ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ УОЛША И ПЕРЕСТАВЛЕННОЙ СИСТЕМЕ ХААРА

Г. А. Карагулян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 36, № 5, 2001

В статье рассматриваются ряды Фурье-Уолша функций из класса $L^1(0, 1)$ и устанавливаются оценки для их частичных сумм. Аналогичные оценки доказаны для переставленной системы Хаара.

Пусть $r_n(x) = \text{sign} \sin 2^{n+1}\pi x$, $x \in [0, 1]$ есть n -я функция Радемахера. n -ую функцию системы Уолша опишем с помощью двоичного представления n :

$$n = \sum_{i=0}^k \varepsilon_i 2^i, \quad k = k(n), \quad (1)$$

где $\varepsilon_k = 1$ и ε_i равны 0 или 1 при $i = 0, 1, \dots, k-1$. Очевидно, что $2^k \leq n < 2^{k+1}$.

Положим

$$W_n(x) = \prod_{i=0}^k (r_i(x))^{\varepsilon_i} = r_k(x) \prod_{i=0}^{k-1} (r_i(x))^{\varepsilon_i}.$$

Для каждой функции $f \in L[0, 1]$ обозначим через $S_n(x, f)$ частичные суммы ее ряда Фурье-Уолша. Известно, что

$$S_n(x, f) = \int_0^1 f(t) D_n(t \oplus x) dt, \quad (2)$$

где $D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} W_k(x)$ – ядро Дирихле. Напомним, что при $x, y \in [0, 1]$ сумма $x \oplus y$ определяется следующим образом: пусть $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k 2^{-k}$ и $y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k 2^{-k}$ – двоичные разложения x и y . Тогда $x \oplus y = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z_k$, где

$$z_k = \begin{cases} 0, & \text{если } x_k + y_k = 0 \text{ или } 2, \\ 1, & \text{если } x_k + y_k = 1. \end{cases}$$

Интервалы вида $\Delta_i^k = [i/2^k, (i+1)/2^k)$, где $1 \leq i \leq 2^k - 1$, $k = 0, 1, \dots$ называются двоичными. Отметим, что $\Delta_0^0 = [0, 1)$. Число k называется рангом интервала Δ_i^k . Каждый двоичный интервал I имеет единственный смежный двоичный интервал

того же ранга, который обозначим через $\bar{I}$, где $I \cup \bar{I}$ – двоичный интервал и $\text{rank}(I \cup \bar{I}) = \text{rank}(I) - 1$. Для произвольной функции $f \in L[0, 1]$ положим

$$M f(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f| dt,$$

где I – двоичный интервал.

Известно, что операторы $S_n(x, f)$, определённые по (2), имеют слабый тип (1, 1) (см. Пэли [1]), и сильный тип (p, p) при $1 < p < \infty$ (см. Ватари [2]), т.е.

$$|\{x \in [0, 1] : |S_n(x, f)| > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_L, \quad (3)$$

$$\|S_n(x, f)\|_p \leq c_p \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

С другой стороны, существует функция $f \in L[0, 1]$, ряд Фурье-Уолша которой расходится в $L[0, 1]$, т.е. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|S_n(x, f)\|_L = \infty$.

Теорема 1. Для любой функции $f \in L[0, 1]$ имеют место экспоненциальные оценки

$$\int_0^1 \exp\left(c_1 \frac{|S_n(x, f)|}{M f(x)}\right) dx < c_2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

$$\int_0^1 \exp\left(c_1 \frac{|S_n(x, f) - f(x)|}{M f(x)}\right) dx \rightarrow 1, \quad (5)$$

где c_1 и c_2 – абсолютные постоянные.

