Известия НАН Армении. Математика, 37, № 5, 2002, 12-26

РОСТ УНИВЕРСАЛЬНЫХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

В. Лу, В. А. Мартиросян

Трирский Университет, Трир, Германия
Ереванский государственный университет
E-mails : luh@uni-trier.de ; mart@instmath.sci.am

Резюме. В статье исследуется существование мероморфных в единичном круге функций, которые универсальны относительно наперед заданных сдвигов и имеют ограниченную неванлинновскую характеристику.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Первый пример функции с универсальными сдвигами был найден Г. Д. Биркгофом [3], построившем целую функцию φ, обладающую следующим свойством : для любой целой функции f существует последовательность $\{\zeta_n\}$ комплексных чисел такая, что $\zeta_n \to \infty$ и $\varphi(z+\zeta_n) \to f(z)$ компактно на $\mathbf{C}$.

Сформулируем этот результат в равносильной форме. Сперва введем некоторые обозначения. Для компактного множества $K \subset \mathbf{C}$ обозначим через $A(K)$ семейство всех функций, непрерывных на K и голоморфных на его внутренности ; семейство $A(K)$, снабженное равномерной нормой, является банаховым пространством. Через $\mathcal{M}$ обозначим совокупность из всех компактных множеств K со связным дополнением $K^c = \mathbf{C} \setminus K$. Из теоремы Мергеляна легко следует, что функция Биркгофа имеет сдвиги, которые для всех $K \in \mathcal{M}$ плотны в $A(K)$.

Построенный Биркгофом пример функции с очень беспорядочным граничным поведением побудил интенсивные исследования в области, называемой теперь "теория универсальных функций". Например, если $G \subset \mathbf{C}$, $G \neq \mathbf{C}$ – односвязная область, то в [9] показано, что существует голоморфная на G функция φ со свойством : для каждого $K \in \mathcal{M}$, для каждого $f \in A(K)$ и каждой граничной точки $\zeta \in \partial G$ существуют последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ такие, что ($\mathcal{N}$ –

Исследовательская работа второго автора была поддержана Германской Академической Службой Обмена (ДААД)

множество натуральных чисел)

$$a_n z + b_n \in G, \quad z \in K, \quad n \in \mathcal{N},$$
$$a_n z + b_n \to \zeta,$$
$$\varphi(a_n z + b_n) \to f(z) \quad \text{равномерно на } K.$$

Много новых и важных результатов последовали в течение последней декады. За подробностями мы отсылаем к обзору К.-Г. Гроссе-Эрдманна [6], где весьма полно собрана и классифицирована литература относительно разных видов универсальности.

До сих пор очень мало известно о свойствах роста этих универсальных голоморфных функций. Первый результат по этой проблеме получен в статье [4] С. М. Диос-Руис, где были построены целые функции с универсальными сдвигами, имеющие медленный трансцендентный рост. Н. У. Аракелян и А. М. Акопян [2] доказали, что для каждого числа $\rho > 1/2$ существует целая функция φ в смысле Биркгофа такая, что ее неванлинновская характеристика удовлетворяет оценке $T(r,\varphi) = O(r^\rho)$ при $r \to \infty$.

В [7] А. М. Акопян показал, что существует голоморфная на $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функция φ с ограниченной неванлинновской характеристикой, которая универсальна относительно точки $\zeta = 1$ в следующем смысле : существуют последовательности $\{a_n\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $\{b_n\} \subset \mathbb{D}$, $a_n \to 0$ и $b_n \to 1$ при $n \to \infty$ такие, что для всех $K \in \mathcal{M}$

$$a_n z + b_n \in \mathbb{D} \quad \text{для всех } z \in K \text{ и всех достаточно больших } n,$$

и обеспечивается плотность в $A(K)$ последовательности $\{\varphi(a_n z + b_n)\}$.

Можно ли улучшить свойства роста, если вместо голоморфных функций рассмотреть класс мероморфных функций ? В нашей предыдущей статье [11] установлено, что существует мероморфная на $\mathbb{C}$ функция φ с универсальными сдвигами (вдоль наперед заданной последовательности $\{\zeta_n\}$), чья неванлинновская характеристика удовлетворяет оценке $T(r,\varphi) = O(q(r)\log^2 r)$ при $r \to \infty$, где $q : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}^+$ – произвольно заданная возрастающая функция с $\lim\limits_{r\to\infty} q(r) = \infty$. Естественно спросить, существуют ли в областях $G \neq \mathbb{C}$ подобные универсальные мероморфные функции со свойствами относительно медленного роста. В этой заметке конструируется универсальная мероморфная в единичном круге $\mathbb{D}$ функция, имеющая минимально возможную скорость роста (измеренную неванлинновской характеристикой). Дополнительно требуем, чтобы универсальность имела место на заданных подмножествах из $\partial\mathbb{D}$ и чтобы сдвиги следовали по наперед предписанным последовательностям. Точнее, мы докажем следующую теорему (в ее формулировке $V(\{z_n\})$ означает множество всех предельных точек последовательности $\{z_n\}$).

