ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА В СТЕРЕОЛОГИИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Р. В. Амбарцумян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, № 4, 1998

Задача Викселя — одна из старейших в стереологии. На плоскости имеется совокупность дисков случайного радиуса, центры которых образуют трансляционно инвариантный точечный процесс. Пересечение "тестовой прямой" с этими дисками порождает одномерный случайный процесс хорд. Задача Викселя : по заданному вероятностному распределению длины типичной хорды определить распределение длины радиуса типичного круга. В такой постановке задача сводится к интегральному уравнению Абеля. Если области суть гомотетичные копии некоторой области отличной от круга, глобальная изотропия сохраняется при применении к областям независимых равномерных вращений. Однако, в этой постановке удовлетворительное решение отсутствует. В настоящей статье рассматриваются равносторонние N–угольники случайных размеров, изотропно разбросаные на плоскости. Шейпы многоугольников случайны и подчиняются вероятностному распределению S, заданному в соответствующем пространстве шейпов. Показано, что при определенных условиях на S, нахождение распределения размеров может быть сведено к решению интегрального уравнения Вольтерра с ограниченным ядром, зависящем только от S. Равносторонние треугольники и ромбы выпадают, однако существуют конкретные случайные модели равносторонних пятиугольников, удовлетворяющих всем перечисленным условиям.

ВВЕДЕНИЕ

Ряд результатов в стохастической геометрии получается при помощи тождеств Плейеля и их модификаций, см. [1] и [2]. Для ограниченного выпуклого многоугольника D на плоскости и дважды непрерывно дифференцируемой на $(0, \infty)$ функции $F(x)$ со свойством $F(0) = 0$ имеет место тождество Плейеля

$$\int_{[\mathrm{D}]} F'(\chi)\, dg = \int_{[\mathrm{D}]} F''(\chi)\chi \cot\psi_1 \cot\psi_2\, dg + \sum_i F(a_i), \qquad (0.1)$$

где dg – мера в пространстве $\mathbf{G}$ прямых на плоскости, инвариантная относительно евклидовых движений и нормированная так, что ее значение на множестве

$$[\mathbf{D}] = \{g \in \mathbf{G} : \text{прямая } g \text{ пересекает } \mathbf{D}\}$$

равно длине периметра многоугольника $\mathbf{D}$. В (0.1) χ означает длину хорды $\mathbf{D} \cap g$, порожденную прямой g, а ψ_1 и ψ_2 – углы, возникающие в двух точках пересечения g с границей $\mathbf{D}$, оба угла берутся внутри $\mathbf{D}$ и в одной полуплоскости относительно g, a_i – длины сторон многоугольника $\mathbf{D}$.

В настоящей статье в качестве функции F в *усредненной версии* тождества (0.1) выбирается дельта-функция Дирака. Это приводит к решению *стереологической задачи*, поставленной для случайных многоугольных шейпов.

Напомним суть классической стереологической задачи. На плоскости $\mathbb{R}^2$ имеется случайное счетное множество выпуклых областей $\{\mathbf{D}_i\}$. Предполагаем, что $\mathbf{D}_i = M_i h_i \mathbf{D}$, где $\mathbf{D}$ – некоторая ограниченная выпуклая область, $Mh\mathbf{D}$ – область, получающаяся из $\mathbf{D}$ гомотетией с коэффициентом $h > 0$ и евклидовым движением M. Предполагаем, что $\{M_i, h_i\}$ является *случайным точечным процессом* на группе $\mathbb{M}$ евклидовых движений плоскости с марками h_i из $(0, \infty)$. Распределение $\mathbf{P}$ процесса $\{M_i, h_i\}$ берется инвариантным относительно группы евклидовых движений, а $\{M_i\}$ предполагается имеющим конечную интенсивность. Тогда (см. [3]) определено распределение $\mathbf{V}$ *типичной марки* h.

Простейший пример процесса $\{M_i, h_i\}$, удовлетворяющего упомянутым условиям : $\{M_i\}$ – пуассоновский точечный процесс, управляемый мерой, пропорциональной мере Хаара на группе $\mathbb{M}$, $\{h_i\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с вероятностным распределением $\mathbf{V}$.