Аналогичный результат устанавливается для рядов Фурье по переставленной системе Хаара. Для этого нам понадобятся некоторые обозначения (см., например, [6]). Система Хаара – это система функций $\{\chi_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$, в которой $\chi_1(x) \equiv 1$, а функция $\chi_m(x)$ при $2^k < m \leq 2^{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$, определяется следующим образом :

$$\chi_m(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при } x \in \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right), \\ 2^{-k/2} & \text{при } x \in \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right), \\ 0 & \text{при } x \in [0, 1] \setminus \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right). \end{cases}$$

Для заданной функции $f \in L^1(0, 1)$ рассмотрим её ряд Фурье-Хаара $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ и оператор

$$T_\varepsilon(x, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \chi_n(x),$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ – последовательность чисел $+1$ и -1 . Обозначим

$$S_N^\varepsilon(x, f) = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n a_n \chi_n(x).$$

Известно (см. [6], стр. 88), что операторы $T_\varepsilon(x, f)$ и $S_N(x, f)$ имеют слабый тип $(1, 1)$ и характеризуют ряды по переставленной системе Хаара.

Теорема 2. Для любой функции $f \in L[0, 1]$ и любой последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$, $(\varepsilon_n = \pm 1)$, имеют место экспоненциальные оценки

$$\int_0^1 \exp\left(c_1 \frac{|S_n^\varepsilon(x, f)|}{M f(x)}\right) dx < c_2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где c_1 и c_2 – абсолютные постоянные.

Из этой теоремы следуют оценки, аналогичные (4) и (5) для рядов Фурье по переставленной системе Хаара. Для функции $f \in L(0, 1)$ и перестановки натуральных чисел σ рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^\infty a_{\sigma(n)} \chi_{\sigma(n)}(x)$, где a_n – коэффициенты Фурье-Хаара функции f . Обозначим через $S_n^\sigma(x, f)$ частичную сумму этого ряда.

Теорема 3. Для любой функции $f \in L[0, 1]$ и любой перестановки σ имеют место экспоненциальные оценки

$$\int_0^1 \exp\left(c_1 \frac{|S_n^\sigma(x, f)|}{M f(x)}\right) dx < c_2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\int_0^1 \exp\left(c_1 \frac{|S_n^\sigma(x, f) - f(x)|}{M f(x)}\right) dx \rightarrow 1,$$

где c_1 и c_2 – абсолютные постоянные.

Сначала установим несколько важных следствий. Для этого введём определение.

Определение. Пусть

$$\sum_{k=1}^\infty g_k(x), \quad x \in (a, b) \tag{6}$$

есть некоторый функциональный ряд, определённый на интервале (a, b) . Неотрицательная функция $w(x) \geq 0$ называется множителем сходимости в $L^p(p > 0)$ для ряда (6), если этот ряд сходится в весовом пространстве $L_w^p(a, b)$, т.е. если его частичные суммы $S_n(x)$ удовлетворяют условию

$$\int_a^b |S_n(x) - f(x)|^p w(x) dx \rightarrow 0$$

для некоторой функции $f \in L_w^p(a, b)$. Если же $w(x)$ является множителем сходимости для любого переставленного ряда (6), то $w(x)$ называется множителем безусловной сходимости L^p для ряда (6).

Приведём несколько очевидных следствий из Теорем 1 и 3.

Следствие 1. Если $f(x) \in L(0, 1)$, то при любом $p > 0$ функция $w(x) = (1/M f(x))^p$ является множителем сходимости в L^p для ряда Фурье-Уолша функции f .

Следствие 2. Для любой функции $f \in L(0, 1)$ и любого $\delta > 0$ существует множество $E = E_{\delta, f} \subset (0, 1)$ такое, что $|E| > 1 - \delta$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |S_n(x, f) - f(x)|^p dx = 0$ для любого $p > 0$.

Следствие 3. Для любых $f(x) \in L(0, 1)$ и $p > 0$ функция $w(x) = (1/M f(x))^p$ есть множитель безусловной сходимости в L^p для ряда Фурье-Хаара функции f .

Следствие 4. Пусть σ - некоторая перестановка и $\delta > 0$. Тогда для любой функции $f \in L(0, 1)$ существует множество $E = E_{\delta, f} \subset (0, 1)$ такое, что $|E| > 1 - \delta$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |S_n^\sigma(x, f) - f(x)|^p dx = 0$ для любого $p > 0$.

