(x), x)) & \text{если} \quad x \in U, \ t > \varphi(x), \\ (0,x) & \text{если} \quad x \in X \setminus U, \ t \in I. \end{cases}$$

Повторяя рассуждения, приведенные выше относительно отображения G, заключаем, что отображение $\widehat{F}$ есть K_0-отображение и $\widehat{F}|_{\widetilde{A}} = id_{\widetilde{A}}$, т.е. $\widetilde{A}$ есть K_0-ретракт цилиндра $I \times X$, и, следовательно, по теореме 2 X, A есть K_0-пара Борсука.

Abstract. The paper presents modifications of some of the main results relating to Borsuk pairs in the category $K_0(H))^\infty$, where H is any real, separable Hilbert space. Admissible K_0-mappings are described and the K_0-versions of the main properties of Borsuk pairs are established.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Постников. Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий. Москва, 1984.
2. В. Г. Болтянский, "Об одном классе отображений подмножеств гильбертова пространства", Изв. АН Арм.ССР, Математика, том 9, № 2, стр. 107 - 120, 1974.
3. Э. А. Мирзаханян, "О свойствах одного класса отображений подмножеств гильбертова пространства", Изв. АН Арм.ССР, Математика, том 15, № 5, стр. 349 - 356, 1980.
4. Э. А. Мирзаханян, "Об одной теореме инвариантности области гильбертова пространства при K_0-диффеоморфизмах", Уч. Зап. ЕГУ, № 2, стр. 28 - 33, 1986.

5. Э. А. Мирзаханян, "О некоторых классах непрерывных отображений подмножеств гильбертова пространства, I", Уч. Зап. ЕГУ, № 3, стр. 21 - 28, 1990.
6. Э. А. Мирзаханян, "Модифицированные ретракты в гильбертовых пространствах", Изв. НАН Армении, Математика, том 33, № 6, стр. 10 - 27, 1998.
7. Э. А. Мирзаханян, "О некоторых классах непрерывных отображений подмножеств гильбертова пространства, II", Уч. Зап. ЕГУ, № 1, стр. 3 - 10, 1991.
8. С. Ленг. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. Москва, 1964.

Поступила 1 ноября 2004