Пусть g_0 – некоторая прямая на плоскости $\mathbb{R}^2$. Она пересекает некоторые области из случайного счетного набора $\{\mathbf{D}_i\}$. Случайное множество интервалов $\mathbf{I}_i = \mathbf{D}_i \cap g_0$ обозначаем через $\{\mathbf{I}_i\}$. Распределение множества $\{\mathbf{I}_i\}$ инвариантно относительно сдвигов, отображающих g_0 в себя. Если интенсивность случайного множества $\{\mathbf{I}_i\}$ конечна, то можно говорить [3] о распределении $\mathbf{W}$ *длины типичного интервала* в $\{\mathbf{I}_i\}$. В приведенном выше примере центры интервалов из

$\{\mathbf{I}_i\}$ образуют пуассоновский точечный процесс, а их длины образуют последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковое вероятностное распределение $\mathbf{W}$.

Задача стереологии : по заданному $\mathbf{W}$ найти $\mathbf{V}$.

Мы будем рассматривать рандомизированную версию указанной задачи. Пусть $\mathbf{D}$ имеет *случайный шейп*. Для $\mathbf{D}$=*равносторонний выпуклый N–угольник* (рассматриваются только такие области), шейп s описывается с помощью $N-3$ угловых параметров. В качестве размерного параметра выбираем *длину стороны*. Таким образом, $\mathbf{D}=(s,1)$, длина каждой стороны $\mathbf{D}$ равна 1. Полагаем $\mathbf{D}_i = M_i h_i(s_i,1) = M_i(s_i,h_i)$, где $\{s_i\}$ — последовательность независимых, одинаково распределенных шейпов, полученных из некоторого вероятностного распределения $\mathbf{S}$. Формулировка задачи Викселя далее не меняется.

Нашей целью является получение общих условий, при которых *плотность вероятностного распределения $\mathbf{V}$ удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра с ограниченным ядром, зависящим только от вероятностного распределения $\mathbf{S}$, и со свободным членом, пропорциональным производной от плотности $\mathbf{W}$*. Приводятся конкретные модели случайных шейпов для *равносторонних пятиугольников*, удовлетворяющих всем достаточным условиям. Выписан явный алгоритм для вычисления ядра.

§1. УСРЕДНЕНИЕ

Предположим, что вероятность $\mathbf{S}$ *сосредоточена на шейпах равносторонних выпуклых N-угольников*. Через $h\mathbf{D}=(s,h)$ обозначаем равносторонний N-угольник с шейпом s и длинной сторон h.

Рассмотрим следующую стохастическую конструкцию :

Шаг 1 : Выбираем случайный шейп s из вероятностного распределения $\mathbf{S}$ и строим многоугольник $\mathbf{D}=(s,1)$.

Шаг 2 : Независимо выбираем значение h из вероятностного распределения $(H)^{-1}h\,\mathbf{V}(dh)$, где $H=\int h\,\mathbf{V}(dh)$ и строим многоугольник $h\mathbf{D}$.

Шаг 3 : Выбираем случайную прямую g с равномерным вероятностным распределением на $[h\mathbf{D}]$.

Напомним, что для заданных s и h равномерное вероятностное распределение на $[h\mathbf{D}]$ пропорционально сужению меры dg на множество $[h\mathbf{D}]$, с соответствующей нормировкой. $I_{[h\mathbf{D}]}(g)$ обозначает индикаторную функцию множества $[h\mathbf{D}]$. Так как для каждого $h > 0$

$$\int I_{[h\mathbf{D}]}(g)dg = Nh,$$

то нормирующим множителем является $(Nh)^{-1}$.

Результатом стохастической конструкции является случайная фигура $(h\mathbf{D}, g)$, состоящая из области $h\mathbf{D}$ и прямой $g \in [h\mathbf{D}]$. Ясно, что вероятностное распределение $(h\mathbf{D}, g)$ имет вид

$$(NH)^{-1}\mathbf{V}(dh)\mathbf{S}(ds)\, I_{[h\mathbf{D}]}(g)dg. \tag{1.1}$$

Величины $\chi =$ длина $h\mathbf{D} \cap g$, $\cot\psi_1$ и $\cot\psi_2$, определенные в (0.1), при заданном $(h\mathbf{D}, g)$ становятся случайными. Их совместное распределение индуцировано из (1.1).

Доказательство следующей теоремы может быть легко получено, используя теорию распределения типичной марки [3].

Теорема 1. *Вероятностное распределение случайной переменной χ совпадает с* $\mathbf{W}$.