Аналогичные результаты для тригонометрической системы получены в [4]. Теперь введём несколько обозначений, которые будут использованы в наших доказательствах.

Для фиксированного интервала $I \subset [0, 1]$ определим

$$M_I f = \sup_{I' \supset I} \frac{1}{|I'|} \int_{I'} |f(t)| dt, \quad (7)$$

где I' - двоичный интервал. Ясно, что если $I \subset I'$, то

$$M_I f \geq M_{I'} f, \quad I \subset I'. \quad (8)$$

Имеем также

$$M f(x) \geq M_I f \quad \text{для } x \in I. \quad (9)$$

Для $f(x) \in L^0[0, 1]$ и $E \subset [0, 1]$ обозначим $OSC_E f = \sup_{x, x' \in E} |f(x) - f(x')|$.

Для заданного двоичного интервала I и $k \in \mathbb{N}$ через $2^k I$ обозначим двоичный интервал длины $2^k |I|$, содержащий I .

Используя ядро

$$D_n^*(x) = W_n(x) D_n(x), \quad (10)$$

определим модифицированную частичную сумму $S_n^*(x, f)$, полагая

$$S_n^*(x, f) = \int_0^1 f(t) D_n^*(t \oplus x) dt, \quad (11)$$

так что

$$S_n(x, f) = W_n(x) S_n^*(x, W_n f). \quad (12)$$

В силу (1) ядро $D_n^*(x)$ можно представить в виде

$$D_n^*(x) = \sum_{j=0}^k \varepsilon_j D_{2^j}^*(x). \quad (13)$$

Имеем (см. [3], стр. 120)

$$D_{2^j}^* = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in \Delta_0^{j+1}, \\ -1, & \text{при } x \in \Delta_1^{j+1}, \\ 0, & \text{при } x \notin \Delta_0^j (= \Delta_0^{j+1} \cup \Delta_1^{j+1}). \end{cases} \quad (14)$$

Отсюда следует, что носителем $D_{2^j}^*(x)$ является двоичный интервал Δ_0^j . Пусть $t \in \Delta_s^j$, $0 \leq s \leq 2^j - 1$. Тогда $D_{2^j}^*(t \oplus x)$, как функция от x , имеет носитель Δ_s^j . Покажем теперь, что для любых двух точек x и x' , принадлежащих двоичному интервалу I

$$D_n^*(t \oplus x) - D_n^*(t \oplus x') = 0, \quad t \in [0, 1] \setminus 2I. \quad (15)$$

В силу (13) и (14) достаточно показать, что при фиксированном $t \notin 2I$, $D_{2^j}^*(t \oplus x)$ как функция от x постоянна на I . Если $j > \text{rank}(I)$, то из $t \notin 2I$ следует, что носитель функции $D_{2^j}^*(t \oplus x)$ не имеет общих точек с I . Следовательно, $D_{2^j}^*(t \oplus x) = 0$ при $x \in I$. Если $j \leq \text{rank}(I)$, то либо I находится вне носителя $D_{2^j}^*(t \oplus x)$, либо I содержится в одном из двух составляющих двоичных интервалов носителя $D_{2^j}^*(t \oplus x)$ (см. (14)). В обоих случаях $D_{2^j}^*(t \oplus x)$ будет постоянной на I . Этим доказывается (15).

Лемма 1. Пусть E – некоторое множество из $[0, 1]$, а $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – покрытие множества E двоичными интервалами. Тогда существует подпокрытие $\{I_k\} \subset \{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (конечное или бесконечное) с попарно непересекающимися интервалами.

