Известия НАН Армении. Математика, 37, № 3, 2002, 57–78

О ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ В ПОЛИКРУГЕ ФУНКЦИЙ ТИПА ЛИЗОРКИНА–ТРИБЕЛЯ

Р. Ф. Шамоян

Брянский государственный университет, Россия

Резюме. В статье рассматриваются аналоги со смешанной нормой некоторых обобщений пространств Лизоркина– Трибеля. В первом параграфе исследование дробного операторного интегрирования приводит к характеризации таких пространств. Во втором параграфе получены оценки для коэффициентов Тейлора. В третьем параграфе описаны все ограниченные линейные функционалы.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Аналоги пространств Харди H^p и Джрбашяна A^p_α гладких функций в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ комплексной плоскости $\mathbf{C}$ изучались во многих работах различных авторов (см., например, [1] – [3]). Обобщения этих пространств в единичном круге D, в поликруге U^n и в шаре B^n комплексного пространства $\mathbf{C}^n$, называются классами Лизоркина–Трибеля голоморфных функций и рассматривались в работах [4] – [11]. Аналоги этих пространств в $\mathbb{R}^n$ изучались в [11].

В настоящей работе исследуются свойства голоморфных в полидиске функций из пространств типа Лизоркина–Трибеля $\alpha^{p,q}_{\alpha,\beta}$ и $F^{p,q}_{\alpha,\beta}$ с помощью дробного дифференцирования, теорем вложения и описания непрерывных функционалов.

Для определения пространств $\alpha^{p,q}_{\alpha,\beta}$ и $F^{p,q}_{\alpha,\beta}$, и для изложения результатов введём стандартные обозначения. Пусть $U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) : |z_j| < 1, \ j = 1, \dots, n\}$ – поликруг в $\mathbf{C}^n$, $T^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) : |z_j| = 1, \ j = 1, \dots, n\}$ – его остов, $I^n = [0,1]^n$. Обозначим через $H(U^n)$ класс всех голоморфных функций в U^n. Для $z_1, z_2 \in \mathbf{C}^n$, $z_{1,k} \neq z_{2,k}$, $k = 1, \dots, n$, $z_j = (z_{j1}, \dots, z_{jn})$, $j = 1, 2$ положим

$$|z_1 - z_2|^\gamma = \prod_{k=1}^{n} |z_{1,k} - z_{2,k}|^\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант 01-01-00992.

Через $dm_{2n}(z)$ обозначим нормированную лебегову меру $d\mathbb{R} = d\mathbb{R}_1 \cdots d\mathbb{R}_n$ на U^n, а через $dm_n(\xi)$ – лебегову меру на T^n. Через $H^p(U^n)$ обозначим класс Харди функций в полидиске U^n. С каждой функцией $f \in H(U^n)$ свяжем оператор $D^\alpha : H(U^n) \longmapsto H(U^n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ дробного дифференцирования

$$D^\alpha f(z) = \sum_{k_1,\ldots,k_n \geq 0} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1)} a_{k_1,\ldots,k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n},$$

$$\Gamma(\alpha+k+1) = \prod_{j=1}^{n} \Gamma(\alpha+k_j+1),$$

$$D^{-\alpha} f(z) = \sum_{k_1,\ldots,k_n \geq 0} \left(\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1)}\right)^{-1} a_{k_1,\ldots,k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}, \quad D^0 f(z) \equiv f(z).$$

Запись $A < (p,q)$ означает, что $A < \min(p,q)$, а запись $(p,q) < A$ означает, что $\max(p,q) < A$, где A, p, q – некоторые числа. Пространства $\alpha^{p,q}_{\alpha,\beta}$ и $F^{p,q}_{\alpha,\beta}$ при $0 < \alpha, p, q < \infty$ определяются формулами

$$\alpha^{p,q}_{\alpha,\beta}(U^n) = \Big\{ f \in H^p(U^n) : \|f\|^p_{\alpha^{p,q}_{\alpha,\beta}} =$$

$$= \int_{T^n} \left(\int_I |D^\alpha f(R\xi)|^q (1-R)^\beta dR \right)^{p/q} dm_n(\xi) < +\infty \Big\}, \tag{1.1}$$

$$F^{p,q}_{\alpha,\beta}(U^n) = \Big\{ f \in H^p(U^n) : \|f\|^p_{\alpha^{p,q}_{\alpha,\beta}} =$$

$$= \int_{T^n} \left(\int_{I^n} |D^\alpha f(R\xi)|^q (1-R)^\beta \, dR \right)^{p/q} dm_n(\xi) < +\infty \Big\}. \tag{1.2}$$

При $p = q = \infty$ рассмотрим стандартные модификации (1.1) и (1.2).

Для $n = 1$ классы $\alpha^{p,q}_{\alpha,\beta}$ и $F^{p,q}_{\alpha,\beta}$ содержат пространство Джрбашяна A^p_α и пространство Харди–Соболева H^p_α :

$$\alpha^{p,p}_{\alpha,\beta}(U) = A^p_\beta(U) = F^{p,p}_{0,\beta}, \quad \alpha^{p,2}_{0,2\beta-1}(U) = F^{p,2}_{0,2\beta-1}(U) = H^p_\beta(U).$$

Последнее равенство следует, например, из результатов статьи [12].

Замечание 1. Классы типа $\alpha^{p,q}_{\alpha,\beta}$ при $p,q > 1$ были введены и исследованы в [10]. Статья организована следующим образом. В параграфе 1 рассматриваются эквивалентные нормы (квазинормы) для классов $\alpha^{p,q}_{\alpha,\beta}$ и $F^{p,q}_{\alpha,\beta}$ (в $\mathbb{R}^n$ задача нахождения различных эквивалентных квазинорм для классов $F^{p,q}_\alpha$ была рассмотрена многими авторами, см. [11]). Параграфы 2 и 3 посвящены классам $F^{p,q}_{\alpha,\beta}(U^n)$. В параграфе 2 рассматривается оператор D^g в классах $F^{p,q}_{\alpha,\beta}$ и $\alpha^{p,q}_{\alpha,\beta}$. Приводятся также различные оценки для коэффициентов Тейлора (см. [1]).

§1. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ КВАЗИНОРМЫ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ $\alpha^{p,q}_{\alpha,\beta}$ И $F^{p,q}_{\alpha,\beta}$

Теорема 1. *При* $0 < p \le \infty$, $0 < q < \infty$, $\beta > n\alpha q - 1$, $t > n\gamma q - 1$, $q \ge p$, $\frac{t-\beta}{q^n} = \gamma - \alpha$, $\alpha, \gamma \ge 0$ *и* $D^{\max(\alpha\gamma)} f \in H^p$ *следующие утверждения равносильны :*

1) $f \in \alpha^{p,q}_{\alpha,\beta}(U^n)$, 2) $f \in \alpha^{p,q}_{\gamma,t}(U^n)$.

При $n = 1$ и $p = q$ утверждение Теоремы 1 хорошо известно (см., например, [14], [15]).

При $n = 1, p = q, \beta = q(\alpha - S) - 1, \alpha > S$ классы $F^{p,q}_{\alpha,\beta}$ совпадают с аналитическими пространствами Бесова $AB^{p,p}_S(D)$ (см. [16]). Эквивалентные квазинормы другого вида (типа BMO) для функций из этих классов, принадлежащих пространству H^p, были получены в [17].

Для доказательства Теоремы 1 нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. *При* $\alpha \ge 0$ *и* $0 < p \le \infty$

$$\left(\int_{T^n}\left(\sup_{r\in I}|D^\alpha f(r\xi_1,\dots,r\xi_n)|(1-r)^{\alpha n}\right)^p dm_n(\xi)\right)^{1/p} \le \|f\|_{H^p(U^n)}, \tag{1.3}$$

и

$$\left(\int_{T^n}\left(\sup_{r\in I^n}|D^\alpha f(r_1\xi_1,\dots,r_n\xi_n)|(1-r_1)^{\alpha n}\cdots(1-r_n)^{\alpha}\right)^p dm_n(\xi)\right)^{1/p} \le$$

$$\le \|f\|_{H^p(U^n)}. \tag{1.4}$$

Доказательство следует из Лемм 1 и 2 в [13].

Здесь и ниже используются следующие обозначения : запись $A \lesssim B$ означает, что существует положительная постоянная C такая, что $A \le CB$, а $A \approx B$ означает, что существуют положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что $C_1 A \le B \le C_2 A$.