Задавая шейп s и величину h, запишем тождество (0.1) для $h\mathbf{D}$ и проинтегрируем его относительно вероятностного распределения $\mathbf{V} \times \mathbf{S}$. Так как для каждой функции f, определенной на $(0, \infty)$

$$(HN)^{-1}\int\int\int f(\chi)\,\mathbf{V}(dh)\mathbf{S}(ds)\,dg = \int W(x)\,f(x)\,dx,$$

$$\int\int f(h)\,\mathbf{V}(dh)\mathbf{S}(ds) = \int V(x)\,f(x)\,dx,$$

где $W(x)$ и $V(x)$ плотности вероятностных распределений $\mathbf{W}$ и $\mathbf{V}$, получаем

$$\begin{aligned}\int W(x)\,F'(x)\,dx = H^{-1}\int V(x)\,F(x)\,dx + \\ + (HN)^{-1}\int V(h)\,dh\int \mathbf{S}(ds)\int_{[\mathbf{h}D]} F''(\chi)\chi\cot\psi_1\cot\psi_2\,dg.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Мы будем рассматривать (1.2) для функции $F(x) = \delta(x-y)$, где $\delta(x-y)$ есть дельта функция Дирака в точке $y > 0$. Для каждой $u(x) \in C^{(2)}$ имеем

$$\int u(x)\delta(x-y)dx = u(y) \quad \text{и} \quad \int u(x)\delta'(x-y)dx = -u'(y). \tag{1.3}$$

Однако, подстановка $\delta''(x-y)$ вместо F'' в кратный интеграл в (1.2) требует обоснования.

Для прояснения ситуации, вернемся к стандартному определению δ-функции и рассмотрим семейство функций $F(x) = F_\varepsilon(x)$, для которых $\lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(x) = \delta(x-y)$ в смысле слабой сходимости (такое семейство назовем $\delta(x-y)$-*семейством*). В §2 и §3 приводятся условия на шейповое распределение S, при которых следующее соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int V(h)\,dh\int \mathbf{S}(ds)\int_{[\mathbf{b}D]} F''_\varepsilon(\chi)\chi\,\cot\psi_1\,\cot\psi_2\,dg = \int V(h)\,K(h,y)dh \tag{1.4}$$

выполняется для каждой вероятностной плотности $V(h)$ на $(0,\infty)$ с конечным средним H, и дается явный алгоритм для вычисления функции $K(h,y)$. Из (1.2), (1.3) следует, что $K(h,y)$ служит ядром в интегральном уравнении

$$-W'(y) = H^{-1}V(y) + (HN)^{-1}\int V(h)\,K(h,y)dh. \tag{1.5}$$

При выполнении одного из условий, наложенных на S, уравнение (1.5) становится уравнением Вольтерра.

§2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТОЖДЕСТВА ПЛЕЙЕЛА

Начнем с $\mathbf{D} = (s,1)$ и $F(x) \in C^{(2)}$. Для всех s

$$\int_{[\mathbf{D}]} F''(\chi)\chi\,\cot\psi_1\,\cot\psi_2\,dg = \sum_{i<j}\int_{[a_i]\cap[a_j]} F''(\chi)\chi\,\cot\psi_1\,\cot\psi_2\,dg, \tag{2.1}$$

где $[a_i]\cap[a_j]$ обозначает множество прямых пересекающих стороны a_i и a_j многоугольника D. Предполагая, что

A1 : многоугольник D не имеет параллельных сторон,

каждое слагаемое может быть вычислено следующим образом. На множестве $[a_i]\cap[a_j]$ рассмотрим координаты $g = (\chi,\phi)$, где χ как и выше, а $\phi \in (0,\pi)$ является направлением прямой g.

Имеет место соотношение (см. [3], стр. 157)

$$dg = \frac{\sin\psi_1 \sin\psi_2}{\sin\alpha_{ij}}\, d\chi\, d\phi,$$

где α_{ij} угол между сторонами a_i и a_j. Получаем

$$\int_{[a_i]\cap[a_j]} F''(\chi)\chi \cot\psi_1 \cot\psi_2\, dg = \int_{<ij>} \frac{\cos\psi_1 \cos\psi_2}{\sin\alpha_{ij}}\, d\phi \int_{b_{ij}}^{c_{ij}} F''(\chi)\chi\, d\chi,$$

где $< ij >= \{\phi$: для некоторого $\chi > 0$ существует прямая $(\chi,\phi) \in [a_i]\cap[a_j]\}$, а интервал (b_{ij}, c_{ij}) есть *множество значений* χ для семейства параллельных прямых из $[a_i]\cap[a_j]$, имеющих фиксированное направление ϕ. Таким образом, $b_{ij} = b_{ij}(\phi)$, $c_{ij} = c_{ij}(\phi)$ и всегда $b_{ij} < c_{ij}$.