Теорема. *Для заданных замкнутого множества $E \subset \partial\mathbb{D}$, последовательности $\{b_n\} \subset \mathbb{D}$ с $V(\{b_n\}) = E$ и последовательности $\{a_n\}$ с $0 \in V(\{a_n\})$, существует мероморфная на $\mathbb{D}$ функция F, обладающая следующими свойствами :*

(1) функция F имеет ограниченную неванлинновскую характеристику :

$$T(r, F) = O(1) \quad \text{при } r \to 1-.$$

(2) для каждого $K \in \mathcal{M}$, каждого $f \in A(K)$ и для каждого $\zeta \in E$ существуют последовательности $\{s_j\}$ и $\{t_j\}$ из $\mathcal{N}$ такие, что

$$\begin{aligned} a_{s_j} z + b_{t_j} &\in \mathbb{D} \quad \text{для всех } z \in K \text{ и всех } j \in \mathcal{N}, \\ a_{s_j} z + b_{t_j} &\to \zeta, \\ F(a_{s_j} z + b_{t_j}) &\to f(z) \quad \text{равномерно на } K. \end{aligned}$$

§2. АППРОКСИМАЦИЯ МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В этом параграфе рассматриваем последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ точек $z_n \in \mathbb{D}$, для которой $V(\{z_n\}) \subset \partial\mathbb{D}$ и $|z_{n+1}| > |z_n|$ при всех $n \in \mathcal{N}$. С $\{z_n\}$ будем ассоциировать последовательность замкнутых кругов $S_n = \{z : |z - z_n| \le r_n\}$ с радиусами $r_n = \lambda_n(1 - |z_n|)$, где $\lambda_n \in (0, 1/3]$ произвольно. Предполагается, что все $A_n = \{z : |z_n| - r_n \le |z| \le |z_n| + r_n\}$, $(n \in \mathcal{N})$ попарно не пересекаются. Положим

$$S'_n = \left\{ z : |z - z_n| \le \frac{3}{4} r_n \right\}, \quad S''_n = \left\{ z : |z - z_n| \le \frac{1}{4} r_n \right\}$$

и будем использовать следующие обозначения : $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, $S' = \bigcup_{n=1}^{\infty} S'_n$, $S'' = \bigcup_{n=1}^{\infty} S''_n$. В доказательстве сформулированной выше теоремы существенным средством является Лемма 2, где рассматривается мероморфная аппроксимация функций, голоморфных на подобных множествах S. При этом оказывается важной оценка роста аппроксимирующих мероморфных функций. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Для любой возрастающей функции $\varphi : [0,1) \longmapsto \mathbb{R}^+$ существует голоморфная на $\mathbb{D}$ функция h, которая для всех $z \in S'$ с $|z| \geq \frac{1}{4}$ удовлетворяет оценкам*

$$\log\frac{1}{2} + \varphi\left(\frac{4|z|-1}{3}\right) \leq \log|h(z)| \leq \log\frac{3}{2} + \varphi\left(\frac{4|z|+1}{5}\right).$$

Доказательство. Пусть функция g определена на S следующим образом : $g(z) = e^{\varphi(|z_n|)}$ при $z \in S_n$. Ясно, что g голоморфна на S, и согласно аппроксимационной теореме Аракеляна [1] (см. также [5], стр. 126), существует функция h, голоморфная на $\mathbb{D}$ такая, что

$$|g(z) - h(z)| < \frac{1}{2} \quad \text{для всех} \quad z \in S.$$

Отсюда для всех $z \in S_n$

$$\frac{1}{2}e^{\varphi(|z_n|)} \leq e^{\varphi(|z_n|)} - \frac{1}{2} \leq |h(z)| \leq e^{\varphi(|z_n|)} + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}e^{\varphi(|z_n|)}.$$

При всех $z \in S'_n$ имеем

$$\frac{1}{3}(4|z|-1) \leq |z_n| \leq \frac{1}{5}(4|z|+1),$$

так что утверждение леммы вытекает из свойства возрастания функции φ.

