Известия НАН Армении. Математика, **37**, № 4, 2002, 63–72

СХОДИМОСТЬ ГРИДИ АЛГОРИТМА НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

А. А. Саакян

Институт математики НАН Армении
e–mail : sart@instmath.sci.am

Резюме. В работе доказано, что для любой непрерывной функции $f(x) \in C(0,1)$ существует гомеоморфизм τ отрезка $[0,1]$ такой, что гриди аппроксимации суперпозиции $F = f \circ \tau$ равномерно сходятся к F как по системе Уолша, так и по тригонометрической системе.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система, определённая на отрезке $[0,1]$. Для функции $f \in L^2(0,1)$ рассмотрим её ряд Фурье по системе Ψ :

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\psi_n(x), \qquad c_n(f) = \int_0^1 f(x)\psi_n(x)\,dx.$$

Будем говорить, что перестановка $\rho = \{\rho(n)\}_{n=1}^{\infty}$ множества натуральных чисел убывает (для заданного f) и писать $\rho \in D(f)$, если $|c_{\rho(1)}| \geq |c_{\rho(2)}| \geq \ldots$. Отметим, что такая перестановка единственная, если все коэффициенты $c_n(f)$ различны. Для натурального N определим N-тый гриди аппроксимант следующим образом :

$$G_N(f,x) = G_N^{\Psi,\rho}(f,x) = \sum_{n=1}^{N} c_{\rho(n)}(f)\psi_{\rho(n)}(x).$$

Ясно, что $G_N(f,x) = \sum\limits_{n\in\Lambda_N} c_n(f)\psi_n(x)$ для некоторого множества $\Lambda_N = \Lambda_N(f)$, при этом $\#\Lambda_N = N$ и $|c_n(f)| \geq |c_m(f)|$, если $n \in \Lambda_N$, $m \notin \Lambda_N$. Гриди аппроксимация в различных пространствах и по различным системам изучалась во многих работах (см. подробнее обзорные статьи [1] и [2]). В случае, когда Ψ – тригонометрическая система, В. Темляковым [3] было доказано существование непрерывной функции f, для которой $G_N(f)$ расходится по норме $L^p(0,1)$ при любом $p > 2$, и существование функции f, принадлежащей L^p для любого $p < 2$, для которой $G_N(f)$ расходится по мере. В работах [4] и [5] Кернер, ответив на вопрос, поставленный Л. Карлесоном и Койфманом, построил сначала функцию, принадлежащую $L^2(0,1)$, а затем непрерывную функцию $f \in C(0,1)$, для которой $G_N(f)$ расходится почти всюду. В работе С. Конягина и В. Темлякова [6] получены достаточные условия для сходимости гриди алгоритма непрерывной функции. В частности, для тригонометрической системы они доказали следующее утверждение.

Теорема A. *Если коэффициенты Фурье функции $f \in C(0,1)$ удовлетворяют условию $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^p = o(n^{1-p})$ при $n \to \infty$, для некоторого $p > 1$, то при любом $\rho \in D(f)$ имеем $\lim\limits_{N\to\infty} \|G_N^\rho(F) - F\|_C = 0$.*

В настоящей работе мы доказываем, что произвольную непрерывную функцию $f \in C(0,1)$ можно "исправить" с помощью замены переменной и добиться равномерной сходимости гриди аппроксимации как по тригонометрической системе так и по системе Уолша. В случае тригонометрической системы предполагается, что функция $f \in C(0,1)$ периодическая : $f(0) = f(1)$.

Теорема 1. *Пусть Ψ – тригонометрическая система или система Уолша. Для произвольной функции $f \in C(0,1)$ существует гомеоморфизм τ отрезка $[0,1]$, т.е. непрерывная функция с условием*

$$0 = \tau(0) < \tau(x_1) < \tau(x_2) < \tau(1) = 1, \quad 0 < x_1 < x_2 < 1,$$

такая, что для суперпозиции $F(x) = f \circ \tau(x)$ и при любом $\rho \in D(f)$ имеем

$$\lim_{N\to\infty} \|G_N^\rho(F) - F\|_C = 0.$$

Аналогичный результат для последовательности $S_N(f)$ частных сумм ряда Фурье по тригонометрической системе был доказан Г. Бором (см., например, [7], стр. 303). Аналог теоремы Бора для системы Уолша доказан автором в работе [8]. В работах [9] и [10] были получены разные усиления теоремы Бора. В частности, в [9] было доказано следующее утверждение.