Производя интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned}\int_{b_{ij}}^{c_{ij}} F''(\chi)\chi\, d\chi &= c_{ij}F'(c_{ij}) - b_{ij}F'(b_{ij}) - \int_{b_{ij}}^{c_{ij}} F'(\chi)\, d\chi = \\ &= c_{ij}F'(c_{ij}) - b_{ij}F'(b_{ij}) + F(b_{ij}) - F(c_{ij}),\end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned}&\int_{[a_i]\cap[a_j]} F''(\chi)\chi \cot\psi_1 \cot\psi_2\, dg = \\ &= \int_{<ij>} \frac{\cos\psi_1 \cos\psi_2}{\sin\alpha_{ij}} \left[c_{ij}F'(c_{ij}) - b_{ij}F'(b_{ij}) + F(b_{ij}) - F(c_{ij})\right] d\phi.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Пусть V_k — вершина многоугольника $\mathbf{D}$. Через $[V_k]$ обозначим пучок прямых, проходящих через V_k, пересекающих внутренность $\mathbf{D}$ (т.е. опорные прямые исключаются). Через g_k обозначаем прямые из $[V_k]$. Прямым g_k приписываем направление от V_k внутрь $\mathbf{D}$. Пусть a_r и a_l – две стороны, которые пересекаются в вершине V_k, причем a_r лежит справа, а a_l слева относительно g_k. На $[V_k]$ определим отображения

$$g_k \mapsto j, \quad g_k \mapsto (\psi_1^{(r)}, \psi_2^{(r)}), \quad g_k \mapsto (\psi_1^{(l)}, \psi_2^{(l)}), \quad g_k \mapsto z, \quad g_k \mapsto (\alpha^{(r)}, \alpha^{(l)}), \tag{2.3}$$

где

j — индекс стороны a_j, через которую g_k оставляет $\mathbf{D}$;

$\psi_1^{(r)}$ — угол внутри $\mathbf{D}$ между лучами g_k и a_r, исходящими из V_k ;

$\psi_2^{(r)}$ — угол между g_k и a_j, лежащий внутри $\mathbf{D}$, в правой полуплоскости ограниченой g_k ;

$\psi_1^{(l)}$ и $\psi_2^{(l)}$ определяются аналогично, заменой "правый" на "левый" ;

z — длина хорды $g_k \cap \mathbf{D}$;

$\alpha^{(r)} = \alpha_{rj}$, $\alpha^{(l)} = \alpha_{lj}$.

Для каждой g_k имеем : или $z = b_{rj}$ или $z = c_{rj}$, а также или $z = b_{lj}$ или $z = c_{lj}$. Будем использовать индикаторные функции $I_b^{(r)}(g_k) = 1 - I_c^{(r)}(g_k)$ и $I_b^{(l)}(g_k) = 1 - I_c^{(l)}(g_k)$, соответственно, событиям $z = b_{rj}$, $z = c_{rj}$ и $z = b_{lj}$, $z = c_{lj}$.

Вклады опорных прямых многоугольника $\mathbf{D}$ при ограничении $F(0) = 0$ равны нулю.

Подставляя (2.2) в (2.1), используем индикаторные функции $I_{<ij>}(\phi)$ множеств $< ij >$. После естественной группировки слагаемых

$$\int_{[\mathbf{D}]} F''(\chi)\chi \cot\psi_1 \cot\psi_2 \, dg =$$

$$= \sum_{i<j} \int_0^{\pi} I_{<ij>}(\phi) \frac{\cos\psi_1 \cos\psi_2}{\sin\alpha_{ij}} \left[c_{ij}F'(c_{ij}) - b_{ij}F'(b_{ij}) + F(b_{ij}) - F(c_{ij})\right] d\phi =$$

$$= \sum_{V_k} \int_{[V_k]} \frac{\cos\psi_1^{(r)} \cos\psi_2^{(r)}}{\sin\alpha^{(r)}} [z\,F'(z) - F(z)][I_c^{(r)}(g_k) - I_b^{(r)}(g_k)]\, d\phi +$$

$$+ \sum_{V_k} \int_{[V_k]} \frac{\cos\psi_1^{(l)} \cos\psi_2^{(l)}}{\sin\alpha^{(l)}} [z\,F'(z) - F(z)][I_c^{(l)}(g_k) - I_b^{(l)}(g_k)]\, d\phi, \tag{2.4}$$

где интегрирование проводится по угловой мере $d\phi$ на каждом пучке $[V_k]$.

Следующий шаг состоит в переходе к интегрированию в пространстве длин z, см. (2.3).