В следующей лемме используется такое

Определение. *Предположим, что $\varphi : [0,1) \longmapsto \mathbb{R}^+$ – возрастающая функция с $\lim\limits_{t\to 1-}\varphi(t) = \infty$. Последовательность кругов $\{S_n\}$ называется* **редкой относительно** *φ, если она удовлетворяет всем приведенным выше требованиям и выполняются следующие дополнительные условия :*

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\varphi(|z_j|)} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\varphi(|z_j| + \frac{3}{4}r_j)}{\varphi(|z_n|)} \leq 1, \quad n = 2,3\cdots.$$

Из второго условия следует оценка

$$(n-1)\varphi(|z_1|) \leq \sum_{j=1}^{n-1}\varphi\left(|z_j| + \frac{3}{4}r_j\right) \leq \varphi(|z_n|),$$

откуда получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varphi(|z_n|)} \le \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)\varphi(|z_1|)} < \infty.$$

Итак, первое условие вытекает из второго, если отбросить конечное число членов последовательности $\{z_n\}$. Следовательно, предположение $\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\varphi(|z_j|)} \le 1$ не умаляет общности.

Если последовательность кругов $\{S_n\}$ является редкой относительно φ, то любая ее подпоследовательность обладает тем же самым свойством.

Лемма 2. *Пусть $\varphi : [0,1) \longmapsto \mathbb{R}^+$ – возрастающая функция с $\lim_{t\to 1-} \varphi(t) = \infty$, и $\{S_n\}$ – последовательность кругов, редкая относительно φ. Предположим, что функция f голоморфна на S и $\log^+|f(z)| = O(\varphi(|z|))$ при $z \in S'$, $|z| \to 1$. Тогда существует мероморфная на $\mathbb{D}$ функция g с полюсами только на $\partial S'$ со следующими свойствами :*

(1) $$|f(z) - g(z)| < 1 \quad \text{для всех } z \in S'',$$

(2) $$T(r,g) = O\left((1-r)\varphi\left(\frac{9r+7}{16}\right) + \int_a^r \varphi\left(\frac{9t+7}{16}\right) dt\right), \quad r \to 1-,$$

где $a \in (0,1)$ – подходящая постоянная.

Доказательство. 1. Пусть Γ_n – положительно ориентированная граница для S_n', и $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$. Из интегральной формулы Коши следует, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in S'.$$

Для подходящего $p \in \mathcal{N}$ выберем равномерно распределенные на Γ_n точки $\zeta_{n1}, \dots, \zeta_{np}$; $\zeta_{n,p+1} = \zeta_{n1}$ так, чтобы подлуги $\gamma_{n\nu}$, соединяющие $\zeta_{n\nu}$ с $\zeta_{n,\nu+1}$ $(\nu = 1, \dots, p)$ были попарно непересекающимися (предполагается, что $\zeta_{n\nu} \in \gamma_{n\nu}$, но $\zeta_{n,\nu+1} \notin \gamma_{n\nu}$) и чтобы $\Gamma_n = \bigcup_{\nu=1}^{p} \gamma_{n\nu}$. Число p можно выбрать независимым от n, чтобы выполнялась оценка

$$\text{длина}(\gamma_{n\nu}) < \frac{1}{8} r_n \quad \text{при} \quad \nu = 1, \ldots, p, \quad n \in \mathcal{N} \tag{1}$$

(возможный выбор $p = 378$). Ряд

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\zeta - \zeta_{n\nu})^{j-1}}{(z - \zeta_{n\nu})^j}$$

равномерно сходится при $\zeta \in \gamma_{n\nu}$ и $z \in S_n'' \cup S_n^c$. Для $z \in \mathbf{C}$ и $\zeta \in \Gamma$ рассмотрим функцию

$$R(\zeta, z) = -\sum_{j=1}^{N_n} \frac{(\zeta - \zeta_{n\nu})^{j-1}}{(z - \zeta_{n\nu})^j}, \quad \zeta \in \gamma_{n\nu}, \tag{2}$$

где N_n – натуральные числа, точно определяемые позже. Из (1) и (2) для всех $\zeta \in \Gamma_n$ и $z \in S_n'' \cup S_n^c$ получим

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - R(\zeta, z) \right| < \frac{8}{r_n} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{N_n}. \tag{3}$$

Теперь, при $z \in \mathbb{D}$ определим

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) R(\zeta, z)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_n} f(\zeta) R(\zeta, z)\, d\zeta, \tag{4}$$

и докажем, что эта функция имеет все требуемые свойства, если числа $N_n \in \mathcal{N}$ выбраны подходящим образом.