Доказательство : Для $I_1 \in \{I_k\}$ выберем интервал из семейства $\{I_\alpha\}$, имеющий максимальную длину. Предположим, что уже выбраны первые k интервала. Если эти интервалы покрывают E , то процесс остановится. В противном случае выберем $(k + 1)$ -ый интервал так, чтобы он не пересекался бы с предыдущими и имел максимальную длину среди таких интервалов. Таким образом, получим конечную или бесконечную последовательность $\{I_k\}$ попарно непересекающихся двоичных интервалов. Чтобы показать, что эта последовательность интервалов является покрытием множества E , предположим обратное, т.е. что существует точка $x \notin \cup_k I_k$. Отсюда следует, что $\{I_k\}$ бесконечна и $|I_k| \rightarrow 0$, поскольку

они попарно не пересекаются. Имеем $x \in I_{\alpha(x)}$ при некотором $\alpha(x) \in A$ и, следовательно, $|I_{\alpha(x)}| > |I_{k_0}|$ для некоторого k_0 . Это противоречит принципу выбора I_{k_0} . Следовательно, $\{I_k\}$ покрывает E . Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $I \subset [0, 1]$ – двоичный интервал и $E \subset I$ – измеримое множество с $|E| < 1/2|I|$. Тогда существует последовательность попарно непересекающихся двоичных интервалов $\{I_k\}$ (конечная или бесконечная), такая, что

$$|E \setminus \cup_k I_k| = 0, \quad (16)$$

$$\sum_k |I_k| \leq 4|E|, \quad (17)$$

$$|I_k \cap (I \setminus E)| \geq \frac{1}{2}|I_k|. \quad (18)$$

Доказательство : По теореме Лебега для п.в. $x \in E$ существует двоичный интервал $I(x)$ такой, что $|I(x) \cap E| > 1/2|I(x)|$. Отсюда следует, что $|I(x) \cap E| > |I(x) \cap (I \setminus E)|$. Пусть $k_x \in \mathbb{N}$ – наименьшее число, удовлетворяющее условию

$$|2^{k_x} I(x) \cap E| < |2^{k_x} I(x) \cap (I \setminus E)|. \quad (19)$$

Существование таких чисел следует из условия $|E| < 1/2|I|$. Из выбора k_x следует, что

$$|2^{k_x-1} I(x) \cap E| > |2^{k_x-1} I(x) \cap (I \setminus E)|. \quad (20)$$

Из (20) имеем

$$|2^{k_x} I(x) \cap E| \geq |2^{k_x-1} I(x) \cap E| \geq \frac{1}{2} |2^{k_x-1} I(x)| = \frac{1}{4} |2^{k_x} I(x)|. \quad (21)$$

Аналогично, из (19)

$$|2^{k_x} I(x) \cap (I \setminus E)| \geq \frac{1}{2} |2^{k_x} I(x)|. \quad (22)$$

Ясно, что $\{2^{k_x} I(x)\}_{x \in E}$ – покрытие E . Применяя Лемму 1, из $\{2^{k_x} I(x)\}_{x \in E}$ можно выбрать подпокрытие $\{I_k\}$, для которого (16)–(18) выполняются. Отметим, что (17) следует из (21), а из (22) вытекает (18). Лемма 2 доказана.

Замечание. Лемму 2 можно доказать другим путём, используя аргументы доказательства теоремы 2.1 из [5] (см. также лемму 1 из [6], стр. 88).

Лемма 3. Пусть $I \in [0, 1]$ – двоичный интервал и $f \in L[0, 1]$. Тогда для любого $\lambda > 1$ и $n \in \mathbb{N}$ существует измеримое множество $E \subset I$ такое, что

$$|E| < \frac{1}{\lambda} |I|, \quad (23)$$

$$OSC_{I \setminus E} S_n(x, f) \leq \beta \lambda M_I f, \quad (24)$$

где β – абсолютная постоянная.