Теорема В. *Для произвольной функции $f \in C(0,1)$ существует гомеоморфизм τ отрезка $[0,1]$ такой, что коэффициенты Фурье суперпозиции $F = f \circ \tau$ удовлетворяют условию*

$$|c_n(F)| = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{при} \quad n \to 0. \tag{*}$$

Так как ряд Фурье непрерывной функции с коэффициентами Фурье, удовлетворяющими условию (*), равномерно сходится (см. [7], стр. 276), то из Теоремы В вытекает Теорема Бора.

Замечание 1. Легко видеть, что из условия $|c_n(F)| = o\left(\frac{1}{n}\right)$ следует, что функция F удовлетворяет условиям Теоремы А для любого $p > 1$. Следовательно, для тригонометрической системы Теорема 1 непосредственно следует из Теорем А и В. Однако отметим, что приведённое ниже доказательство Теоремы 1 проходит и в случае тригонометрической системы.

Замечание 2. Сопоставляя доказательства Теорем 1 и В (см. [8], [9] и равенство (3) ниже), можно убедиться, что построенный в Теореме 1 гомеоморфизм τ такой, что для суперпозиции $F = f \circ \tau$ будем одновременно иметь равномерную сходимость ряда Фурье и последовательности $G_N(F)$ как для тригонометрической системы, так и для системы Уолша.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Доказательство Теоремы В основано на применении системы Фабера–Шаудера. Известно (см. [11], стр. 205), что каждая функция $F \in C(0,1)$ единственным образом разлагается в равномерно сходящийся ряд по системе Фабера–Шаудера

$F(x) = A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{2^j} A_{j,i}\varphi_j^{(i)}(x)$, коэффициенты которого определяются следующими формулами : $A_0 = A_0(F) = F(0)$, $A_1 = A_1(F) = F(1) - F(0)$

$$A_{j,i} = A_{j,i}(F) = F\left(\frac{2i-1}{2^{j+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{i-1}{2^j}\right) + \left(\frac{i}{2^j}\right)\right]. \tag{1}$$

Следующая лемма непосредственно вытекает из Теоремы 13 главы 4, [11].

Лемма 1. *Для произвольных $i = 1, 2, \ldots, 2^j$, $j = 0, 1, \ldots$ имеем*

$$\|\varphi_j^{(i)}\|_A := \sum_{n=1}^{\infty}\left|c_n\left(\varphi_j^{(i)}\right)\right| < \infty. \tag{2}$$

Основную роль в доказательстве Теоремы 1 играет следующий результат.

Лемма 2. *Для произвольной функции* $f \in C(0,1)$ *с условием* $f(0) = 0$, *существуют гомеоморфизм* τ *отрезка* $[0,1]$ *и последовательности натуральных чисел* $\{M_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{N_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{j_k\}_{s=k}^{\infty}$, $\{i_k\}_{k=0}^{\infty}$ *такие, что*

A) $j_0 < j_1 < \dots,\quad 1 \le i_k \le 2^{j_k},\quad N_{k-1} < M_k < N_k,\quad k = 1, 2, \dots,$

B) Разложение суперпозиции $F(x) = f \circ \tau(x)$ *по системе Фабера–Шаудера имеет вид*

$$F(x) = A_1\varphi_1(x) + \sum_{k=0}^{\infty} A_{j_k, i_k}\phi_{j_k}^{(i_k)}(x) =: \phi_{-1}(x)) + \sum_{k=0}^{\infty}\phi_k(x); \tag{3}$$

C) $\sum\limits_{i=-1}^{k-1}\sum\limits_{n=M_k}^{\infty} |c_n(\phi_i)| \le \delta_k, \qquad k = 1, 2 \dots;$

D) $\sum\limits_{n=1}^{M_k} |c_n(\phi_k)| \le \delta_k, \qquad \sup\limits_{1 \le n < \infty} |c_n(\phi_k)| \le \delta_k, \quad k = 1, 2 \dots;$

E) $\sum\limits_{n=N_k}^{\infty} |c_n(\phi_k)| \le \delta_k, \qquad k = 0, 1 \dots,$