2. а) Проверим сперва, что g мероморфна на $\mathbb{D}$. Для любого $r \in (0, 1)$ рассмотрим круг $\mathbb{D}_r = \{z : |z| < r\}$ и выберем $n_0 \in \mathcal{N}$ так, чтобы $\overline{\mathbb{D}_r} \cap \bigcup_{n=n_0}^{\infty} S_n = \emptyset$. Если $L_0 = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \Gamma_n$, то для всех $z \in \overline{\mathbb{D}_r}$ будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

Определим функцию

$$g_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} f(\zeta) R(\zeta, z)\, d\zeta.$$

Из (3), для всех $z \in \overline{\mathbb{D}_r}$ имеем

$$|g_0(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} f(\zeta) \left\{ \frac{1}{\zeta - z} - R(\zeta, z) \right\} d\zeta \right| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{r_n} \left(\frac{1}{2}\right)^{N_n} \int_{\Gamma_n} e^{c_1 \varphi(|\zeta|)}\, |d\zeta|,$$

где c_1 – некоторая положительная постоянная (в последующем $c_2, \ldots, c_{12}$ будут означать другие положительные абсолютные постоянные). Если теперь выбрать некоторое $N_n \in \mathcal{N}$ так, чтобы

$$\frac{4}{\pi r_n} \left(\frac{1}{2}\right)^{N_n} \int_{\Gamma_n} e^{c_1 \varphi(|\zeta|)}\, |d\zeta| \leq e^{-\varphi(|z_n|)}, \quad n \in \mathcal{N}, \tag{5}$$

то для всех $z \in \overline{\mathbb{D}_r}$

$$|g_0(z)| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} e^{-\varphi(|z_n|)} \leq 1.$$

В силу произвольности $r \in (0, 1)$ отсюда следует, что ряд (4) определяет мероморфную на $\mathbb{D}$ функцию, которая имеет полюсы только на $\partial S'$ (отметим, что этот ряд сходится компактно в $\mathbb{D}$).

b) Для всех $z \in S''$ имеем

$$|f(z) - g(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left\{ \frac{1}{\zeta - z} - R(\zeta, z) \right\} d\zeta \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} f(\zeta) \left\{ \frac{1}{\zeta - z} - R(\zeta, z) \right\} d\zeta \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varphi(|z_n|)} \leq 1. \tag{6}$$

Аналогично

$$|g(z)| \leq 1, \quad z \in \mathbb{D} \setminus S. \tag{7}$$

Таким образом, функция g равномерно аппроксимирует функцию f на S'' и нуль на $\mathbb{D} \setminus S$.

3. Перейдем теперь к оценке величины

$$m(r, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| g(re^{i\theta} \right| d\theta.$$

Для $r \in (0,1)$ рассмотрим $C_r = \partial\mathbb{D}_r = \{z : |z| = r\}$. Если $r \notin (|z_n| - r_n, |z_n| + r_n)$ для всех $n \in \mathcal{N}$, то из (7) непосредственно следует

$$m(r, g) = 0. \tag{8}$$

Если $|z_n| - r_n < r < |z_n| + r_n$ для некоторого $n \in \mathcal{N}$, то разложим C_r на три части : $C_r^1 = C_r \setminus S$, $C_r^2 = C_r \cap S''$, $C_r^3 = C_r \cap (S \setminus S'')$. Из (7) снова получим

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{re^{i\theta} \in C_r^1} \log^+ |g(re^{i\theta})| \, d\theta = 0. \tag{9}$$

Согласно (6) и предположениям о f имеем

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{re^{i\theta} \in C_r^2} \log^+ |g(re^{i\theta})| \, d\theta \le \frac{1}{2\pi} \int_{re^{i\theta} \in C_r^2} \log^+ |g(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})| \, d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{re^{i\theta} \in C_r^2} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta + \log 2 \le \log 2 + c_2 \varphi(r)(1 - |z_n|). \tag{10}$$

Далее оценим интеграл

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{re^{i\theta} \in C_r^3} \log^+ |g(re^{i\theta})| \, d\theta.$$