Для каждого V_k соответствующую область значений z разбиваем на *ветви* B_{km}, $m = 1, 2, ...$ следующим образом. Обозначим через $[V_k]_j$ ту часть $[V_k]$, которую первое отображение в (2.3) переводит в j. Существуют две возможности :

I) $[V_k]_j$ содержит прямую, перпендикулярную к a_j и II) не содержит.

В случае II), $[V_k]_j$ есть отдельная ветвь, идентичная интервалу (d_{kj}, d'_{kj}), где $d_{kj} < d'_{kj}$ длины двух диагоналей, соединяющих V_k с концами a_j.

В случае I) область изменения z на $[V_k]_j$ разбивается на две ветви, идентичные интервалам (q_{kj}, d_{kj}) и (q_{kj}, d'_{kj}), где q_{kj} — *длина перпендикуляра* из V_k, опущенная на прямую, содержащую a_j. На каждой ветви B_{km} отображение $\phi \to z$ взаимно–однозначно. *Внутри* каждой B_{km} полученные функции и их производные d/dz не имеют разрывов.

На каждой ветви имеем

$$d\phi = z^{-1}\tan\psi\, dz,$$

где $\psi < \pi/2$ — угол пересечения g_k с a_j, см. (2.3). Выбирая $\psi < \pi/2$, получаем

$$\cos\psi_2^{(r)}\tan\psi \;=\; S(\psi_2^{(r)})\sin\psi,$$

где

$$S(\psi_2^{(r)}) = 1, \quad \text{если} \quad \cos\psi_2^{(r)} > 0, \quad \text{и} \quad -1, \quad \text{если} \quad \cos\psi_2^{(r)} < 0.$$

Аналогичное соотношение имеет место, если заменить r на l.

На каждой ветви B_{km} величины $S(\psi_2^{(r)})$, $I_c^{(r)}(g_k) - I_b^{(r)}(g_k)$ и $\sin\alpha^{(r)}$ остаются постоянными. Обозначим

$$Z_{km}^{(r)} = \frac{S(\psi_2^{(r)})[I_c^{(r)} - I_b^{(r)}]}{\sin\alpha^{(r)}}.$$

Величина $Z_{km}^{(l)}$ определяется аналогично. Используя эти замечания, (2.4) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
&\int_{[\mathrm{D}]} F''(\chi)\chi\cot\psi_1\cot\psi_2\, dg = \\
&= \sum_{V_k}\sum_{m} Z_{km}^{(r)}\int_{B_{km}} z^{-1}\cos\psi_1^{(r)}\sin\psi\,[z\,F'(z) - F(z)]\,dz + \\
&+ \sum_{V_k}\sum_{m} Z_{km}^{(l)}\int_{B_{km}} z^{-1}\cos\psi_1^{(l)}\sin\psi\,[z\,F'(z) - F(z)]\,dz.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Для того, чтобы подставить $F(z) = \delta(z - y)$ в (2.5), сделаем следующее предположение относительно шейпа s.

A2 : для $\mathrm{D} = (s, 1)$, ни одна из длин q_{km} или d_i не равна y.

Имеем элементарные формулы :

$$\sin\psi = \frac{q_{km}}{z}, \qquad \cos\psi_1^{(r)} = \frac{q_{km}}{z}u_1^{(r)} + \frac{\sqrt{z^2 - q_{km}^2}}{z}u_2^{(r)},$$

где $u_1^{(r)}$ и $u_2^{(r)}$ совпадают, с точностью до знаков, с sin и cos угла между a_r и $q_{k,m} = q_{k,j}$, и являются постоянными на B_{km}. Аналогичное выражение имеется для $\cos\psi_2^{(l)}$. Из A2 следует, что с вероятностью $\mathbf{S} = 1$ точка y не совпадает с границей какого–либо B_{km}, и следовательно (1.3) становится применимым.

Обратимся к многоугольнику $h\mathrm{D} = (s, h)$. При A1, (2.5) запишется в виде

$$\int_{[h\mathrm{D}]} F''(\chi)\chi \cot\psi_1 \cot\psi_2 \, dg =$$
$$= \sum_{V_k}\sum_m Z_{km}^{(r)} \int_{hB_{km}} z^{-1} X_{km}^{(r)}(z,h)\,[z F'(z) - F(z)]\, dz + \tag{2.6}$$
$$+ \sum_{V_k}\sum_m Z_{km}^{(l)} \int_{hB_{km}} z^{-1} X_{km}^{(l)}(z,h)\,[z F'(z) - F(z)]\, dz,$$

где hB_{km} – гомотетичный образ B_{km} и

$$X_{km}^{(r/l)}(z,h) = \frac{h^2 q_{km}^2}{z^2} u_1^{(r/l)} + h q_{km} \frac{\sqrt{z^2 - h^2 q_{km}^2}}{z^2} u_2^{(r/l)}$$

значение произведения $\sin\psi \cos\psi_1^{(r/l)}$, записанного для $h\mathrm{D}$ и z. В (2.6) можно подставить $F(z) = \delta(z-y)$, если выполняется :

A2*: для $h\,\mathrm{D}$ ни одна из длин $h\,q_{km}$ или $h\,d_i$ не равна y.