где числа δ_k, $k = 0, 1 \dots$ *определены следующим образом :*

$$\delta_0 = 1, \quad \delta_k = \min\left\{\frac{\delta_{k-1}}{2};\ \frac{1}{8}\left|c_n\left(\sum_{i=-1}^{k-1}\phi_i\right)\right|,\ n \in \Omega_{k-1}\right\}, \quad k = 1, 2 \dots,$$
$$\Omega_j = \left\{n \in [1, N_j] : c_n\left(\sum_{i=-1}^{j}\phi_i\right) \ne 0\right\}, \quad j = 0, 1 \dots \tag{4}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что

$$\|f\|_C \le \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Мы построим множество точек $\left\{\{a_j^i\}_{i=0}^{2^j}\right\}_{j=0}^{\infty}$ и последовательности чисел $\{j_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{i_k\}_{k=0}^{\infty}$, $1 \le i_k \le 2^{j_k}$ такие, что

a) $a_0^0 = 0$, $a_0^1 = 1$, $a_j^i < a_m^l$, если $\frac{i}{2^j} < \frac{l}{2^m}$, $a_j^i = a_m^l$, если $\frac{i}{2^j} = \frac{l}{2^m}$;

b) $\lim\limits_{j\to\infty}\left\{\max\limits_{1 \le i \le 2^j}\left(a_j^i - a_j^{i-1}\right)\right\} = 0;$

c) $f\left(a_{j+1}^{2i-1}\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(a_j^{i-1}\right) + f\left(a_j^i\right)\right]$, если $(j,i) \notin \bigcup\limits_{k=0}^{\infty}(j_k, i_k)$.

Если такие точки и последовательности построены, то положив

$$\tau\left(\frac{i}{2^j}\right) = a_j^i, \qquad j = 0,1,\ldots, \quad i = 0,1,\ldots,2^j, \tag{6}$$

мы можем в силу a) и b), однозначно продолжить $\tau(x)$ до непрерывной, строго монотонной функции на всём отрезке $[0,1]$, причём $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$). Кроме того, из равенства c) и формул (1), (6) вытекает, что разложение функции $F(x) = f \circ \tau(x)$ по системе Фабера-Шаудера будет иметь вид (3).

Точки $\{a_j^i\}$ будут построены по индукции. Дополнительно нам потребуется следить за выполнением условия

d) для любой пары (m,i), $m = 1,2,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,2^m$,имеет место одно из следующих двух условий :

(I) $f\left(a_m^{i-1}\right) \neq f\left(a_m^i\right)$,

(II) существует интервал $\left(\alpha_m^i, \beta_m^i\right) \subset \left(a_m^{i-1}, a_m^i\right)$ такой, что

$$f(x) = \text{const} = f\left(a_m^{i-1}\right) = f\left(a_m^i\right) \quad \text{при} \quad x \in \left(\alpha_m^i, \beta_m^i\right).$$

Положим $a_0^0 = a_1^0 = 0$, $a_0^1 = a_1^2 = 1$, и выберем точку $a_1^1 \in (0,1)$ так, чтобы $f\left(a_1^1\right) \neq 0 = f(0) = f(1)$. Если это невозможно, то $f(x) \equiv 0$ на $[0,1]$, и можно взять $\tau(x) \equiv x$. Функция τ уже определена в точках 0, 1/2, 1, и поэтому определены коэффициенты $A_0(F)$, $A_1(F)$ и $A_{0,1}(F)$, при этом $A_0(F) = A_1(F) = 0$. Теперь положим $j_0 = 0$, $i_0 = 1$, $M_0 = 0$ и выберем $N_0 > M_0$ так, чтобы имело место условие E) при $k = 0$.

Предположим теперь, что $k > 0$ и уже определены последовательности $\{M_s\}_{s=0}^{k-1}$, $\{N_s\}_{s=0}^{k-1}$, $\{j_s\}_{s=0}^{k-1}$, $\{i_s\}_{s=0}^{k-1}$, удовлетворяющие условию A), и точки $\left\{\{a_j^i\}_{i=0}^{2^j}\right\}_{j=0}^{j_{k-1}+1}$, удовлетворяющие соотношениям a), c) и d). Тогда функция $F = f\circ\tau$ определяется равенством (6) в точках $\frac{i}{2^j}$, $i = 0,1,\ldots,2^j$, $j = 0,1,\ldots,j_{k-1}+1$, В силу (1) и (4) определены функции $\phi_s = A_{j_s,i_s}\varphi_{j_s}^{(i_s)}$, $s = 0,1,\ldots,k-1$ и числа δ_k. Теперь определим числа M_k, N_k, j_k, i_k и построим множество точек $\left\{\{a_j^i\}_{i=0}^{2^j}\right\}_{j=j_{k-1}+2}^{j_k+1}$. Сначала, учитывая Лемму 1, найдём число $M_k > N_{k-1}$ так, чтобы

$$\sum_{i=-1}^{k-1}\sum_{n=M_k}^{\infty}|c_n(\phi_i)| \leq \delta_k. \tag{7}$$

Теперь учитывая, что $\|\varphi_j^{(i)}\|_{L^1(0,1)} \to 0$ при $j \to \infty$, выберем число $j_k > j_{k-1}$ настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{n=1}^{M_k} |c_n(\varphi_{j_k}^{(i)})| \le \delta_k, \qquad \sup_{1\le n<\infty} |c_n(\varphi_{j_k}^{(i)})| \le \delta_k, \qquad i = 1,2,\dots,2^{j_k}. \tag{8}$$