Ниже будут использованы следующие соотношения :

1°. Пусть $0 < p \le 1$ и $f \in F^{p,p}_{0,\alpha p + 2p - 2}(U^n)$. Тогда

$$\left(\int_{U^n}|f(z)|(1-|z|)^\alpha dm_{2n}(z)\right)^p \le \int_{U^n}|f(z)|^p(1-|z|)^{\alpha p+2p-2}dm_{2n}(z). \tag{1.5}$$

2°. Пусть $1 < p < \infty$, $\varepsilon > 0$ и $\alpha > -1/p$. Тогда

$$\left(\int_{U^n}\frac{|f(z)|}{|1-wz|^\beta}(1-|z|)^\alpha dm_{2n}(z)\right)^p \le \int_{U^n}\frac{|f(z)|^p(1-|z|)^{\alpha p}(1-|w|)^{-sp}}{|1-wz|^{(\beta-2-s)p+2}}\,dm_{2n}(z). \tag{1.6}$$

3°. Пусть $f, g \in H(U^n)$, $r \in I^n$ и $\alpha > 0$. Тогда

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n} f(rt)g(r\bar{t})\, dm_n(t) =$$

$$= \frac{C(\alpha,n)}{(r_1\cdots r_n)^{2\alpha}}\int_0^{r_1}\cdots\int_0^{r_n}\int_{T^n} D^\alpha g(R\xi)f(R\bar{\xi})(r^2-R^2)^{\alpha-1}R\,dR\,dm_n(\xi). \quad (1.7)$$

Оценка 1° доказана в [3], а оценку 3° можно найти в [21], а соотношение 2° следует из неравенства Гёльдера и оценки

$$\int_{U^n}\frac{\prod_{k=1}^n(1-|z_k|)^{\gamma_2}}{\prod_{k=1}^n|1-|w_k z_k||^{\gamma_1}}dm_{2n}(z) \le \frac{1}{\prod_{k=1}^n(1-|w_k|)^{\gamma_1-\gamma_2-2}},$$

$\gamma_2 > -1$, $\gamma_1 > \gamma_2 + 2$, $w \in U^n$.

Лемма 2. *Пусть $H^{p,q,\alpha}_\beta$ $(0 < p, q < \infty,\ \alpha \in (-1,\infty),\ \beta \ge 0)$ – пространство всех функций $f \in H(U)$, для которых*

$$\|f\|^q_{H^{p,q,\alpha}_\beta} = \int_0^1 M_p^q(D^\beta f, r)(1-r)^\alpha dr < +\infty$$

(со стандартными модификациями для $q = \infty$, см. [18]). Тогда $D^\beta f \in H_0^{p,q,\alpha}$ в том и только том случае, если $\tilde{D}^\beta f \in H_0^{p,q,\alpha}$, где

$$\tilde{D}^\beta : H(U) \longmapsto H(U), \quad (\tilde{D}^\beta f)(z) = \sum_{k\ge 0}(k+1)^\beta a_k z^k, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad f(z) = \sum_{|k|\ge 0} a_k z^k. \quad (1.8)$$

Доказательство можно найти в [18].

Лемма 3. *Пусть $u, v > 0$, $\gamma - s = \frac{u-v}{n}$, $\gamma, s \in R$, $0 < p \le \infty$ и $D^{\max(\gamma,s)}f \in H^p$. Тогда*

$$\sup_{r\in I}\left(\int_{T^n}|D^\gamma f(r\xi)|^p dm_n(\xi)\right)^{1/p}(1-r)^u \asymp \sup_{r\in I}\left(\int_{T^n}|D^s f(r\xi)|^p dm_n(\xi)\right)^{1/p}(1-r)^v.$$

Доказательство. Сначала предположим, что $p \le 1$. Имеем

$$D^\gamma f(r\xi) = C(\gamma)\int_0^1\cdots\int_0^1 D^t D^\gamma f(rR\xi)(1-R)^{t-1}dR, \quad t > 0,$$

$$(1-r)^{up}M_p^p(D^\gamma f, r) \le \mathcal{J} =$$

$$= (1-r)^{up}\int_{T^n}\left(\int_{I^n}|D^\gamma D^t f_r(R\xi)|(1-R)^{t-1}dR_1\cdots dR_n\right)^p dm_n(\xi),$$

где $f_r(R\xi) = f(rR_1\xi_1, \ldots, rR_n\xi_n)$ $(r \in I,\ R_i \in I,\ i = 1, \ldots, n)$. Учитывая оценку (3.4) (см. §3), получим

$$\mathcal{J} \le (1-r)^{up} \int_{T^n} \int_{I^n} |D^\gamma D^t f_r(R\xi)|^p (1-R)^{tp-1} dR\, dm_n(\xi) \le$$

$$\le (1-r)^{up} \int_{T^n} \int_{I^n} |D^s(D^{-s} D^\gamma D^t f_r)(R\xi)|^p (1-R)^{tp-1} dR\, dm_n(\xi) \le$$

$$\le (1-r)^{up} \int_{I^n} \int_{T^n} |D^s f_r(R\xi)|^p (1-rR)^{(-\gamma-t+s)p} dR\, dm_n(\xi), \quad t - s + \gamma > 0,$$

где для доказательства последнего неравенства мы воспользовались оценками

$$M_p(D^l f, r) \le (1-r)^{-l} M_p(f, r), \quad l \ge 0,$$
$$M_p(D^l f, r) \approx M_p(\tilde{D}^l f, r), \quad l \in \mathbb{R}, \quad f \in H(U), \quad r \in I$$

по каждой переменной, см. [13], [18], [19] (голоморфная функция в U^n обладает тем же свойством по каждой переменной $z_1, \ldots, z_n$ в отдельности, см. [20], [24]). Следовательно

$$\mathcal{J} \le (1-r)^{up} \sup_{R \in I^n} M_p^p(D^s f, Rr)[(1-R_1 r)\cdots(1-R_n r)]^{vp/n} \times$$

$$\times \int_{I^n} [(1-R_1 r)\cdots(1-R_n r)]^{(-\gamma-t+s-v/n)p} (1-R)^{tp-1} dR \le S,$$

где

$$S = \sup_{R \in I^n} M_p^p(D^s f, Rr)[(1-R_1 r)\cdots(1-R_n r)]^{vp/n}.$$

Далее, $S \le$

$$\le \sup_{R/r \le \min R_i} M_p^p(D^s f, Rr) \prod_{k=1}^n (1-R_k r)^{\frac{vp}{n}} + \sup_{R/r > \min R_i} M_p^p(D^s f, Rr) \prod_{k=1}^n (1-R_k r)^{\frac{vp}{n}} \le$$

$$\le M_p^p[(D^s f, r)(1-r)^{vp} + 1] \le C \sup_{r \in I} M_p^p(D^s f, r)(1-r)^{vp}.$$

Для доказательства обратного неравенства проведём те же рассуждения в обратном порядке.

Пусть $p > 1$. Используя интегральное представление М. Джрбашяна (см. [3]), для $k = 1, \ldots, n$ имеем

$$(D^\gamma f)(|z|^2\xi) = C(\alpha) \int_{U^n} \frac{D^\gamma D^s D^{-s} f_{|z|}(w)(1-|w|)^\alpha}{\prod_{k=1}^n (1-\overline{w}_k |z| \xi_k)^{\alpha+2}} dm_{2n}(w), \quad z_k = |z|\xi_k$$

и

$$(D^\gamma f)(|z|^2\xi) = C(\alpha)\int_{U^n} D^s f_{|z|}(w) D^{-s} D^\gamma\left(\frac{1}{(1-\overline{w}z)^{\alpha+2}}\right)(1-|w|)^\alpha\, dm_{2n}(w).$$

Ясно, что $\left|(D^\gamma f)(|z|^2\xi|\widetilde{w}|)\right| \le$

$$\le \int_{U^n} |D^s f_{|z|}(w)| \sup_{\substack{|\widetilde{w}_i|<1,\\ i=1,\dots,n}} \left| D^{-s} D^\gamma \frac{1}{(1-|\widetilde{w}|\overline{w}z)^{\alpha+2}}\right| (1-|w|)^\alpha\, dm_{2n}(w).$$

Применяя соотношение

$$\sup_{|w|<1} |D^t g(|w|)| \approx \sup_{|w|<1}\left|\widetilde{D}^t g(|w|)\right|, \quad g\in H(U), \quad t\in\mathbb{R}$$

по каждой переменной $|\widetilde{w}_j|$ $(j=1,\dots,n)$, получим

$$\sup_{|\widetilde{w}|<1}\left| D^{-s} D^\gamma \frac{1}{(1-|\widetilde{w}|\overline{w}z)^{\alpha+2}}\right| \le \sup_{|\widetilde{w}|<1}\left|\widetilde{D}^{-s}\widetilde{D}^\gamma \widetilde{D}^{\alpha+1}\left(\frac{1}{1-|\widetilde{w}|\overline{w}z}\right)\right| \le$$

$$\le \left|\frac{1}{(1-|\widetilde{w}|\overline{w}z)^{\alpha-s+\gamma+2}}\right|.$$

Следовательно

$$\left|D^\gamma f_{|z|}(z)\right| \le \int_{U^n} \left|D^s f_{|z|}(w)\right| \left|\frac{1}{(1-\overline{w}z)^{\alpha-s+\gamma+2}}\right| (1-|w|)^\alpha\, dm_{2n}(w).$$

В силу (1.6) имеем

$$\left|D^\gamma f_{|z|}(z)\right|^p \le \int_{U^n} \frac{\left|D^s f_{|z|}(w)\right|^p (1-|w|)^{\alpha p - sp}}{|1-\overline{w}z|^{(\alpha-s+\gamma-\varepsilon)p+2}}\, dm_{2n}(w).$$

Поэтому, для достаточно большого α получаем

$$M_p^p(D^\gamma f, |z|)(1-|z|)^{up} \le \sup_{|w|\in I^n} M_p^p(D^s f, |z||w|)(1-|w||z|)^{vp/n} \times$$

$$\times (1-|z|)^{up}\int_{I^n} \frac{(1-|w|)^{\alpha p-\varepsilon p}(1-|w||z|)^{-vp/n}}{(1-|w||z|)^{(\alpha-s+\gamma-\varepsilon)+1}}\, d|w_1|\cdots d|w_n| \le$$

$$\le \sup_{|w|\in I^n} M_p^p(D^s f, |z||w|)(1-|w||z|)^{vp/n}.$$

Доказательство Леммы 3 завершается рассуждениями, аналогичными случаю $p\le 1$.