Предположим, что $z = re^{i\theta} \in C_r^3 \setminus \Gamma_n$ – фиксировано. Тогда

$$|g(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma_n} + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_n} \right) f(\zeta) R(\zeta, z) \, d\zeta \right| \le$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma_n} f(\zeta)R(\zeta,z)\,d\zeta\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma\setminus\Gamma_n} f(\zeta)\left\{R(\zeta,z)-\frac{1}{\zeta-z}\right\}d\zeta\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{p}\left|\int_{\gamma_{n\nu}} f(\zeta)R(\zeta,z)\,d\zeta\right| + 1 \leq \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{j=1}^{N_n}\int_{\gamma_{n\nu}} |f(\zeta)|\frac{|\zeta-\zeta_{n\nu}|^{j-1}}{|z-\zeta_{n\nu}|^{j}}\,|d\zeta| + 1.$$

Введем функцию $\delta_n(z) = \min_{1\leq\nu\leq p}|z-\zeta_{n\nu}|$. Поскольку φ – возрастающая функция, то (1) влечет оценки

$$|g(z)| \leq 1 + \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{j=1}^{N_n}\frac{(r_n/8)^{j-1}}{\delta_n^j(z)}\int_{\gamma_{n\nu}}|f(\zeta)|\,|d\zeta| \leq$$

$$\leq 1 + 6\exp\left(c_1\varphi(|z_n| + \frac{3}{4}r_n)\right)\sum_{j=1}^{N_n}\left(\frac{r_n}{8\delta_n(z)}\right)^j \leq$$

$$\leq 1 + 6N_n\exp\left(c_1\varphi(|z_n| + \frac{3}{4}r_n)\right)\cdot\left\{\left(\frac{r_n}{8\delta_n(z)}\right)^{N_n} + 1\right\}.$$

В силу предположений относительно r имеем $|z_n| + \frac{3}{4}r_n \leq \frac{9r+7}{16}$. Следовательно,

$$\log^+|g(re^{i\theta})| \leq c_3 + c_1\varphi\left(\frac{9r+7}{16}\right) + \log N_n + N_n\log^+\frac{r_n}{8\delta_n(re^{i\theta})}. \tag{11}$$

Покажем теперь, что

$$\int_{re^{i\theta}\in C_r^3}\log^+\frac{r_n}{8\delta_n(re^{i\theta})}\,d\theta \leq c_4 r_n. \tag{12}$$

Разделим C_r^3 на две дуги, на каждой из них имеем $\delta_n(re^{i\theta}) \geq \left|re^{i\theta} - re^{i\theta_0}\right| \geq c_5|\theta-\theta_0|$, где $re^{i\theta_0}$ – точка, в которой соответствующая поддуга для C_r^3 пересекает (или ближайшая к) $\partial S_n'$. Замечая, что C_r^3 стягивает угол порядка r_n, получим

$$\int_{re^{i\theta}\in C_r^3}\log^+\frac{r_n}{8\delta_n(re^{i\theta})}\,d\theta < 2\int_0^{c_6 r_n}\log\frac{r_n}{8c_5 t}\,dt = c_4 r_n.$$

Интегрируя неравенство (11) по $re^{i\theta} \in C_r^3$ и учитывая (12), получим

$$I_3 \le c_7 \left(\varphi\left(\frac{9r+7}{16}\right) + N_n \right) (1 - |z_n|).$$

Если выбрать

$$N_n = 1 + \left[\frac{\log 8 + \varphi(|z_n|) + c_1\varphi(|z_n| + \frac{3}{4}r_n)}{\log 2} \right] \quad (13)$$

(где $[x]$ означает целую часть от x), то будет удовлетворяться как (5), так и оценка

$$8\left(\frac{1}{2}\right)^{N_n} \exp\left(c_1\varphi(|z_n| + \frac{3}{4}r_n)\right) \le e^{-\varphi(|z_n|)}.$$

Для $re^{i\theta} \in C_r^3$ имеем $N_n \le c_8\varphi\left(\frac{9r+7}{16}\right)$, и следовательно получим

$$I_3 \le c_9(1-r)\varphi\left(\frac{9r+7}{16}\right). \quad (14)$$

Собирая вместе (8) – (10), (14), для всех $r \in (0,1)$ получим оценку

$$m(r,g) \le c_{10}(1-r)\varphi\left(\frac{9r+7}{16}\right). \quad (15)$$

4. Оценим неванлинновскую характеристическую функцию $T(r,g) = m(r,g) + N(r,g)$. Как обычно, $n(t,g)$ – число полюсов функции g из круга $|z| \le t$, засчитываемых с учетом их кратностей. Существует $a \in (0,1)$ такое, что g не имеет полюсов при $|z| \le a$, и поэтому

$$N(r,g) = \int_a^r \frac{n(t,g)}{t}\, dt.$$

Из (13) получим

$$N_n \le c_{11}\varphi\left(|z_n| + \frac{3}{4}r_n\right).$$

Предполагая сперва, что $|z_n| - \frac{3}{4}r_n \le t < |z_n| + \frac{3}{4}r_n$, будем иметь $n(t,g) \le p\sum\limits_{j=1}^{n} N_j$.