Доказательство : В силу (3) и (7), для любого $\lambda > 0$

$$|\{x \in I : |S_n(x, f \chi_{2I})| > \lambda M_I f\}| \leq \frac{c}{\lambda} |I|.$$

Полагая $E = \{x \in I : |S_n(x, f \chi_{2I})| > c \lambda M_I f\}$, и применяя последнее неравенство, получим (23) и

$$|S_n(x, f \chi_{2I})| \leq c \lambda M_I f, \quad x \in I \setminus E. \quad (25)$$

Пусть теперь $x, x' \in I \setminus E$ – произвольные точки. В силу (15), $D_n^*(t \oplus x) - D_n^*(t \oplus x') = 0$ при $t \in [0, 1] \setminus 2I$. Таким образом, используя (25) и (12), получим

$$\begin{aligned} |S_n(x, f) - S_n(x', f)| &= |S_n^*(x, f W_n) - S_n^*(x', f W_n)| = \left| \int_0^1 f(t) W_n(t) (D_n^*(t \oplus x) - \right. \\ &\left. - D_n^*(t \oplus x')) dt \right| \leq \int_{[0,1] \setminus 2I} |D_n^*(t \oplus x) - D_n^*(t \oplus x')| |f(t)| dt + |S_n(x, f \chi_{2I})| + \\ &+ |S_n(x', f \chi_{2I})| \leq 2c \lambda M_{2I} f. \end{aligned}$$

Отсюда следует (24). Лемма 3 доказана.

Рассмотрим операторы $S(x, f) : L^1(0, 1) \rightarrow L^0(0, 1)$, удовлетворяющие условиям :

- i) $|S(x, c f)| = |c| |S(x, f)|$ для любого числа c ;
- ii) для любой функции $f \in L^1(0, 1)$ выполняется неравенство

$$|\{x \in (0, 1) : |S(x, f)| > \lambda\}| < \frac{\gamma}{\lambda} \|f\|_1, \quad \lambda > 0,$$

где $\gamma > 0$ – постоянная ;

iii) для любой функции $f \in L^1(0, 1)$, двоичного интервала $I \subseteq (0, 1)$ и любого числа $\lambda > 1$ существует измеримое множество $E \subset I$ такое, что $|E| < \frac{1}{\lambda} |I|$, $OSC_{I \setminus E} S_n(x, f) \leq \beta \lambda M_I f$, где $\beta > 0$ – постоянная, зависящая от S .

Лемма 4. Если оператор $S(x, f) : L^1(0, 1) \rightarrow L^0(0, 1)$ удовлетворяет условиям i) – iii), то для любой функции $f \in L^1(0, 1)$ выполняется неравенство

$$\int_0^1 \exp\left(c_1 \frac{|S(x, f)|}{M f(x)}\right) dx < c_2, \quad (26)$$

где $c_1, c_2 > 0$ – постоянные, зависящие от β и γ .

Доказательство : Не умаляя общности можно предположить, что $\|f\|_L = 1$.

Положим

$$E = \{x \in [0, 1] : |S(x, f)| > 1\}. \quad (27)$$

Из (5) следует, что

$$|E| < \gamma \quad S(x, f) < 1, \quad x \in [0, 1] \setminus E. \quad (28)$$

Применяя Лемму 2 для $I = [0, 1]$ и множества $E \subset I$ получим семейство двоичных интервалов $\{I_k^1\}$ такое, что

$$|E \setminus \cup_k I_k^1| = 0, \quad \sum_k |I_k^1| \leq 4|E|, \quad |I_k^1 \cap (I \setminus E)| \geq \frac{1}{4} |I_k^1|.$$

По Лемме 3, для каждого k существует множество $E_k^1 \subset I_k^1$, для которого $|E_k^1| < \frac{1}{8} |I_k^1|$, $OSC_{I_k^1 \setminus E_k^1} S(x, f) \leq 8\beta M_{I_k^1} f$. Применяя Леммы 2 и 3, получим двоичные интервалы $\{I_k^2\}_{k \in Q_t^2}$, $I_k^2 \subset I_t^1$ и множества $\{E_k^2\}_{k \in Q_t^2}$, $E_k^2 \subset I_k^2$, обладающие необходимыми свойствами. Продолжив этот процесс, на m -том шаге получим совокупность двоичных интервалов $\{I_k^m\}_{k \in Q_t^m}$, $I_k^m \subset I_t^{m-1}$ и множеств $\{E_k^m \subset I_k^m\}_{k \in Q_t^m}$, со следующими свойствами