Замечание 2. Рассуждая как и выше можно доказать, что

$$M_p(D^\gamma f,r)(1-r)^u \approx M_p(D^s f,r)(1-r)^v, \quad \gamma - s = u - v \tag{1.9}$$

(для $n=1$ см. [14]), где

$$1-r=\prod_{k=1}^{n}(1-r_k), \quad r_k\in I, \quad p\in(0,+\infty), \quad u,v>0, \quad \gamma,s\in\mathbb{R}.$$

Следующая лемма содержит аналог формулы Литлвуда–Пэли.

Лемма 4. *Пусть $f,g\in H(U^n)$, $l>-1$, $\gamma>0$ $n\in\mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ – множество натуральных чисел. Тогда*

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{T^n} f(r\bar t)g(rt)\,dm_n(t)=\left(\frac{\Gamma(\gamma+l+2)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(l+1)}\right)^n\int_{T^n}\left(\int_{I^n} f_r(\widetilde\rho_1\xi)(1-\widetilde\rho_1)^l d\widetilde\rho_1\right)\times$$

$$\times\left(\int_{I^n}\left(D^{\gamma+l+1}g_r(\widetilde\rho_2\bar\xi)\right)(1-\widetilde\rho_2)^{\gamma-1}\widetilde\rho_2^{\,l+1}d\widetilde\rho_2\right)\,dm_n(\xi). \tag{1.10}$$

Доказательство, опирающееся на формулу Лиувиля, приведено в [23].

Доказательство Теоремы 1. Легко видеть, что

$$\|f_\rho\|^p_{L^{p,q}_{\alpha,\beta}}=\int_{T^n}\left[\int_0^1|D^\alpha f_\rho(z)|^q(1-|z|)^\beta d|z|\right]^{p/q}dm_n(\xi)=I_1+I_2,$$

где

$$I_1=\int_{T^n}\left[\int_0^\rho|D^\alpha f_\rho(z)|^q(1-|z|)^\beta d|z|\right]^{p/q}dm_n(\xi).$$

Оценим I_1 и I_2 отдельно. Для I_1 при $\beta>\alpha nq-1$ имеем

$$I_1\le\left(\int_{T^n}\sup_{r<\rho}|D^\alpha f_\rho(z)|^p(1-|z|)^{\alpha pn}dm_n(\xi)\right)\left(\int_0^1(1-|z|)^{\beta-\alpha nq}d|z|\right)^{p/q}$$

Используя Лемму 1, получим

$$I_1\le\int_{T^n}\sup_{r<1}|D^\alpha f_\rho(z)|^p(1-|z|)^{\alpha pn}dm_n(\xi)\le\|f_\rho\|^p_{H^p(U^n)}. \tag{1.11}$$

Для I_2 имеем

$$I_2\le\int_{T^n}\max_{0<|z|<1}|D^\alpha f_\rho(z)|^p\left(\int_\rho^1(1-|z|)^\beta d|z|\right)^{p/q}dm_n(\xi)\le$$

$$\leq (1-\rho)^{(1+\beta)\frac{p}{q}} \int_{T^n} |D^\alpha f(\rho\xi)|^p dm_n(\xi).$$

В силу Леммы 3

$$I_2 \leq \left(\sup_{\rho\in I} \left(\int_{T^n} |D^\gamma f(\rho\xi)|^p dm_n(\xi) \right)^{1/p} (1-\rho)^{(t+1)/q} \right)^p.$$

Используя неравенство

$$\sup_{\rho\in I} (G(\rho)(1-\rho)^\alpha) \leq \left(\int_0^1 (G(\rho))^q (1-\rho)^{\alpha q-1} d\rho \right)^{1/q}, \quad \alpha > 0, \quad q \in (0,\infty),$$

где $G(\rho)$ – положительная возрастающая функция, а также неравенство Минковского, получаем

$$I_2 \leq \left(\int_0^1 M_p^q(D^\gamma f, \rho)(1-\rho)^t d\rho \right)^{p/q} \leq \|f\|^p_{L^{\beta,q}_{\gamma,t}}.$$

Наконец

$$\|f_\rho\|^p_{L^{p,q}_{\alpha,\beta}} \leq \|f_\rho\|^p_{H^p(U^n)} + \|f\|^p_{L^{p,q}_{\gamma,t}}.$$

Обратное утверждение можно доказать приведенными выше рассуждениями в обратном порядке. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. **Для** $f \in H^p(U^n)$, $\beta > \alpha q - 1$, $t > \gamma q - 1$, $q \geq p$, $\frac{t-\beta}{q} = \gamma - \alpha$, $\alpha, \gamma > 0$, $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$ **следующие условия равносильны :**

1) $f \in F^{p,q}_{\alpha,\beta}(U^n)$, 2) $f \in F^{p,q}_{\gamma,t}(U^n)$.

Доказательство. аналогично доказательству Теоремы 1. Для простоты проведем его для $n = 2$. Имеем

$$I = \int_{T^2} \left(\int_0^1 \int_0^1 |D^\alpha f_{\rho_1,\rho_2}(z_1,z_2)|^q (1-|z_1|)^\beta (1-|z_2|)^\beta d|z_1|\, d|z_2| \right)^{p/q} dm_2(\xi),$$

где $f_{\rho_1,\rho_2}(z) = f(\rho_1 z_1, \rho_2 z_2)$, $z_i \in U$, $\rho_i \in I$ $(i = 1,2)$. Далее, $I = I_1^1 + I_1^2 + I_2^1 + I_2^2$, где слагаемые I_i^j $(i,j = 1,2)$ образуются разбиением внутреннего двоичного интеграла $\int_0^1 \int_0^1$ на $I_1^1 = \int_0^{\rho_1} \int_0^{\rho_2}$, $I_1^2 = \int_0^{\rho_1} \int_{\rho_2}^1$, $I_2^1 = \int_{\rho_1}^1 \int_0^{\rho_2}$ и $I_2^1 = \int_{\rho_1}^1 \int_{\rho_2}^1$. Воспользовавшись Леммой 1 и обозначением $z_1 = |z_1|\xi_1$, $z_2 = |z_2|\xi_2$, при $\beta - \alpha q > -1$ получим

$$I_1^1 = \int_{T^2} \left[\int_0^{\rho_1} \int_0^{\rho_2} |D^\alpha f_{\rho_1,\rho_2}(z_1,z_2)|^q (1-|z_1|)^\beta (1-|z_2|)^\beta d|z_1|\, d|z_2| \right]^{p/q} dm_2(\xi) \leq$$

$$\leq \int_{T^2}\left[\sup_{|z_{1,2}|<1} |D^\alpha f_{\rho_1,\rho_2}(z_1,z_2)|^p(1-|z_1|)^{\alpha p}(1-|z_2|)^{\alpha p}\right] dm_2(\xi) \leq \|f\|^p_{H^p(U^2)},$$

$$I_1^2 = \int_{T^2}\left[\int_0^{\rho_1}\int_{\rho_2}^1 |D^\alpha f_{\rho_1,\rho_2}(z_1,z_2)|^q(1-|z_1|)^\beta(1-|z_2|)^\beta d|z_1|\, d|z_2|\right]^{p/q} dm_2(\xi) \leq$$

$$\leq \int_{T^2}\left[\sup_{|z_{1,2}|<1} |D^\alpha f_{\rho_1,\rho_2}(z_1,z_2)|^p(1-|z_1|)^{\alpha p}(1-|z_2|)^{\alpha p}\right] dm_2(\xi) \leq \|f\|^p_{H^p(U^2)}.$$

Аналогично можно оценить I_2^1. Используя Лемму 4 и (1.9), получим

$$I_2^2 = \int_{T^2}\left[\int_{\rho_1}^1\int_{\rho_2}^1 |D^\alpha f_{\rho_1,\rho_2}(z_1,z_2)|^q(1-|z_1|)^\beta(1-|z_2|)^\beta d|z_1|\, d|z_2|\right]^{p/q} dm_2(\xi) \leq$$

$$\leq \int_{T^2}\left[\sup_{|z_{1,2}|<1} |D^\alpha f_{\rho_1,\rho_2}(z_1,z_2)|^p(1-|z_1|)^{\alpha p}(1-|z_2|)^{\alpha p}\right] dm_2(\xi)\times$$

$$\times\left(\int_{\rho_1}^1\int_{\rho_2}^1 (1-|z_1|)^{\beta-\alpha q} d|z|\right)^{p/q} \leq \|f_{\rho_1,\rho_2}\|^p_{H^p(U^2)}[(1-\rho_1)(1-\rho_2)]^{(\beta-\alpha q+1)\frac{p}{q}} =$$

$$= \left[M_p(f,\rho_1,\rho_2)[(1-\rho_1)(1-\rho_2)]^{(\beta-\alpha q+1)/q}\right]^p \leq \tag{1.12}$$

$$\leq \left[M_p(D^\alpha f,\rho_1,\rho_2)[(1-\rho_1)(1-\rho_2)]^{(\beta-\alpha q+1)/q+\alpha}\right]^p, \quad \alpha,\gamma\geq 0, \quad \beta, t > -1.$$