Поэтому редкость $\{S_n\}$ относительно φ влечет

$$n(t,g) \le pc_{11}\varphi\left(|z_n| + \frac{3}{4}r_n\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\varphi(|z_j| + \frac{3}{4}r_j)}{\varphi(|z_n|)}\right) \le$$

$$\le 2pc_{11}\varphi\left(|z_n| + \frac{3}{4}r_n\right) \le c_{12}\varphi\left(\frac{3t+2}{5}\right).$$

Если же $|z_{n-1}| + \frac{3}{4}r_{n-1} \le t < |z_n| - \frac{3}{4}r_n$, то $n(t,g) \le p\sum\limits_{j=1}^{n-1} N_j$, и получим

$$n(t,g) \le pc_{11}\varphi\left(|z_{n-1}| + \frac{3}{4}r_{n-1}\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{n-2}\frac{\varphi(|z_j| + \frac{3}{4}r_j)}{\varphi(|z_{n-1}|)}\right) \le$$

$$\le 2pc_{11}\varphi\left(|z_{n-1}| + \frac{3}{4}r_{n-1}\right) \le c_{12}\varphi(t).$$

В обоих случаях для всех $t \in (0,1)$ выполняется оценка $n(t,g) \le c_{12}\varphi\left(\frac{3t+2}{5}\right)$. Следовательно

$$N(r,g) = O\left(\int_a^r \varphi\left(\frac{3t+2}{5}\right)\frac{dt}{t}\right), \quad r \to 1-.$$

Отсюда и из (15) получим

$$T(r,g) = O\left((1-r)\varphi\left(\frac{9r+7}{16}\right) + \int_a^r \varphi\left(\frac{9t+7}{16}\right)dt\right), \quad r \to 1-,$$

что завершает доказательство Леммы 2.

Замечание. Если в Лемме 2 функция роста φ принадлежит $L^1(0,1)$, то аппроксимирующая мероморфная функция g имеет ограниченную характеристику $T(r,g)$. Это следует из оценки

$$(1-r)\varphi\left(\frac{9r+7}{16}\right) + \int_a^r \varphi\left(\frac{9t+7}{16}\right)dt \le \int_a^1 \varphi\left(\frac{9t+7}{16}\right)dt \le \frac{16}{9}\int_0^1 |\varphi(t)|\,dt.$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

1. Предположим, что E^* – плотное подмножество для E, и пусть $\{\ell_k^*\}$ есть некоторая нумерация для E^*; предположим также, что $\{\Omega_k^*\}$ есть нумерация всех многочленов, коэффициенты которых имеют рациональные вещественные и мнимые части. Пусть $\{(\ell_k, \Omega_k)\}_{k=1}^{\infty}$ – некоторое переразмещение из точек ℓ_k^* и многочленов Ω_k^*, в котором любая комбинация (ℓ_r^*, Ω_s^*) встречается бесконечное число раз.

Для любого $k \in \mathcal{N}$ очевидно существуют постоянные $c_k > 0$ и $d_k \in \mathcal{N}$ такие, что $|\Omega_k(w)| \le c_k \max\{1, |w|^{d_k}\}$ для всех $w \in \mathbf{C}$. Возьмем $\varphi(t) = (1-t)^{-\frac{1}{2}}$, $t \in [0,1)$ в качестве функции из $L^1(0,1)$.