Теорема 2. *Предположим, что вероятностное распределение* S *имеет плотность в пространстве $N-3$ угловых параметров, описывающих шейпы равносторонних N-угольников. Тогда для каждого $\delta(x-y)$-семейства $F_\varepsilon(x) \in C^{(2)}$ и для любых y и h, с вероятностью $\mathrm{S} = 1$ существует предел*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{[h\mathrm{D}]} F_\varepsilon''(\chi)\chi \cot\psi_1 \cot\psi_2 \, dg = \int_{[h\mathrm{D}]} \delta''(\chi - y)\chi \cot\psi_1 \cot\psi_2 \, dg.$$

Независимо от выбора $\delta(x-y)$-семейства

$$\int_{[h\mathrm{D}]} \delta''(\chi - y)\chi \cot\psi_1 \cot\psi_2 \, dg =$$
$$= -\sum_{V_k}\sum_m Z_{km}^{(r)} \left[y^{-1} X_{k,m}^{(r)}(y,h) + \frac{d}{dy} X_{k,m}^{(r)}(y,h) \right] I_{km}(y,h) - \tag{2.7}$$
$$- \sum_{V_k}\sum_m Z_{km}^{(l)} \left[y^{-1} X_{km}^{(l)}(y,h) + \frac{d}{dy} X_{km}^{(l)}(y,h) \right] I_{km}(y,h),$$

где $I_{km}(y,h) = 1$ если $y/h \in B_{km}$, и 0 — в противном случае.

Доказательство : Для каждого h и y предположение о существовании плотности влечет с вероятностью $\mathrm{S} = 1$ свойства A1 и A2*. Предполагая, что s принадлежит соотвествующему множеству шейпов, можно вычислить предел, формально подставляя $F(z) = \delta(z-y)$ и применяя правила (1.3).

Следствие. Рассмотрим множество шейпов, удовлетворяющих условию

A3 : для каждой вершины V_k многоугольника $\mathrm{D} = (s, 1)$ и каждой прямой $g_k \in [V_k]$, всегда имеем $z > 1$.

Для шейпов $s \in$A3

$$\int_{[h\mathrm{D}]} \delta''(\chi - y)\chi \cot\psi_1 \cot\psi_2 \, dg = 0 \text{ при } y < h. \tag{2.8}$$

§3. ОЦЕНКИ

В этом параграфе мы вычисляем ядро $K(h, y)$ в (1.4) при некоторых дополнительных условиях (предположения A4–A6) на распределение S. Отметим, что

$$K(h, y) \neq \text{математическому ожиданию левой части (2.7).}$$

Для конкретности, выберем $\delta(x - y)$-семейство в (1.4) следующим образом :

$$F_\varepsilon(x) = (2\varepsilon)^{-1} \text{ для } y - \varepsilon < x < y + \varepsilon\,,\ 0 - - - \text{ в противном случае.}$$

При этом выборе Теорема 2 остается справедливой, если под $F_\varepsilon'(z)$ понимать следующее :

$$F_\varepsilon'(z) = (2\varepsilon)^{-1}\delta(z - y + \varepsilon) - (2\varepsilon)^{-1}\delta(z - y - \varepsilon).$$

Подставим в (2.6) таким образом определенные $F_\varepsilon(z)$ и $F_\varepsilon'(z)$. Для применения теоремы Лебега нам понадобятся оценки. Через $\mathbf{E}$ обозначим математическое ожидание относительно S. Всюду в этом параграфе *значение $y > 0$ рассматривается как фиксированный параметр.*

Рассмотрим члены, содержащие $F_\varepsilon(z)$, т.е.

$$\begin{aligned} U_1 = -\sum_{V_k}\sum_{m} Z_{km}^{(r)} \int_{hB_{km}} z^{-1} X_{km}^{(r)}(z, h)\, F_\varepsilon(z)\, dz - \\ -\sum_{V_k}\sum_{m} Z_{km}^{(l)} \int_{hB_{km}} z^{-1} X_{km}^{(l)}(z, h)\, F_\varepsilon(z)' dz. \end{aligned} \tag{3.1}$$

A4 : Существует константа $c > 0$ такая, что с вероятностью $\mathrm{S} = 1$ в $\mathrm{D} = (s, 1)$ для каждого α_{ij} (= угол между сторонами a_i и a_j) имеем $\sin\alpha_{ij} > c$.