Наконец, в силу Леммы 4, (1.9), (1.12) и неравенства Минковского, имеем

$$I_2^2 \leq \left[M_p(D^\gamma f,\rho_1,\rho_2)[(1-\rho_1)(1-\rho_2)]^{\frac{t+1}{q}}\right]^p \leq$$

$$\leq \left[\int_{I^2} M_p^q(D^\gamma f,\rho)(1-\rho)^t d\rho\right]^{\frac{p}{q}} \leq \|f\|^p_{F^{p,q}_{\gamma,t}}.$$

§2. ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕЙЛОРА И ДРОБНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА ЛИЗОРКИНА–ТРИБЕЛЯ

Усиленная версия хорошо известного неравенства Харди (см. [1]) была установлена в [6] :

$$\sum_{k\geq 0}\frac{|a_k|}{k+1} \leq C\|f\|_{F^{1,\infty}_{1,1}(U^n)}. \tag{2.1}$$

Здесь $F^{1,\infty}_{1,1}(U^n)$ – "предельный" случай классов типа Лизоркина–Трибеля голоморфных в поликруге функций, определяемых условием

$$\|f\|^p_{F^{p,\infty}_{\alpha,\beta}} = \int_{T^n}\left(\sup_{r\in I^n}|D^\alpha f(r\xi)|(1-r)^\beta\right)^p dm_n(\xi) < +\infty,$$

где $p,\beta,\alpha\in(0,+\infty)$ – фиксированные числа.

Распространим оценку (2.1) в трех направлениях : на все значения $p\leq 1$, на более широкие классы $F^{p,\infty}_{\alpha,\gamma}$ и на случай поликруга U^n.

Теорема 3. *Пусть* $f \in F^{p,\infty}_{\alpha,\gamma}(U^n)$ *с* $0 < p < 1$. *Тогда имеет место оценка*

$$\sum_{k_1,\ldots,k_n \geq 0} \frac{|a_{k_1,\ldots,k_n}|}{(k+1)^{1/p-\alpha+\gamma}} \leq C\|f\|_{F^{p,\infty}_{\alpha,\gamma}(U^n)}. \tag{2.2}$$

Замечание 3. При $n = p = \alpha = \gamma = 1$ оценка (2.2) совпадает с (2.1).
Доказательство Теоремы 3 основано на следующей лемме из [22].

Лемма А. *Пусть* X *– локально выпуклое пространство,* μ *– положительная конечная борелева мера на* U *и* $p \in (0,1)$ *– фиксированное число. Если для любых* $\xi \in T$ *и* $r > 0$ *имеет место неравенство*

$$\mu\{z \in U : |z - \xi| < r\} \leq Cr^{1/p},$$

то

$$\int_U \|F\|_X d\mu(z) \leq C(p,X)\left(\int_T \|F_\xi\|_X^p dm(\xi)\right)^{1/p}, \tag{2.3}$$

где $F_z(\rho)$ *– голоморфная функция в* U, *а* $H^p(X)$ *– пространство Харди на квазинормированном пространстве* X.

Замечание 4. Идея привлечения теорем вложения векторнозначных пространств к изучению свойств пространств голоморфных функций типа Лизоркина–Трибеля впервые было использовано в [23]. Ниже неоднократно будем использовать этот подход.

Пусть X – класс всех измеримых на $[0,1]^n$ функций G, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{R \in I^n} G(R)(1-R)^\beta < \infty$. Легко видеть, что

$$D^\alpha f(\rho R\xi) = \tilde{f}(\rho_1 R_1 \xi_1, \ldots, \rho_n R_n \xi_n) = \tilde{f}_z(\rho) \in X,$$

а мера μ удовлетворяет условиям Леммы А (см. [19]). Следовательно

$$\int_T \int_I \left(\sup_{\rho \in I^n} |D^\alpha f(R\varphi_1\rho)|(1-\rho)^\beta\right)(1-R)^{1/p-2} dm(\varphi_1) d(R_1) \leq$$

$$\leq \left[\int_T \left(\sup_{r \in I^n} |D^\alpha \varphi_{z_1,\ldots,z_n}(r\xi)|(1-r)^\beta\right)^p dm(\xi_1)\right]^{1/p}, \tag{2.4}$$

где $r = (r_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$,

$$D^\alpha \varphi(r\xi) = D^\alpha f(r_1\xi_1, \rho_2\varphi_2 R_2, \rho_n\varphi_n R_n), \quad d\mu(z) = (1-|z|)^{1/p-2} dm_2(z).$$

Умножив обе части неравенства (2.4) на $(1-R_2)^{1/p-2}$, проинтегрировав этот результат по $z_2 = \varphi_2 R_2$ и применив неравенство Минковского и Лемму А, получим

$$\int_U \int_U \left(\sup_{\rho \in I^n} |D^\alpha f(\rho\varphi R)|(1-\rho)^\beta \right) (1-R_1)^{1/p-2}(1-R_2)^{1/p-2} dm_2(z_1)\, dm_2(z_2) \le$$

$$\le \left[\int_T \left(\int_U \left(\sup_{r \in I^n} |(D^\alpha \varphi_{z_2,\dots,z_n})(r\xi_1)|(1-r)^\beta \right) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times (1-R_2)^{1/p-2} dm_2(z_2) \right)^p p\, dm_2(\xi_1) \right]^{1/p} \le \tag{2.5}$$

$$\le \left[\int_T \int_T \left(\sup_{r \in I^n} |(D^\alpha \varphi_{z_2,\dots,z_n})(r_1\xi_1, r_2\xi_2)|(1-r)^\beta \right)^p dm(\xi_1) dm(\xi_2) \right]^{1/p}.$$

Повторяя эти рассуждения $(n-2)$-раз, получим

$$\int_{U^n} \left(\sup_{\rho \in I^n} |D^\alpha f(|z|\rho\varphi)|(1-\rho)^\beta \right) \prod_{k=1}^n (1-|z|)^{1/p-2} dm_{2n}(z) \le$$

$$\le \left[\int_{T^n} \left(\sup_{r \in I^n} |(D^\alpha f(r_1\xi_1,\dots,r_n\xi_n)|(1-r)^\beta \right)^p dm(\xi_1)\cdots dm(\xi_n) \right]^{1/p}. \tag{2.6}$$

Доказательство Теоремы 3. Согласно Лемме 5 имеем

$$|a_{k_1,\dots,k_n}| = \lim_{r\to 1} \left| \int_{T^n} f(r\xi)(r\overline{\xi})^k dm_n(\xi) \right| \le$$

$$\le \int_{T^n} \int_{I^n} \int_{I^n} |D^\alpha f(R\varphi r)|(1-r)^\gamma (1-R)^{\beta-1} |D^{\beta+1+\gamma} D^{-\alpha} (R\overline{\varphi} r)^k R\, dR\, dr\, dm_n(\varphi), \tag{2.7}$$

где $\gamma \ge 0$

$$(r\overline{\xi})^k = (r_1\overline{\xi}_1)^{k_1}\cdots(r_n\overline{\xi}_n)^{k_n}, \quad (1-R)^\gamma = \prod_{k=1}^n (1-R_k)^\gamma, \quad R_k, r_k \in I \quad (k=1,\dots,n).$$

Заметим, что при $r, R \in I^n$

$$|D^{\beta+1+\gamma} D^{-\alpha} (R\overline{\varphi} r)^k| \le (k+1)^{\beta+1+\gamma-\alpha}(Rr)^k, \quad \sum_{k_1=0}^\infty \cdots \sum_{k_n=0}^\infty R_1^{k_1}\cdots R_n^{k_n} = (1-R)^{-1}.$$

Следовательно, используя (2.6), из (2.7) при $\beta = 1/p$ получим

$$\sum_{k_1,\dots,k_n} \frac{|a_{k_1,\dots,k_n}|}{(k+1)^{1/p+\gamma-\alpha}} \le$$

$$\le \int_{T^n} \int_{I^n} \left(\sup_{r \in I^n} |D^\alpha f(R\varphi r)|(1-r)^\gamma \right) (1-R)^{1/p-2} dm_n(\xi)\, dR \le$$

$$\le \left[\int_{T^n} \left(\sup_{r \in I^n} |D^\alpha f(r_1\xi_1,\dots,r_n\xi_n)|(1-r)^\gamma \right)^p dm_n(\xi) \right]^{1/p}.$$

Доказательство Теоремы 3 завершено.