2. Построим индукцией последовательности $\{a_{m_k}\}, \{b_{n_k}\}$ и $\{\lambda_k\}$. Предположим, что для $k \in \mathcal{N}$, $k \ge 2$ числа $m_j \in \mathcal{N}$, $n_j \in \mathcal{N}$ и $\lambda_j \in (0, 1/3]$ уже определены при всех j, $1 \le j \le k-1$. Положим $r_j = \lambda_j(1 - |b_{n_j}|)$, $\varepsilon_j = \frac{1}{3}(1 - |b_{n_j}|)$. Тогда $0 < r_j \le \varepsilon_j$ при всех j, $1 \le j \le k-1$. Выберем $n_k \in \mathcal{N}$, $n_k > n_{k-1}$ достаточно большим, чтобы иметь $|b_{n_k} - \ell_k| < 1/k$, и чтобы $\varepsilon_k = \frac{1}{3}(1 - |b_{n_k}|)$ удовлетворяло неравенству

$$\varepsilon_k < \min\left\{\frac{\varepsilon_{k-1}}{3k^2}, \frac{\alpha^{2d_k}}{c_k^2 k^{2d_k}}\right\} \tag{16}$$

с некоторой постоянной $\alpha > 0$. Далее, выберем $m_k \in \mathcal{N}$, $m_k > m_{k-1}$ достаточно большим, чтобы иметь $|a_{m_k}| < \frac{\varepsilon_k}{k}$. С учетом сказанного выше, найдется $\lambda_k \in (0, 1/3]$ такое, что

$$c_k \left(\frac{3\lambda_k(1 - |b_{n_k}|)}{4|a_{m_k}|}\right)^{d_k} < [(1-\lambda_k)(1 - |b_{n_k}|)]^{-1/2}$$

и

$$\frac{\lambda_k(1 - |b_{n_k}|)}{|a_{m_k}|} \ge k. \tag{17}$$

Итак, получаем последовательности $\{a_{m_k}\}$, $\{b_{n_k}\}$ и $\{\lambda_k\}$.

3. Определим $r_k = \lambda_k(1 - |b_{n_k}|)$ и рассмотрим множества $S_k = \{z : |z - b_{n_k}| \le r_k\}$, $S_k' = \{z : |z - b_{n_k}| \le \frac{3}{4} r_k\}$, $S_k'' = \{z : |z - b_{n_k}| \le \frac{1}{4} r_k\}$. При подходящем выборе постоянной α

$$\left|\Omega_k\left(\frac{z - b_{n_k}}{a_{m_k}}\right)\right| < \log\frac{1}{2} + \varphi\left(\frac{4|z| - 1}{3}\right), \quad z \in S_k'.$$

Из (17) имеем $\frac{r_k}{|a_{m_k}|} \to \infty$, а (16) легко влечет, что кольца $A_k = \{z : |b_{n_k}| - r_k \leq |z| \leq |b_{n_k}| + r_k\}$ попарно непересекающиеся и что последовательность $\{S_k\}$ редкая относительно функции φ.

4. По Лемме 1 существует голоморфная на $\mathbb{D}$ функция h, удовлетворяющая для всех $z \in S' = \bigcup_{k=1}^{\infty} S'_k$, $|z| \geq \frac{1}{4}$ оценкам

$$\log\frac{1}{2} + \varphi\left(\frac{4|z|-1}{3}\right) \leq \log|h(z)| \leq \log\frac{3}{2} + \varphi\left(\frac{4|z|+1}{5}\right). \tag{18}$$

Функция $\Omega(z) = \Omega_k\left(\frac{z-b_{n_k}}{a_{m_k}}\right)$ при $z \in S_l$, $k \in \mathcal{N}$ голоморфна на S и удовлетворяет оценке

$$|\Omega(z)| \leq |h(z)| \quad \text{для всех} \quad z \in S'. \tag{19}$$

Согласно Лемме 2 и Замечанию, существует мероморфная на $\mathbb{D}$ функция g_1, которая голоморфна на $S'' = \bigcup_{k=1}^{\infty} S''_k$ и удовлетворяет условиям :

$$T(r, g_1) = O(1) \quad \text{при} \quad r \to 1- \tag{20}$$

и

$$|h(z) - g_1(z)| < 1 \quad \text{для всех} \quad z \in S''. \tag{21}$$

Из (18), (19) и (21) для всех $z \in S''$

$$\log^+|\Omega(z)g_1(z)| \leq \log^+|\Omega(z)| + \log^+|g_1(z)| \leq$$

$$\leq 2\log^+|h(z)| + \log 2 \leq 2\varphi\left(\frac{4|z|+1}{5}\right) + 3\log 2.$$

Последовательность $\{S''_n\}$ редкая относительно функции $\varphi\left(\frac{4t+1}{5}\right)$ и функция $\Omega(z)g_1(z)$ голоморфна на S''. Если положить

$$\tilde{S}_k = \left\{z : |z - b_{n_k}| \leq \frac{1}{16}r_k\right\}, \quad \tilde{S} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{S}_k,$$