Точки a_j^i мы построим индукцией по $j = j_{k-1}+2,\dots,j_k+1$. Предположим, что точки $\{a_j^i\}_{i=0}^{2^j}$ уже построены и $j_{k-1}+1 < j \le j_k$. Сначала положим

$$a_{j+1}^{2i} = a_j^i, \qquad i = 0,1,\dots,2^j. \tag{9}$$

Построение точек a_{j+1}^{2i-1}, $i = 1,2,\dots,2^j$ разобьём на два случая.

Случай 1. $j < j_k$.

Если для пары (j,i) выполнено (I), то, учитывая непрерывность функции $f(x)$, точку a_{j+1}^{2i-1} мы выберем так, чтобы

$$a_j^{i-1} < a_{j+1}^{2i-1} < a_j^i, \quad \text{и} \quad f\left(a_{j+1}^{2i-1}\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(a_j^{i-1}\right) + f\left(a_j^i\right)\right]. \tag{10}$$

Если для пары (j,i) имеет место (II), то полагаем $a_{j+1}^{2i-1} = 1/2\left(\alpha_j^i + \beta_j^i\right)$.

Случай 2. $j = j_k$. Пусть $\left(a_j^{i_k-1}, a_j^{i_k}\right)$ - наибольший из интервалов (или один из наибольших) $\left(a_j^{i-1}, a_j^i\right)$, $i = 1,2,\dots,2^j$. Если $i \ne i_k$, то точка a_{j+1}^{2i-1} строится так же как в Случае 1. Если $i = i_k$, то точка a_{j+1}^{2i-1} строится следующим образом.

Если в интервале $\left(a_j^{i-1} + \frac{1}{4}(a_j^i - a_m^{i-1}), a_j^i - \frac{1}{4}(a_j^i - a_j^{i-1})\right)$ найдётся такая точка ξ, что $f(\xi) \ne f(a_j^{i-1})$, $f(\xi) \ne f(a_j^i)$, то полагаем $a_{j+1}^{2i-1} = \xi$. В противном случае $f(x) = \mathrm{const}$ на этом интервале, причём $f(x) = f(a_j^{i-1})$ или $f(x) = f(a_j^i)$). В этом случае полагаем $a_{j+1}^{2i-1} = \frac{1}{2}\left(a_j^{i-1} + a_j^i\right)$.

В обоих случаях мы будем иметь

$$\max\left\{a_{j+1}^{2i-1} - a_{j+1}^{2i-2},\ a_{j+1}^{2i} - a_{j+1}^{2i-1}\right\} \le \frac{3}{4}\left(a_j^i - a_j^{i-1}\right). \tag{11}$$

Следовательно, точки $\left\{\{a_j^i\}_{i=0}^{2^j}\right\}_{j=j_{k-1}+2}^{j_k+1}$ построены. Используя Лемму 1, выберем число $N_k > M_k$ так, чтобы

$$\sum_{n=N_k}^{\infty} |c_n(\varphi_{j_k}^{(i_k)})| \le \delta_k. \tag{12}$$

Продолжая указанный процесс, мы определим точки $\left\{\{a_j^i\}_{i=0}^{2^j}\right\}_{j=0}^{\infty}$. Выполнение условий a), c) и d) вытекает непосредственно из построения (см., в частности, (9) и (10)). Так как для каждого $k = 1, 2, \ldots$ наибольший из интервалов $\left(a_{j_k}^{i-1}, a_{j_k}^i\right)$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{j_k}$ делится точкой $a_{j_k+1}^{2i_k-1}$ на две части, длины которых меньше $\frac{3}{4}\max\limits_{1\le i\le 2^{j_k}}\left(a_{j_k}^i - a_{j_k}^{i-1}\right)$ (см. (11)), то условие b) также выполнено.