Теорема 4. *При* $0<\gamma<1$ *и* $\alpha>\beta+\frac{1-\gamma}{\gamma}$ *справедлива оценка*

$$\sum_{k_1=0}\cdots\sum_{k_n=0}\frac{|a_k|^\gamma}{(k+1)^t}\leq C\int_{T^n}\left(\sup_{r\in I^n}|D^\alpha f(r\xi)|(1-r)^\beta\right)^\gamma dm_n(\xi),$$

где $t\in(2-\gamma+(\beta-\alpha)\gamma,1)$.

Доказательство следует из (15) и (17). Действительно, рассуждая как при доказательстве Теоремы 3, получим

$$|a_{k_1,\dots,k_n}|^\gamma\leq\int_{U^n}|D^\alpha f(w)|^\gamma(1-|w|)^{\gamma(\alpha+1)-2}|w_1^{k_1}\cdots w_n^{k_n}|^\gamma dm_{2n}(w).$$

Учитывая неравенство

$$\sum_{k_1\geq0}\cdots\sum_{k_n\geq0}|w_1|^{k_1\gamma}\cdots|w_n|^{k_n\gamma}(k+1)^s\leq\frac{C(\gamma)}{(1-|w|)^{s+1}},\quad s>-1.$$

получим

$$\sum_{k_1\geq0}\cdots\sum_{k_n\geq0}\frac{|a_{k_1,\dots,k_n}|^\gamma}{((k_1+1)\cdots(k_n+1))^t}\leq C\int_{T^n}\left(\sup_{r\in I^n}|D^\alpha f(r\xi)|(1-r)^\beta\right)^\gamma\times$$

$$\times\sum_{k_1\geq0}\cdots\sum_{k_n\geq0}\int_{I^n}\frac{(1-|w|)^{\gamma(\alpha+1)-2-\beta\gamma}|w|^{k\gamma}}{[(k_1+1)\cdots(k_n+1)]^t}d|w|\leq C\|f\|^\gamma_{F^{\gamma,\infty}_{\alpha,\beta}}.$$

Теорема 4 доказана.

Замечание 5. Легко видеть, что при $\gamma=n=\alpha=\beta=1$ неравенство Теоремы 4 в точности совпадает с (2.1).

Следующая теорема была доказана в [3] (см. также [1], [2]).

Теорема C. *Пусть* $f\in A^p_\alpha(U^n)=F^{p,p}_{0,\alpha}(U^n)$ *и* $f(z)=\sum\limits_{|k|\geq0}a_kz^k$ $(k=k_1\dots k_n)$. *Тогда*

1°. $|a_{k_1,\dots,k_n}|=O\left(k^{\frac{2+\alpha}{p}-1}\right)$ *при* $0<p<1$ *и* $|a_{k_1,\dots,k_n}|=O\left(k^{\frac{1+\alpha}{p}}\right)$ *при* $1\leq p<\infty$.

2°. *Если* $0<p\leq1$ *и* $-1<\alpha<\infty$, *то*

$$\sum_{k_1,\dots,k_n\geq0}(k+1)^{p-\alpha-3}|a_{k_1,\dots,k_n}|^p\leq C(p,\alpha)\int_{U^n}|f(z)|^p(1-|z|^2)^\alpha dm_{2n}(z),\tag{2.8}$$

где $(k+1)=(k_1+1)\cdots(k_n+1)$.

Следующая теорема является обобщением Теоремы C.

Теорема 5. *Пусть* $f \in F^{p,q}_{0,\alpha}(U^n)$ *и* $f(z) = \sum\limits_{|k|\geq 0} a_k z^k$ $(k = k_1 \dots k_n)$. *Тогда*

$$1^o \qquad |a_{k_1,\dots,k_n}| = \begin{cases} O\left(k^{\frac{\alpha+1}{p}-\frac{1}{p}-1}\right) & \text{при} \quad 0 < p \leq 1, \quad 0 < q < \infty, \\ O\left(k^{\frac{\alpha+1}{q}}\right) & \text{при} \quad 1 < p, q < \infty, \\ O(1) & \text{при} \quad 1 < p < \infty, \quad q = \infty, \quad \alpha = 0, \\ O\left(k^{\frac{\alpha+1}{q}}\right) & \text{при} \quad 1 < p < \infty, \ . \ 0 < q \leq 1. \end{cases}$$

2^o

$$\sum_{k_1,\dots,k_n \geq 0} |a_{k_1,\dots,k_n}|^s (k+1)^{s-\alpha-3} \leq \|f\|^s_{F^{p,q}_{0,\gamma}}, \ 0 < p, q \leq s \leq 1, \ \gamma = \left(\frac{\alpha+2}{s} - \frac{1}{p}\right) q - 1,$$

$$\sum_{k_1,\dots,k_n \geq 0} |a_{k_1,\dots,k_n}|^q (k+1)^{q-\beta-3} \leq \|f\|^q_{F^{r,q}_{0,\beta}}, \quad 0 < q \leq (p, 1),$$

$$\sum_{k_1,\dots,k_n \geq 0} |a_{k_1,\dots,k_n}|^q (k+1)^{-\beta-2+q-\frac{q}{p}} \leq \|f\|^q_{F^{p,q}_{0,\beta}}, \quad 0 < p \leq q \leq 1.$$

Доказательство. Сначала докажем оценку 1°. В силу Теоремы E из §3 (см. также [23])

$$|a_{k_1,\dots,k_n}| \leq \left| \lim_{r \to 1} \int_{T^n} f(r\xi)(r\overline{\xi}_1)^{k_1} \cdots (r\overline{\xi}_n)^{k_n} \, dm_n(\xi) \right| \leq \|f\|_{F^{p,q}_{0,\alpha}} \|z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}\|_{(F^{p,q}_{0,\alpha})^*},$$

где $(F^{p,q}_{0,\alpha})^*$ – пространство, сопряжённое к $F^{p,q}_{0,\alpha}$. Снова применив Теорему E, получим

$$|a_{k_1,\dots,k_n}| = O\left(k^{\frac{\alpha+1}{q}+\frac{1}{p}-1}\right) \quad \text{при} \quad 0 < p < 1 < q < \infty, \quad \alpha \in (-1, \infty), \tag{2.9}$$

$$|a_{k_1,\dots,k_n}| = O\left(k^{\frac{\alpha+1}{q}+\frac{1}{p}-1}\right) \quad \text{при} \quad 0 < p, q \leq 1, \quad \alpha \in (-1, \infty). \tag{2.10}$$

При $1 \leq p, q < \infty$ имеем $|a_{k_1,\dots,k_n}| = O\left(k^{\frac{\alpha+1}{q}}\right)$, поскольку при $1/p + 1/p' = 1$, $1/q + 1/q' = 1$

$$\|z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}\|_{F^{p',q'}_{\alpha+1,\alpha}} \leq k^{\frac{\alpha+1}{q'}} \quad \text{и} \quad F^{p',q'}_{\alpha+1,\alpha} \subset (F^{p,q}_{0,\alpha})^*.$$

При $1 < p, q < \infty$ предыдущие оценки можно получить иным путем. Действительно

$$a_{k_1,\dots,k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} = C \int_{T^n} f(zt) e^{-ik_1t_1} \cdots e^{-ik_nt_n} dm_n(t),$$

$$\|f\|_X \leq \int_{T^n} \|g\|_X dm_n(t), \quad f(z) = \int_{T^n} g(zt) \, dm_n(t),$$

а поскольку X есть банахово пространство, то имеем

$$\|a_k z^k\|_{L^q(\mu)} \le \int_{T^n} \|f(zt)\|_{L^q(\mu)} dm_n(t), \quad z \in I^n, \quad q \in [1,\infty], \quad \mu(r) = (1-r)^\alpha dr.$$

Далее, при $p \in (1,\infty)$ и $q \in (0,\infty]$ имеем $\|f\|_{F^{1,q}_{0,\alpha}} \le \|f\|_{F^{p,q}_{0,\alpha}}$, следовательно $|a_k| k^{-\frac{1+\alpha}{q}} \le \|f\|_{F^{p,q}_{0,\alpha}}$. Отсюда следует, что $|a_k| = O\left(k^{\frac{1+\alpha}{q}}\right)$ при $1 < p,q < \infty$ и $|a_k| = O(1)$ при $q = \infty$, $1 < p < \infty$, $\alpha = 0$.