Оценка 1. При Условии A4 сумма (3.1) равномерно ограничена на множестве $\{\varepsilon < y/2, h > 0\}$.

Доказательство : На $\{\varepsilon < y/2, h > 0\}$, когда $z \in hB_{km} \cap (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$, имеем $z^{-1} < 2y^{-1}$. При Условии А4, $Z_{km}^{(l/r)}$ и $X_{km}^{(l/r)}(z,h)$ ограничены, и $\int_{hB_{km}} F_\varepsilon(z)\,dz \leq 1$.

По теореме Лебега

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E}U_1 = \mathbf{E}\lim_{\varepsilon\to 0} U_1 = \mathbf{E}\Bigg[-\sum_{V_k}\sum_{m} Z_{km}^{(r)} y^{-1} X_{km}^{(r)}(y,h) I_{km}(y,h) - \\ - \sum_{V_k}\sum_{m} Z_{km}^{(l)} y^{-1} X_{km}^{(l)}(y,h) I_{km}(y,h)\Bigg]. \tag{3.2}$$

Сумму слагаемых, содержащих $F'_\varepsilon(z)$ (см. (2.5)) разделим на две суммы :

$$U_2 = \sum_{V_k}\sum_{m}\left[Z_{km}^{(r)}\int_{hB_{km}} X_{km}^{(r)}(z,h)\,F'_\varepsilon(z)\,dz + Z_{km}^{(l)}\int_{hB_{km}} X_{km}^{(l)}(z,h)\,F'_\varepsilon(z)\,dz\right] = \\ = U_{21} + U_{22}.$$

По определению, $U_{21} = \sum_{km} a_{km}b_{km}$, где a_{km}–члены в квадратных скобках, а

$$b_{km} = b_{km}(s) = 1, \text{ если } (y-\varepsilon, y+\varepsilon) \subset hB_{km}\,,\ 0 - - - \text{ в противном случае}$$

и $U_{22} = \sum_{km} a_{km}(1-b_{km})$.

Рассмотрим асимптотическое поведение (при $\varepsilon \to 0$) члена $\mathbf{E}U_{21}$. Имеем

$$b_{km}\int_{hB_{km}} X_{km}^{(r/l)}(z,h)F'_\varepsilon(z)\,dz = (2\varepsilon)^{-1}\left[X_{km}^{(r/l)}(y-\varepsilon,h) - X_{km}^{(r/l)}(y+\varepsilon,h)\right] b_{km} = \\ = (2\varepsilon)^{-1}\left[\frac{h^2q_{km}^2}{(y-\varepsilon)^2}u_1^{(r/l)} - \frac{h^2q_{km}^2}{(y+\varepsilon)^2}u_1^{(r/l)}\right] b_{km} + \\ +(2\varepsilon)^{-1}\left[hq_{km}\frac{\sqrt{(y-\varepsilon)^2 - h^2q_{km}^2}}{(y-\varepsilon)^2}u_2^{(r/l)} - hq_{km}\frac{\sqrt{(y+\varepsilon)^2 - h^2q_{km}^2}}{(y+\varepsilon)^2}u_2^{(r/l)}\right] b_{km}. \tag{3.3}$$

Оценка 2. Для шейпов $s \in$А3 разность во второй строке (3.3) ограничена на множестве $\{\varepsilon < y/2, h > 0\}$.

Доказательство : следует из

$$(2\varepsilon)^{-1}\left|\frac{1}{(y-\varepsilon)^2} - \frac{1}{(y+\varepsilon)^2}\right| < \frac{2}{(y-\varepsilon)^3} < \frac{16}{y^3}$$

и того факта, что для шейпов $s \in$А3, из $b_{km}(s) = 1$ следует $h < y/2$.

Оценим разность в третьей строке формулы (3.3).

Оценка 3. На множестве

$$\{(q,\varepsilon): 0 < q < y-\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < y/2\} \tag{3.4}$$

имеем

$$(2\varepsilon)^{-1}\left| q\frac{\sqrt{(y+\varepsilon)^2-q^2}}{(y+\varepsilon)^2} - q\frac{\sqrt{(y-\varepsilon)^2-q^2}}{(y-\varepsilon)^2}\right| < C_1(y-q)^{-1/2},$$

где C_1 — константа не зависящая от ε и q.