$$|E_k^m| < \frac{1}{8} |I_k^m|, \quad (29)$$

$$OSC_{I_k^m \setminus E_k^m} S(x, f) \leq 8\beta M_{I_k^m} f, \quad (30)$$

$$|E_t^{m-1} \setminus \cup_k I_k^m| = 0, \quad \text{при } k \in Q_t^m, \quad (31)$$

$$\cup_{k \in Q_t^m} I_k^m \subset I_t^{m-1}, \quad (32)$$

$$\sum_{k \in Q_t^m} |I_k^m| \leq 4 \sum_t |E_t^{m-1}|, \quad (33)$$

$$|I_k^m \cap (I_t^{m-1} \setminus E_t^{m-1})| > \frac{1}{4} |I_k^m| \quad \text{при } k \in Q_t^m. \quad (34)$$

Используя (29), (33) и (39), получим

$$|\cup_k E_k^m| \leq \sum_k |E_k^m| \leq \frac{1}{8} \sum_k |I_k^m| \leq \frac{1}{2} \sum_t |E_t^{m-1}| = \frac{1}{2} |\cup_t E_t^{m-1}|$$

(при $m = 1$ вместо $\cup_t E_t^{m-1}$ берем E). Отсюда и из (33) следует

$$|\sum_k E_k^m| \leq \frac{1}{2^m} |E| \leq \frac{\gamma}{2^m}. \quad (35)$$

Из (29) и (34)

$$(I_t^{m-1} \setminus E_t^{m-1}) \cap (I_k^m \setminus E_k^m) \neq \emptyset \quad \text{при } k \in Q_t^m. \quad (36)$$

Пусть теперь $x \in (\cup_k I_k^1) \setminus (\cup_k E_k^m)$ – произвольная точка. Легко проверить, что эта точка принадлежит некоторому множеству $I_k^p \setminus E_k^p$, $p = 1, 2, \dots, m$. Из (36) следует, что существуют точки t_l , $l = 1, 2, \dots, p$ такие, что $t_i \in (I_{k_i}^i \setminus E_{k_i}^i) \cap (I_{k_{i-1}}^{i-1}) \setminus (E_{k_{i-1}}^{i-1})$, $i = 2, 3, \dots, p$, $t_1 \in (I_{k_1}^1 \setminus E_{k_1}^1) \cap ([0, 1] \setminus E)$. Следовательно, в силу (30) и (28)

$$|S(x, f) - S(t_p, f)| \leq 8\beta M_{I_{k_p}^p} f,$$

$$|S(t_i, f) - S(t_{i-1}, f)| \leq 8\beta M_{I_{k_{i-1}}^{i-1}} f, \quad i = 2, 3, \dots, p,$$

$$S(t_1, f) \leq 1. \quad (37)$$

Складывая эти неравенства, с учётом (32) и (37), при $x \in \cup_k I_k^1 \setminus \cup_k E_k^m$ получим

$$|S(x, f)| \leq 1 + 8\beta \sum_{i=1}^p M_{I_{k_i}^i} f \leq 8\beta(p+1) M f(x) \leq 8\beta(m+1) M f(x).$$

Отсюда, учитывая (35) и (37), получим

$$|\{x \in \cup_k I_k^1 : \frac{|S(x, f)|}{M f(x)} > 8\beta(m+1)\}| \leq \frac{8\gamma \|f\|_L}{2^m}.$$

В случае, когда $x \notin \cup_k I_k^1$, получаем (28). Поскольку $m \in \mathbb{N}$ произвольно, то отсюда вытекает (26). Лемма 4 доказана.