Последняя оценка в 1° следует из вложения

$$\int_{T^n} \left[\int_{I^n} |F(R\xi)|^q (1-R)^\alpha dR\right]^{\frac{1}{q}} dm_n(\xi) \le$$

$$\le \left[\int_{T^n} \left(\int_{I^n} |F(R\xi)|^q (1-R)^\alpha dR\right)^{p/q} dm_n(\xi)\right]^{\frac{1}{p}}$$

и соотношения $|a_{k_1,\dots,k_n}| = O\left(k^{\frac{\alpha+1}{q}}\right)$ $(f \in F^{1,q}_{0,\alpha},\ 0 < q \le 1)$. Оценку (2.10) можно получить следующим образом. Пусть $g \in F^{p,q}_{0,\alpha}(U^n)$ и $0 < p,q \le 1$. Функция G, определяемая формулой

$$G(r^2\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{T^n} g(rt) D^\gamma \left(\frac{1}{1-\bar{t}\xi r}\right) dm_n(t), \quad r > 1/2,$$

лежит в $A^1_\alpha = F^{1,1}_\alpha(U^n)$. Действительно, в силу (1.7) при достаточно большом $\beta > 0$

$$\int_{T^n} |G_{R\rho}(r^2\xi)| dm_n(\xi) \le$$

$$\le \int_{T^n}\int_{U^n} |g(w)|(1-|w|)^{\beta-1} \left| D^\beta D^\gamma \frac{1}{1-\overline{w}\xi R\rho}\right| dm_{2n}(w)\, dm_n(\xi).$$

В силу Леммы 3 имеем

$$\|D^\beta D^\gamma \tilde{g}_{\overline{w}\rho}\|_{H^1} \le \left\|\tilde{D}^{\beta+\gamma}\tilde{g}_{\overline{w}\rho}\right\|_{H^1} \le \|D^{\beta+\gamma}\tilde{g}_{\overline{w}\rho}\|_{H^1} \le \frac{1}{(1-\rho|w|)^{\beta+\gamma}}.$$

Поэтому, в силу (3.3) из §3, при $\gamma = \alpha + 2 - 1/p - (\alpha+1)/q$

$$\int_{I^n}\int_{T^n} |G(\rho\xi)| dm_n(\xi)(1-\rho)^\alpha d\rho \le$$

$$\le \int_{I^n}\int_{U^n} \frac{|g(w)|(1-|w|)^{\beta-1}(1-\rho)^\alpha}{(1-\rho|w|)^{\beta+\gamma}} d\rho dm_{2n}(w) \le \|g\|_{F^{1,1}_{0,-\gamma+\alpha}} \le \|g\|_{F^{p,q}_{0,\alpha}}.$$

Таким образом, если $G(z) = \sum\limits_{|k|\geq 0} c_k z^k$, то по Теореме C $|c_k| = O\left(k^{\alpha+1}\right)$, и по определению функции G имеем $|c_k| \approx k^{\gamma}|a_k|$. Отсюда следует, что

$$|a_k| = O\left(k^{\frac{1+\alpha}{q}-1+\frac{1}{p}}\right), \quad \text{где} \quad g(z) = \sum_{|k|\geq 0} a_k z^k, \quad g \in F^{p,q}_{0,\alpha}, \quad p,q \leq 1, \quad \alpha > -1. \tag{2.11}$$

Перейдя к оценкам в 2° заметим, что в силу (3.3) при $\alpha > -1$ и $0 < p,q \leq s < \infty$,

$$\left[\int_{U^n} |f(z)|^s (1-|z|)^\alpha dm_{2n}(z)\right]^{1/s} \leq$$

$$\leq \left[\int_{T^n} \left(\int_{I^n} |f(z)|^q (1-|z|)^\gamma d|z|\right)^{p/q} dm_n(t)\right]^{1/p}, \tag{2.12}$$

где $z = |z|t$ и $\gamma = \left(\frac{\alpha+2}{s} - \frac{1}{p}\right) q - 1$. Поэтому из (2.8) и (2.12) получаем

$$\sum_{|k|\geq 0} (k+1)^{s-\alpha-3} |a_{k_1,\ldots,k_n}|^s \leq \|f\|^s_{F^{p,q}_{0,\gamma}}, \quad 0 < p,q \leq s \leq 1. \tag{2.13}$$

Легко видеть, что при $q = p = s \leq 1$ (2.13) совпадает с (2.8).

В случае $0 < q \leq (p,1)$ неравенство (2.8) можно обобщить следующим образом (см. [1] при $n = 1$ и [24] при $n > 1$) :

$$\sum_{k_1,\ldots,k_n\geq 0} (k+1)^{p-2}|a_k|^p \leq C(p)\|f\|^p_{H^p}, \quad f = \sum_{|k|\geq 0} a_k z^k \in H^p, \quad 0 < p \leq 1. \tag{2.14}$$

Пусть $0 < q \leq (p,1)$. В силу (2.14) имеем

$$\|f\|^q_{F^{p,q}_{0,\beta}} \geq \int_{I^n} \|f_r(z)\|^q_{H^q(U^n)} (1-r)^\beta dr \geq$$

$$\geq \int_{I^n} \sum_{|k|\geq 0} (k+1)^{q-2} r^{qk} |a_k|^q (1-r)^\beta dr \geq \sum_{|k|\geq 0} (k+1)^{q-3-\beta} |a_k|^q.$$

При $0 < p \leq q \leq 1$ и $\delta = q\left(\frac{\beta+1}{q} + \frac{1}{p}\right) - 2$ из (2.12) получим

$$\|f\|^q_{F^{p,q}_{0,\beta}} \geq \|f\|^q_{F^{q,q}_{0,\delta}} \geq \int_{I^n} \|f_r(z)\|^q_{H^q} (1-r)^\delta dr \geq \sum_{|k|\geq 0} (k+1)^{-\beta-q/p-2+q} |a_k|^q.$$

Доказательство Теоремы 5 завершено.

Замечание 6. Оценки в Теореме 5 порождают соответствующие оценки Теоремы C. Подобные оценки могут использоваться для коэффициентов Тейлора в пространствах $F^{p,q}_{\gamma,\alpha}$. Оценки для коэффициентов Тейлора функций из классов $F^{p,q}_{0,\beta}$ легко переносятся на классы $F^{p,q}_{\alpha,\beta}$.

Следующая теорема хорошо известна (см., например, [1]) и содержит оценки для оператора дробного дифференцирования D^α в пространствах A^p_α и H^p в единичном круге U.

Теорема D. *Пусть* $0 < p,q \le \infty$, $t \in \mathbb{R}$ *и* $\alpha,\beta \in (-1,+\infty)$. *Если* $p \le q$ *и* $\frac{2+\alpha}{p} + t \le \frac{2+\beta}{q}$, *или* $p > q$ *и* $1+\beta > (1+\alpha)\frac{p}{q} + t$, *то* $\|\tilde{D}^t f\|_{A^q_\beta} \le \|f\|_{A^p_\alpha}$.

Распространим этот результат в двух направлениях : на полидиск U^n и функции из пространств типа Лизоркина–Трибеля.

Теорема 6. 1°. *Пусть* $\alpha \ge 1$, $1 < p < \infty$ *и* $\gamma \in \left(-\frac{1}{p'} + \frac{1}{p}\right)$, *где* $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. *Тогда*

$$\int_{T^n} \left[\int_{I^n} |f(r\xi)|^p (1-r)^\gamma r^{\alpha p} dr\right]^{q/p} dm_n(\xi) \le$$

$$\le \int_{T^n} \left[\int_{I^n} |D^\alpha f(r\xi)|^p (1-r)^{\gamma+\alpha p} dr\right]^{q/p} dm_n(\xi).$$

2°. *Пусть* $\alpha \ge 1$, $1 < p < \infty$ *и* $\gamma \in \left(\frac{n}{p'} - 1, \frac{n}{p'} + n - 1\right)$, *где* $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. *Тогда*

$$\int_{T^n} \left[\int_I |f(r\xi)|^p (1-r)^{\alpha p n} dr\right]^{q/p} dm_n(\xi) \le$$

$$\le \int_{T^n} \left[\int_{I^n} |D^\alpha f(r\xi)|^p (1-r)^{\alpha p + 1/p'} \left(1 - \max_k r_k\right)^{\gamma - n/p' - n + 1} dr\right]^{q/p} dm_n(\xi).$$

Доказательство. 1°. Полагая

$$|f(r_1\xi_1, \dots, r_n\xi_n)| = \frac{r^{-n\alpha}}{\Gamma^n(\alpha)} \left|\int_0^{r_1} \cdots \int_0^{r_n} (r-\rho)^{\alpha-1} D^\alpha f(\rho\xi)\, d\rho\right|, \quad \alpha \ge 1, \quad p > 1,$$

при $\alpha \ge 1$, $1 < p < \infty$ и $\gamma \in \left(-\frac{1}{p'} + \frac{1}{p}\right)$, получим

$$S = \int_{I^n} |f(r_1\xi_1, \dots, r_n\xi_n)|^p (r_1, \dots, r_n)^{\alpha p} (1-r)^\gamma dr_1 \cdots dr_n \le$$

$$\le C(\alpha) \int_{I^n} \left[\int_0^{r_1} \cdots \int_0^{r_n} (r-\rho)^{\alpha-1} D^\alpha f(\rho\xi) d\rho\right]^p (1-r)^\gamma dr_1 \cdots dr_n.$$

Следовательно
$$\int_0^{r_1}\cdots\int_0^{r_n}(r-\rho)^{\alpha-1}|D^\alpha f(\rho\xi)|d\rho\le$$
$$\le\int_0^{r_1}\cdots\int_0^{r_n}(1-\rho)^\alpha|D^\alpha f(\rho\xi)|\frac{d\rho}{1-\rho r}\le\int_{I^n}(1-\rho)^\alpha|D^\alpha f(\rho\xi)|\frac{d\rho}{1-\rho r}.$$