Следовательно, построен гомеоморфизм τ (см. (6)). Теперь проверим выполнение условий **A)** — **E)**. Условие **A)** вытекает непосредственно из построения. Условие **B)** следует из (1), (6) и свойства c) точек A_j^i. Далее, из (1) и (5) следует, что $|A_{j_k,i_k}| \le 1$, $k = 1, 2, \ldots$, а значит условия **C)**, **D)** и **E)** вытекают из (7), (8) и (12), соответственно. Лемма 2 доказана.

Доказательство Теоремы 1 : Без ограничения общности можем считать, что $f(0) = 0$. Согласно Лемме 2 достаточно показать, что если функция F имеет вид (3) и выполнены условия **A)** — **E)**, то $\lim\limits_{N\to\infty}\|G_N(F) - F\|_C = 0$. Сначала докажем, что

$$|c_n(F)| \ge \frac{3}{4}\sum_{i=-1}^{k}|c_n(\phi_k)|, \quad \text{если} \quad n \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

В силу условия **D)**, Леммы 2 и (4) имеем

$$\left|c_n\left(\sum_{i=k+1}^{\infty}\phi_i\right)\right| \le \sum_{i=k+1}^{\infty}|c_n(\phi_i)| \le \sum_{i=k+1}^{\infty}\delta_i \le 2\delta_{k+1} \le \frac{1}{4}\left|c_n\left(\sum_{i=-1}^{k}\phi_i\right)\right|.$$

Следовательно

$$|c_n(F)| \ge \left|c_n\left(\sum_{i=-1}^{k}\phi_i\right)\right| - \left|c_n\left(\sum_{i=k+1}^{\infty}\phi_i\right)\right| \ge \frac{3}{4}\sum_{i=-1}^{k}|c_n(\phi_k)|.$$

Теперь докажем, что

$$|c_n(F)| < |c_m(F)|, \quad \text{если} \quad n \in \Omega_k, \quad n \ge M_k, \quad m \in \Omega_j, \ j < k. \tag{14}$$

Действительно, в силу C), D), (4) и (13) получаем

$$|c_n(F)| \le \sum_{i=-1}^{k-1} |c_n(\phi_i)| + \sum_{i=k}^{\infty} |c_n(\phi_i)| \le \delta_k + \sum_{i=k}^{\infty} \delta_i \le 3\delta_k \le 3\delta_{j+1} \le$$

$$\le \frac{3}{8} \left| c_n \left(\sum_{i=-1}^{j} \phi_i \right) \right| < |c_m(F)| .$$

Рассмотрим последовательность

$$G_N(F, x) = \sum_{n \in \Lambda_N} c_n(F)\, \psi_n(x), \quad x \in [0,1], \quad N = 1, 2, \ldots .$$

Положим $E_{N,k} = \Lambda_N \cap ([-N_k, N_k] \setminus (-M_k, M_k))$,

$$k_0 = \max\{k : \Omega_k \cap E_{N,k} \neq \emptyset\} . \tag{15}$$

Пусть $n_0 \in E_{N,k_0}$. Согласно (14), если $m \in \Omega_j$, $j < k_0$, то $|c_m(F)| > |c_{n_0}(F)|$. Отсюда следует, что $m \in \Lambda_N$. Поэтому имеем

$$\bigcup_{j=1}^{k_0-1} \Omega_j \subset \Lambda_N . \tag{16}$$

Учитывая (3), будем иметь

$$\begin{aligned} G_N(F, x) = \sum_{n \in \Lambda_N} \sum_{k=-1}^{k_0-1} c_n(\phi_k)\, \psi_n(x) + \sum_{n \in \Lambda_N} c_n(\phi_{k_0})\, \psi_n(x) + \\ + \sum_{n \in \Lambda_N} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_n(\phi_k)\, \psi_n(x) =: I_1(x) + I_2(x) + I_3(x). \end{aligned} \tag{17}$$

Из (16) следует, что

$$\begin{aligned} I_1(x) = \sum_{n=1}^{N_{k_0-1}} c_n \left(\sum_{k=-1}^{k_0-1} \phi_k \right) \psi_n(x) + \\ + \sum_{n \in \Lambda_N,\, n = N_{k_0-1}+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_0-1} c_n(\phi_k)\, \psi_n(x) =: I_1'(x) + I_1''(x). \end{aligned} \tag{18}$$