Доказательство Теоремы 1 : Неравенство (4) непосредственно следует из Лемм 3 и 4. Докажем (5). Обозначим через $S_{2^N}(x, f)$ частичные суммы функции f . Известно (см. [3], стр. 45), что

$$S_{2^N}(x, f) = \frac{1}{|\Delta_k^N|} \int_{\Delta_k^N} f(t) dt \quad \text{при } x \in \Delta_k^N.$$

Используя это неравенство, легко проверить, что

$$\frac{M(f - S_{2^N})(x)}{M f(x)} \leq 2. \quad (38)$$

Хорошо известно также, что $\|S_{2^N}(x, f) - f(x)\|_L \rightarrow 0$. Следовательно, используя тот факт, что максимальная функция $M f(x)$ имеет слабый тип $(1, 1)$, для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что

$$\left| \left\{ x \in [0, 1] : \frac{M(S_{2^N} - f)(x)}{M f(x)} > \varepsilon \right\} \right| < \varepsilon^2. \quad (39)$$

Обозначим

$$E_1 = \left\{ \frac{M(S_{2^N} - f)(x)}{M f(x)} > \varepsilon \right\}, \quad E_2 = [0, 1] \setminus E_1. \quad (40)$$

При $n > 2^N$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \exp \left(\frac{c_1}{4} \frac{|S_n(x, f) - f(x)|}{M f(x)} \right) dx &= \left(\int_{E_1} + \int_{E_2} \right) \times \\ &\times \exp \left(\frac{c_1}{4} \frac{|S_n(x, f - S_{2^N}) - (f(x) - S_{2^N}(x))|}{M(f - S_{2^N})(x)} \cdot \frac{M(f - S_{2^N})(x)}{M f(x)} \right) dx, \end{aligned} \quad (41)$$

где c_1 и c_2 – постоянные из (16). Интегралы в правой части (41) обозначим через A_1 и A_2 , соответственно. Из неравенства Гёльдера $|f(x) - S_{2^N}(x)| \leq M(f - S_{2^N})(x)$, а также из (38) и (16) получаем

$$\begin{aligned} A_1 &\leq \int_{E_1} \exp \left(\frac{c_1}{2} \frac{|S_n(x, f - S_{2^N}) - (f(x) - S_{2^N}(x))|}{M(f - S_{2^N})(x)} \right) dx \leq \\ &\leq \sqrt{|E_1|} \exp c_1 2 \left(\int_0^1 \exp \left(c_1 \frac{|S_n(x, f - S_{2^N})|}{M(f - S_{2^N})(x)} \right) dx \right)^{1/2} \leq \varepsilon \sqrt{c_2} \exp \frac{c_1}{2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Для оценки A_2 используем неравенство $\exp t - 1 \leq t \exp t$. В силу (38) – (40)

$$\begin{aligned} A_2 - 1 &\leq \int_{E_2} \exp \left(\frac{\varepsilon c_1}{4} \frac{|S_n(x, f - S_{2^N}) - (f(x) - S_{2^N}(x))|}{M(f - S_{2^N})(x)} \right) dx \leq \\ &\leq \varepsilon \exp(\varepsilon c_1/4) \left(\int_{E_2} \left(\frac{c_1}{4} \frac{|S_n(x, f - S_{2^N})|}{M(f - S_{2^N})(x)} \right)^2 dx \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(\int_0^1 \exp \left(\frac{\varepsilon c_1}{2} \frac{|S_n(x, f - S_{2^N})|}{M(f - S_{2^N})(x)} \right) dx \right)^{1/2} \leq \varepsilon \exp(\varepsilon c_1/4) c_2 \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Из (41) – (43) следует, что

$$\int_0^1 \exp \left(\frac{c_1}{4} \frac{|S_n(x, f) - f(x)|}{M f(x)} \right) dx - 1 \leq \varepsilon c_3 \quad \text{при } n > N.$$

Так как ε произвольно, то последнее неравенство влечет (5). Теорема 1 доказана. Для доказательства Теоремы 2 нам необходим следующий аналог Леммы 3.