Используя соображения двойственности и неравенство Гёльдера (полагая $\Psi\in L^{p'}(I^n,d\mu_\gamma)$ и $d\mu_\gamma(r)=(1-r)^\gamma dr$), получим

$$S^{1/p}\le\left[\int_{I^n}\left(\int_{I^n}(1-\rho)^\alpha|D^\alpha f(\rho\xi)|\frac{d\rho}{1-\rho r}\right)^p[(1-r_1)\cdots(1-r_n)]^\gamma dr_1\cdots dr_n\right]^{1/p}\le$$
$$\le\int_{I^n}\int_{I^n}(1-\rho)^{\alpha p}|D^\alpha f(\rho\xi)|(1-r)^\gamma\Psi(r)\frac{d\rho dr}{1-\rho r}\le$$
$$\le\left[\int_{I^n}\int_{I^n}(1-\rho)^{\alpha p}|D^\alpha f(\rho\xi)|^p(1-r)^\gamma\left(\frac{1-r}{1-\rho}\right)^{-\frac{1}{p'}}\frac{drd\rho}{1-\rho r}\right]^{1/p'}\times$$
$$\times\left[\int_{I^n}\int_{I^n}(1-r)^\gamma[\Psi(r)]^{p'}\left(\frac{1-\rho}{1-r}\right)^{-\frac{1}{p}}\frac{drd\rho}{1-\rho r}\right]^{1/p'}\le$$
$$\le\left[\int_{I^n}(1-\rho)^{\gamma+\alpha p}|D^\alpha f(\rho\xi)|^p d\rho\right]^{1/p}$$

Теперь остаётся возвести обе части полученного неравенства в степень q и проинтегрировать по T^n, в результате приходим к неравенству 1°.

2°. Используя предыдущие рассуждения, при $\alpha\ge 1$, $1<p<\infty$ и $\gamma\in\left(\frac{n}{p'}-1,\frac{n}{p'}+n-1\right)$ имеем

$$S^{q/p}\le\left[\int_I\left(\int_{I^n}(1-\rho)^\alpha|D^\alpha f(\rho\xi)|\frac{d\rho}{1-\rho r}\right)^p(1-r)^\gamma dr\right]^{q/p}\le$$
$$\le\left[\int\limits_{I^n}\int\limits_{I^n}(1-\rho)^{\alpha p}|D^\alpha f(\rho\xi)|^p(1-r)^\gamma\prod_{k=1}^n(1-\rho_k r)^{-1}\frac{(1-r)^{-n/p'}}{\prod\limits_{k=1}^n(1-\rho_k)^{-1/p'}}dr\,d\rho\right]^{q/p}\times$$
$$\times\left[\int_I\int_{I^n}[\Psi(r)]^{p'}(1-r)^\gamma\left(\frac{\prod_{k=1}^n(1-\rho_k)^{-1/p}}{(1-r)^{-n/p}}\right)\prod_{k=1}^n(1-\rho_k r)^{-1}drd\rho\right]^{q/p}\le$$
$$\le\left[\int_{I^n}|D^\alpha f(\rho\xi)|^p(1-\rho)^{\alpha p+1/p'}\left(1-\max_k\rho_k\right)^{\gamma-n/p'-n+1}d\rho\right]^{q/p}$$

Проинтегрировав неравенство по T^n, завершаем доказательство Теоремы 6.

Замечание 7. При $n = 1$ и $p = q$ утверждение Теоремы 6 совпадает с Теоремой D. Легко проверить, что приведенные выше результаты справедливы для голоморфных в U^n функций F, удовлетворяющих условию

$$\left\| \int_{I^n} |F(R\xi)|^q (1-R)^\alpha dR \right\|_{L^\infty(T^n, m_n(t))} < \infty.$$

Хорошо известно (см., например, [12]), что при $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ свертка

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy$$

принадлежит $L^1(\mathbb{R}^n)$. При некоторых значениях p, q, s, n это свойство распространяется на классы $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ и $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ что означает, что эти пространства являются сверточными алгебрами (см. [11]).

Теорема 7. *При $\gamma > 0$ и $p \in [1, \infty)$ класс $F^{p,1}_{\gamma,\gamma-1}$ является сверточной алгеброй.*

Доказательство. По Лемме 3 (3°) имеем

$$h\left(R_1 r_1^2 \xi_1, \ldots, R_n r_n^2 \xi_n\right) = |h(r^2\xi)| = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \left| \int_{T^n} g(\xi\overline{\varphi} r) f_\varphi(rR)\, dm_n(\varphi) \right|, \quad (2.15)$$

где $\xi_i \in T$, $r_i, R_i \in I = (0,1)$, $(i = 1, \ldots, n)$, и обозначив $w = |w|t$

$$\left|D^\gamma h_R(r^2\xi)\right| \le C \left(\int_{T^n} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left|D^\gamma g_\xi(|w|^2 t)\right| (1-|w|)^{\gamma-1} \left|D^\gamma f_R(\overline{t})\right| \right) d|w|\, dm(t).$$

Вычисляя предел в (2.15) при $r \to 1$, умножая обе части на $(1-R)^{\gamma-1}$ и интегрируя по $R \in I^n$, получим

$$\int_{I^n} |D^\gamma h(R\xi)| (1-R)^{\gamma-1} dR_1 \cdots dR_n \le$$

$$\le \int_{I^n} \int_{T^n} \int_{I^n} |D^\gamma g_\xi(|w|^2 t)(1-|w|)^{\gamma-1} |D^\gamma f_R(\overline{t})| d|w| dm_n(t) (1-R)^{\gamma-1} dR_1 \cdots dR_n.$$

Применяя неравенство Гёльдера и теорему Фубини, получим

$$\|h\|^p_{F^{p,1}_{\gamma,\gamma-1}} \le \int_{T^n} \left[\int_{T^n} \left(\int_{I^n} |D^\gamma g_\xi(|w|t)| (1-|w|)^{\gamma-1} d|w| \right) * \right.$$

$$\left. * \left(\int_{I^n} \left|D^\gamma f(R\overline{t})\right| (1-R)^{\gamma-1} dR \right) dm_n(t) \right]^p dm_n(\xi) \le$$

$$\le \int_{T^n} \left(\int_{I^n} |D^\gamma g(|w|t)| (1-|w|)^{\gamma-1} d|w| \right)^p * \left(\int_{I^n} |D^\gamma f(Rt)| (1-R)^{\gamma-1} dR \right)^p dm_n(t).$$

Теорема 7 доказана.

Замечание 8. Результаты Теоремы 7 справедливы и при $n = 1$. В §3 применим иной подход к получению интегральных неравенств такого же типа в U^n.

§3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА ЛИЗОРКИНА-ТРИБЕЛЯ

Начнем с двух результатов, ранее использованных в §2. Рассмотрим следующие банаховы пространства голоморфных функций в поликруге :

$$S^{p,q}_{\alpha,l}(U^n) = \left\{ f : \|f\|_{S^{p,q}_{\alpha,l}(U^n)} = \sup_{z\in U^n} |D^{\beta+1} D^{-\alpha} g(z)|(1-|z|)^{\beta+2-\frac{l+1}{q}-\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

где $0 < p, q < \infty$, $l \in (-1,\infty)$ и $\beta > \frac{l+1}{q} + \frac{1}{p}$ – произвольные числа, и

$$F^{p',\infty}_{\alpha,l}(U^n) = \left\{ g : \left[\int_{T^n} \left(\sup_{r\in I^n} |D^{l+1} D^{-\alpha} D^1_l g(r\xi)|(1-r)^{l+1} \right)^{p'} dm_n(\xi) \right]^{1/p'} < \infty \right\},$$

где $l \in (-1,\infty)$, $\alpha \geq 0$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ и

$$(D^1_l f)(z) = \sum_{|k|\geq 0} (k+l+1) a_k z^k, \quad f(z) = \sum_{|k|\geq 0} a_k z^k.$$

Теорема Е (см. [23]). 1°. *Пусть Φ – непрерывный линейный функционал в $F^{p',\infty}_{\alpha,l}(U^n)$ $(0 < p < 1,\ 0 < q < \infty)$ и*

$$g(z) = \Phi(l_z(w)), \quad \text{где} \quad l_z(w) = \prod_{k=1}^{n} (1 - z_k w_k)^{-1}, \quad z \in U^n. \tag{3.1}$$

Тогда $g(z) \in S^{p,q}_{\alpha,l}(U^n)$ и функционал Φ можно представить в виде

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{T^n} f(\rho\xi) g(\rho\bar{\xi})\, dm_n(\xi). \tag{3.2}$$

Обратно, любая функция $g \in S^{p,q}_{\alpha,l}(U^n)$ по формуле (3.1) порождает непрерывный линейный функционал на $F^{p,q}_{\alpha,l}(U^n)$ и

$$C_1(l,p,q,a)\|g\|_{S^{p,q}_{\alpha,l}} \leq \|\Phi\| \leq C_2(l,p,q,a)\|g\|_{S^{p,q}_{\alpha,l}}.$$

2°. *Пусть Φ – непрерывный линейный функционал в $F^{p,1}_{\alpha,l}(U^n)$ $(1 < p < \infty$, $-1 < l < \infty)$, и пусть $g(z)$ определена по формуле (3.1). Тогда $g(z) \in F^{p',\infty}_{\alpha,l}(U^n)$ $(1/p + 1/p' = 1)$, и функционал Φ допускает представление (3.2). Обратно, любая* *функция $g \in F^{p',\infty}_{\alpha,l}(U^n)$ по формуле (3.1) порождает непрерывный линейный функционал на $F^{p,q}_{\alpha,l}(U^n)$ и*

$$C_1(l,p,q,\alpha)\|g\|_{F^{p',q}_{\alpha,l}} \le \|\Phi\| \le C_2(l,p,q,\alpha)\|g\|_{F^{p',q}_{\alpha,l}}.$$

Замечание 9. При $p = q \le 1$ из Теоремы E следует описание сопряженного пространства $(A^p_\alpha(U^n))^*$ (см. [3]). Отметим, что при $l = 0$, $n = 1$ утверждение (2°) Теоремы E можно найти в [6] (см. [6], Замечание к Теореме 2.6).