Согласно C), E) и (4), имеем

$$|I_1'(x) - F(x)| \le \left| I_1'(x) - \sum_{k=-1}^{k_0-1} \phi_k(x) \right| + \left| F(x) - \sum_{k=-1}^{k_0-1} \phi_k(x) \right| \le$$

$$\le \sum_{k=-1}^{k_0-1} \sum_{n=N_{k_0-1}+1}^{\infty} |c_n(\phi_k)| + \gamma_{k_0} \le 2\delta_{k_0-1} + \gamma_{k_0}, \tag{19}$$

где $\gamma_{k_0} = \left\| F - \sum\limits_{k=0}^{k_0-1} \phi_{k_0} \right\|_C$. Аналогично

$$I_1''(x) \le \sum_{k=-1}^{k_0-1} \sum_{n=N_{k_0-1}+1}^{\infty} |c_n(\phi_k)| \le 2\delta_{k_0-1}. \tag{20}$$

По Лемме 1 для величины I_2 имеем следующую оценку :

$$|I_2(x)| \le \|\phi_{k_0}\|_A \le C \cdot \left| A_{j_{k_0}, i_{k_0}} \right|. \tag{21}$$

Чтобы оценить величину I_3 заметим, что из (15) следует, что если $k > k_0$ и $n \in E_{N,k}$, то $n \notin \Omega_k$, т.е. $c_n \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \phi_i \right) = 0$. Следовательно, с учётом с), получаем

$$\sum_{n \in E_{N,k}} |c_n(\phi_k)| = \sum_{n \in E_{N,k}} \left| c_n \left(\sum_{i=-1}^{k-1} \phi_i \right) \right| \le \sum_{i=-1}^{k-1} \sum_{n=M_k}^{\infty} |c_n(\phi_i)| \le \delta_k.$$

Отсюда находим, что при $k > k_0$

$$\sum_{n \in \Delta_N} |c_n(\phi_k)| \le \sum_{n=1}^{M_k-1} |c_n(\phi_k)| + \sum_{n \in E_{N,k}} |c_n(\phi_k)| + \sum_{n=N_k+1}^{\infty} |c_n(\phi_k)| \le 3\delta_k.$$

Следовательно

$$I_3 \le \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{n \in \Delta_N} |c_n(\phi_k)| \le 3 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \delta_k \le 3\delta_{k_0}. \tag{22}$$

Из (17) – (22) получим, что $\|G_N(F) - F\|_C \leq 4\delta_{k_0-1} + 3\delta_{k_0} + \gamma_{k_0} + C \cdot \left|A_{j_{k_0}, i_{k_0}}\right|$. Так как $k_0 \to \infty$ при $N \to \infty$, то из (13) и (15) получаем $\lim\limits_{N\to\infty} \|G_N(F) - F\|_{C(0,1)} = 0$. Теорема 1 доказана.

Abstract. The paper proves that for every continuous $f(x) \in C(0,1)$ there exists a homeomorphism τ of the segment $[0,1]$ such that the greedy approximations of superposition $F = f \circ \tau$ by both Walsh and trigonometric systems uniformly converge to F.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. N. Temlyakov, "Nonlinear Methods of Approximation", Industrial Mathematics Institute Research Report, 2001 :09 (preprint).
2. G. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "Greedy Approximation with regard to Bases and General Minimal Systems", Industrial Mathematics Institute Research Report, 2002 :16 (preprint).
3. V. N. Temlyakov, "Greedy Algorithm and m-term Trigonometric Approximation", Constructive Approx., vol. 14, pp. 569 — 587, 1998.
4. T. W. Körner, "Divergence of decreasing rearranged Fourier series", Annals of Mathematics, vol. 144, pp. 167 — 180, 1996.
5. T. W. Körner, "Decreasing rearranged Fourier series", The J. Fourier Analysis and Applicationa, vol. 5, pp. 1 — 19, 1999.
6. G. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "Covergence of Greedy Approximation II, The Trigonometric System, Industrial Mathematics Institute Research Report, 2002 :09 (preprint).
7. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Москва, Физ.Мат.Гиз, 1961.
8. А. А. Саакян, "О теореме Бора для кратных рядов Фурье", Мат. Заметки, том 64, № 6, стр. 913 — 924, 1998.
9. А. А. Саакян, "О свойствах коэффициентов Фурье суперпозиции функций", ДАН СССР, том 248, № 2, стр. 302 — 306, 1979.
10. J.-P. Kahane, Y. Katznelson, "Series de Fourier des functions bornees", Studies in Pure Math. a la Memoire de P. Turan, "Acad. Kiado", Budapest, pp. 395 — 410, 1983.
11. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Москва, АФЦ, 1999.

Поступила 25 мая 2002