Лемма 5. Пусть $I \in [0, 1]$ – некоторый двоичный интервал, а $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ – последовательность чисел $+1$ или -1 . Тогда для любой функции $f \in L[0, 1]$ и любого $\lambda > 1$ и $n \in \mathbb{N}$ существует измеримое множество $E \subset I$ такое, что

$$|E| < \frac{1}{\lambda} |I|, \quad (44)$$

$$OSC_{I \setminus E} S_n^\varepsilon(x, f) \leq \beta \lambda M_I f, \quad (45)$$

где β – абсолютная постоянная.

Доказательство : Положим $E = \{x \in I : |S_n^\varepsilon(x, f \chi_I)| > c \lambda M_I f\}$. Из оценки слабого типа $(1, 1)$ для оператора $S_n^\varepsilon(x, f)$ получим (44) и

$$|S_n^\varepsilon(x, f \chi_I)| \leq c \lambda M_I f, \quad \forall x \in I \setminus E. \quad (46)$$

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x) \quad (47)$$

есть ряд Фурье–Хаара функции f , и пусть $x, x' \in I \setminus E$ суть произвольные точки. Из определения системы Хаара следует, что $\chi_n(x) - \chi_n(x') = 0$, если $\text{supp } \chi_n \not\subset I$. Отсюда и из (47) вытекает

$$\begin{aligned} S_n^\varepsilon(x, f) - S_n^\varepsilon(x', f) &= \sum_{\text{supp } \chi_n \subset I} \varepsilon_n a_n \chi_n(x) - \sum_{\text{supp } \chi_n \subset I} \varepsilon_n a_n \chi_n(x') = \\ &= S_n^\varepsilon(x, f \chi_I) - S_n^\varepsilon(x', f \chi_I). \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая (46), получим $|S_n^\varepsilon(x, f) - S_n^\varepsilon(x', f)| \leq 2c \lambda M_I f(x)$. Отсюда следует (45). Лемма 5 доказана.

Доказательство Теоремы 2 очевидно следует из Лемм 4 и 5, поскольку для оператора $S_n^\varepsilon(x, f)$ выполняются условия i) – iii).

Доказательство Теоремы 3 : Каждую частичную сумму $S_n^\sigma(x, f)$ можно представить в виде $S_n^\sigma(x, f) = S_{n'}^\varepsilon(x, f) + S_{n''}(x, f)$ для некоторых n' и последовательности знаков ε , где $S_{n''}(x, f)$ – обычная частичная сумма ряда Фурье–Хаара. Следовательно, неравенство в Теореме 3 непосредственно следует из Теоремы 2. Доказательство предельного равенства в Теореме 3 аналогично доказательству (5). Единственная разница в том, что вместо S_{2N} надо использовать любую последовательность полиномов по системе Хаара, которая сходится к $f(x)$ в метрике $L(0, 1)$.

ABSTRACT. The paper considers Fourier-Walsh series of functions from the class $L^1(0, 1)$ and establishes exponential bounds for their partial sums. Similar bounds for Fourier series by rearranged Haar system are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. A. Paley, "Remarkable series of orthogonal functions", Proc. London Math. Soc., vol. 34, pp. 241 — 279, 1932.
2. C. Watari, "On general Walsh-Fourier series, I", Proc. Japan Acad., vol. 73, no. 8, pp. 203 — 208, 1957.
3. Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, Ряды и Преобразования Уолша, Москва, Наука, 1987.
4. Г. А. Карагулян, "Экспоненциальные оценки оператора Кальдерона-Зигмунда и смежные вопросы рядов Фурье", Мат. заметки, № 3, 2002.
5. Г. Г. Геворкян, "Некоторые теоремы о безусловной сходимости и мажоранте рядов Франклина и их применения", Труды МИАН, том 190, стр. 49 — 74, 1989.
6. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные ряды, Москва, Наука, 1984.

7 сентября 2001

Институт математики
НАН Армении