Следующий результат это теорема вложения, которая использовалась в §2.

Предложение 1. *(см. [7], [21]) 1°. Пусть $f \in F^{p,q}_{0,\alpha}(U^n)$, где $\alpha > -1$ и $\max(p,q) \le s < \infty$. Тогда*

$$\left(\int_{U^n} |f(w)|^s (1-|w|)^{s\left(\frac{\alpha+1}{q}+\frac{1}{p}\right)-2} dm_{2n}(w)\right)^{1/s} \le C\|f\|_{F^{p,q}_{0,\alpha}}. \tag{3.3}$$

2°. *Пусть $f \in F^{p,p}_{0,pt-1}(U^n)$, где $0 < p \le 1$ и $t > 0$. Тогда*

$$\int_{T^n}\left(\int_{I^n} |f(w)|(1-|w|)^{t-1} d|w|\right)^p dm_{2n}(\xi) \le \|f\|_{F^{p,p}_{0,pt-1}}. \tag{3.4}$$

В заключение приведём еше одну теорему о представлении функционалов в голоморфных классах типа Лизоркина–Трибеля в поликруге, которая дополняет результаты работ [6] и [23]. Включение $HF^{\infty,1}_s \subset (HF^{1,\infty}_s)^*$ было установлено в [6] для голоморфных в шаре $B^n \in \mathbf{C}^n$ функций из классов типа Лизоркина–Трибеля (определение классов $HF^{p,q}_s$ см. [6]). Опираясь на результаты §2, можно получить описание класса $S_{\alpha,\beta,p,l}(U^n)$ голоморфных функций такого, что $S_{\alpha,\beta,p,l}(U^n) \subset (F^{p,\infty}_{\alpha,\beta}(U^n))^*$ при $0 < p < 1$.

Теорема 8. *Любая функция g из голоморфного класса*

$$S_{\alpha,\beta,p,l}(U^n) = \left\{ g : \sup_{w\in U^n} \|D^{-\alpha}D^{\beta+2+l}g_w(r)\|_{L^1(I^n)}(1-|w|)^{l+2-1/p} < \infty \right\},$$

где $l > \frac{1}{p} - 2$, порождает непрерывный линейный функционал, определенный на $F^{p,\infty}_{\alpha,\beta}(U^n)$ по формуле

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{T^n} f(\rho\xi)g(\rho\bar{\xi})\, dm_n(\xi).$$

При этом, $\|\Phi\| \le C\|g\|_{S_{\alpha,\beta,p,l}}$.

Доказательство следует из неравенства (2.6), поскольку справедливы следующие оценки (см. доказательство Теоремы 3) :

$$|\Phi(f)| \leq \left| \lim_{\rho \to 1-0} \int_{T^n} D^\alpha f(\rho\xi) D^{-\alpha} g(\rho\bar{\xi})\, dm_n(\xi) \right| \leq$$

$$\leq \int_{T^n} \int_{I^n} \int_{I^n} |D^\alpha f(Rr\varphi)|\, (1-r)^\beta (1-R)^l \left| D^{-\alpha} D^{\beta+2+l} g(Rr\overline{\varphi}) \right| dR\, dr\, dm_n(\varphi) \leq$$

$$\leq \left[\int_{T^n} \int_{I^n} \left(\sup_{r \in I^n} |D^\alpha f(R\overline{\varphi} r)|\, (1-R)^{1/p-2} \right) dR\, dm_n(\varphi) \right] \times$$

$$\times \sup_{w = R\varphi} \left(\int_{I^n} \left| D^{-\alpha} D^{\beta+2+l} g(Rr\overline{\varphi}) \right| dr \right) (1-R)^{l+2-1/p} \leq \|f\|_{F^{p,\infty}_{\alpha,\beta}} \|g\|_{S_{\alpha,\beta,p,l}}.$$

Теорема 8 доказана.

Abstract. The paper considers mixed-norm similarities of some generalizations of Lizorkin–Triebel spaces. In the first section, an investigation of the fractional integration operator leads to a characterization of the spaces in question. In the second section some estimates for the Taylor coefficients are derived. The third section describes all bounded linear functionals.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. В. Шведенко, "Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре", Итоги науки и техники, Сер. мат. ан., ВИНИТИ, том 23, стр. 3 - 124, 1986.
2. H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, Theory of Bergman Spaces, Springer-Verlag, Grad. Texts, 2000.
3. A. E. Djrbashian, F. A. Shamoyan. Topics in the Theory of A^p_α Spaces, Teubner Texte zur Math., vol. 105, 1988.
4. J. M. Ortega, J. Fabrega, "Mixed-norm spaces and interpolation", Studia Math., vol. 109, pp. 233 - 254, 1994.
5. J. M. Ortega, J. Fabrega, "Holomorphic Triebel–Lizorkin spaces", J. Func. An., vol. 151, pp. 177 - 212, 1977.
6. J. M. Ortega, J. Fabrega, "Hardy inequality and embeddings in holomorphic Triebel–Lizorkin spaces", Illin. J. Math., vol. 43, no. 4, pp. 733 - 751, 1999.
7. Р. Ф. Шамоян, "Непрерывные функционалы и мультипликаторы степенных рядов одного класса голоморфных в поликруге функций", Изв. вузов, Математика, том 7, стр. 67 - 69, 2000.
8. Р. Ф. Шамоян, "О представлении линейных непрерывных функционалов в пространствах аналитических функций типа Харди–Соболева в поликруге", Укр. мат. ж., 2002 (в печати).
9. И. Е. Вербицкий, "Теоремы вложения для пространств аналитических функций со смешанными нормами", Инст. геофизики, Кишинев, 1987 (препринт).

10. В. С. Гулиев, П. И. Лизоркин, "Классы голоморфных и гармонических функций в поликруге и их граничные значения", Труды мат. инст. РАН, том 204, стр. 137 – 159, 1993.
11. Р. Ф. Шамоян, "Мультипликаторы степенных рядов, операторы Теплица и вложения пространств", Изв. НАН Армении. Математика, том 34, № 4, 1999.
12. H. Triebel, Theory of Functional Spaces, Acad. Press, New York, 1986.
13. C. Fefferman, E. Stein, "H^p spaces of several variables", Acta Math., vol. 129, no. 3 – 4, pp. 137 – 173, 1972.
14. М. И. Гварадзе, "Множители одного класса аналитических функций, определённых на полидиске", Труды Тбил. мат. инст., том 65, стр. 15 – 21, 1980.
15. M. Jevtic, M. Pavlovic, "Coefficient multipliers on spaces of analytic functions", Acta Sci. Math., vol. 64, pp. 531 – 545, 1998.
16. F. Beatrous, "Estimates for derivatives of holomorphic functions in pseudoconvex domains", Math. Z., vol. 191, pp. 91 – 116, 1986.
17. В. В. Пеллер, С. В. Хрущев, "Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы", Успехи мат. наук, том 37, № 1, стр. 53 – 124, 1982.
18. K. M. Dyakonov, "Besov spaces and outer functions", Mich. Math. J., vol. 45, pp. 143 – 157, 1998.
19. S. M. Buckley, P. Koskela, D. Vucotic, "Fractional integration, differentiation and weighted Bergman spaces", Proc. Camb. Ph. Soc., no. 2, pp. 377 – 385, 1999.
20. P. L. Duren, Theory of H^p Spaces, Ac. Press., New York, 1970.
21. K. Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Marsel Dekker, New-York, 1990.
22. Р. Ф. Шамоян, "О мультипликаторах из пространств типа A^p_α в пространства Харди в поликруге", Укр. мат. ж., том 52, № 10, стр. 1405 – 1415, 2000.
23. A. B. Alexandrov, Essays on Non-locally Convex Hardy Classes, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 1981.
24. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, Мир, Москва, 1965.
25. W. Rudin, Function Theory in Polydisc, Benj., New-York, 1969.

Поступила 21 декабря 2001