то по Лемме 2 найдется мероморфная на $\mathbb{D}$ функция g, которая голоморфна на $\bar{S}$ и удовлетворяет условиям

$$T(r, g) = O(1) \quad \text{при} \quad r \to 1-, \tag{22}$$

и

$$|\Omega(z)g_1(z) - g(z)| < 1 \quad \text{для всех} \quad z \in \bar{S}. \tag{23}$$

5. Покажем, что мероморфная на $\mathbb{D}$ функция $F(z) = \frac{g(z)}{g_1(z)}$ имеет все требуемые свойства.

a) Из (18) и (21) следует

$$|g_1(z)| \geq |h(z)| - 1 \geq \frac{1}{2}\exp\left(\varphi\left(\frac{4|z|-1}{3}\right)\right) - 1, \quad z \in \bar{S},$$

и поскольку $\lim\limits_{t\to 1-} \varphi(t) = \infty$, то из (23) получим

$$|\Omega(z) - F(z)| \leq \frac{1}{|g_1(z)|} \to 0 \quad \text{при} \quad z \in \bar{S}, \quad |z| \to 1. \tag{24}$$

Свойства (20) и (22) влекут

$$T(r, f) \leq T(r, g) + T\left(r, \frac{1}{g_1}\right) = T(r, g) + T(r, g_1) + O(1) = O(1), \quad r \to 1-,$$

итак выполняется утверждение (1) Теоремы.

b) Чтобы показать справедливость утверждения (2), зададимся произвольными компактом $K \in \mathcal{M}$, функцией $f \in A(K)$ и точкой $\zeta \in E$. По теореме Мергеляна существует подпоследовательность $\{k_s\}_{s=1}^{\infty}$ натуральных чисел такая, что $\{\Omega_{k_s}(z)\}_{s=1}^{\infty}$ сходится к $f(z)$ равномерно на K. Из (24) и определения функции Ω имеем

$$\max_{\bar{S}_{k_s}} \left|\Omega_{k_s}\left(\frac{z - b_{n_{k_s}}}{a_{m_{k_s}}}\right) - F(z)\right| \to 0, \quad s \to \infty.$$

Отсюда при $\varrho_s = r_{k_s}/16|a_{m_{k_s}}|$ следует

$$\max_{|z|\leq \varrho_s} \left|F\left(za_{m_{k_s}} + b_{n_{k_s}}\right) - \Omega_{k_s}(z)\right| \to 0, \quad s \to \infty.$$

Наконец, существует подпоследовательность $\{s_\nu\}$, для которой $b_{n_{k_{s_\nu}}} \to \zeta$ при $\nu \to \infty$. Так как $K \subset \{z : |z| \le \varrho_{s_\nu}\}$ для всех достаточно больших ν, то (2) установлено. Доказательство завершено.

Abstract. The article investigates the existence of meromorphic functions in the unit disk, that are universal under prescribed translates and have bounded Nevanlinna's characteristic.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. У. Аракелян, "Равномерное приближение целыми функциями на замкнутых множествах", Изв. АН СССР, серия Математика, том 28, стр. 1187 – 1206, 1964.
2. N. U. Arakelian, A. M. Hakopian, "Entire functions with infinite set of deficient functions", Israel Math. Conference Proceedings, 1999.
3. G. D. Birkhoff, "Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières", C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 189, pp. 473 – 475, 1929.
4. С. М. Диос-Руис, "О существовании универсальных функций", ДАН СССР, том 268, стр. 18 – 22, 1983.
5. D. Gaier, Lectures on Complex Approximation, Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart, 1987.
6. K.-G. Grosse-Erdmann, "Universal functions and hypercyclic operators", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 36, pp. 345 – 381, 1999.
7. А. М. Акопян, "Дефектные функции ограниченного вида", Изв. НАН Армении. Математика, том 33, № 5, стр. 17 – 25, 1998.
8. W. K. Hayman, Meromorphic Functions, Clarendon Press, Oxford, 1964.
9. W. Luh, "Ueber cluster sets analytischer Funktionen", Acta Math. Acad. Sci. Hungar., vol. 33, no. 1 – 2, pp. 137 – 147, 1979.
10. W. Luh, "Universalfunktionen in einfach zusammenhängenden Gebieten, Aequationes Math., vol. 19, pp. 183 – 193, 1979.
11. W. Luh, V. A. Martirosian, "On the growth of universal meromorphic functions", Analysis, vol. 20, pp. 137 – 147, 2000.
12. R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, Springer, Berlin, 1936.

Поступила 11 августа 2002