Доказательство : Рассмотрим функцию

$$(2\varepsilon)^{-1}\sqrt{y-q}\left| q\frac{\sqrt{(y+\varepsilon)^2-q^2}}{(y+\varepsilon)^2} - q\frac{\sqrt{(y-\varepsilon)^2-q^2}}{(y-\varepsilon)^2}\right|. \tag{3.5}$$

По формуле Тейлора

$$q\frac{\sqrt{(y+\varepsilon)+q}}{(y+\varepsilon)^2} = q\frac{\sqrt{y+q}}{y^2} + \varepsilon\theta_1 \text{ и } q\frac{\sqrt{(y-\varepsilon)+q}}{(y-\varepsilon)^2} = q\frac{\sqrt{y+q}}{y^2} + \varepsilon\theta_2,$$

где обе функции θ_1 и θ_2 ограничены на множестве (3.4). Таким образом, (3.5) запишется в виде

$$(2\varepsilon)^{-1}\sqrt{y-q}\frac{\sqrt{y+q}}{y^2}q\left[\sqrt{y+\varepsilon-q} - \sqrt{y-\varepsilon-q}\right] + \frac{1}{2}\sqrt{y-q}(\theta_1+\theta_2) =$$

$$= (2\varepsilon)^{-1}(y-q)q\frac{\sqrt{y+q}}{y^2}\left[\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{y-q}} - \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{y-q}}\right] + \frac{1}{2}\sqrt{y-q}(\theta_1+\theta_2).$$

Так как для любого $0 \le x \le 1$

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \le \sqrt{2}\,x,$$

предыдущая функция ограничена выражением $\frac{1}{\sqrt{2}}q\frac{\sqrt{y+q}}{y^2}\frac{1}{\sqrt{y}}$. Утверждение доказано.

Так как $b_{km} \le I_{km}(y,h)$ и $hq_{km} \le y$, то используя оценки 2 и 3 получаем

$$U_{21} \le \frac{16}{y^3}2N(N-2) + C_1 y\sum_{B_{km}}\frac{I_{km}(y,h)}{\sqrt{y-hq_{km}}}.$$

А5 : Существует константа $C < \infty$, не зависящая от h, такая что для каждого $h > 0$

$$\mathbf{E}\sum_{B_{km}}\frac{I_{km}(y,h)}{\sqrt{y-hq_{km}}} \le C.$$

Используя теорему Лебега и Условие A5 получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}U_{21}=\mathbf{E}\lim_{\varepsilon\to 0}U_{21}=$$

$$=\mathbf{E}\left[-\sum_{V_h}\sum_{m}Z_{km}^{(r)}\frac{d}{dy}X_{k,m}^{(r)}(y,h)I_{km}(y,h)-\sum_{V_h}\sum_{m}Z_{km}^{(l)}\frac{d}{dy}X_{km}^{(l)}(y,h)I_{km}(y,h)\right]. \tag{3.6}$$

Уравнения (3.2) и (3.6) вместе с Теоремой 2 дают

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}\,U_1+\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}\,U_{21}=\mathbf{E}\int_{[hD]}\delta''(\chi-y)\chi\cot\psi_1\cot\psi_2\,dg. \tag{3.7}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение (при $\varepsilon\to 0$) слагаемого $\mathbf{E}U_{22}$.

На действительной оси рассмотрим случайную совокупность точек $\{hd_i\}\cup\{hq_{km}\}$ (множество концов ветвей hB_{km}, за исключением точки h). Через $n_h(y,\varepsilon)$ обозначим число точек из множества $\{hd_i\}\cup\{hq_{km}\}$, лежащих внутри интервала $(y-\varepsilon,y+\varepsilon)$, так что n_1 относится к $h=1$.

A6 : В случайном множестве $\{d_i\}\cup\{q_{km}\}$ никакие две точки не совпадают с вероятностью $\mathrm{S}=1$. Для каждого y существуют пределы

$$\lambda(y)=\lim_{\varepsilon\to 0}(2\varepsilon)^{-1}\mathrm{S}(n_1(y,\varepsilon)=1)\ \text{и}\ \lim_{\varepsilon\to 0}(2\varepsilon)^{-1}\mathrm{S}(n_1(y,\varepsilon)=l)=0\ \text{для}\ l>1.$$

Отношение $(2\varepsilon)^{-1}\mathbf{E}n_1(y,\varepsilon)$ равномерно ограничено.

Из предположения A6 следует

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}U_{22}=h^{-1}\lambda(h^{-1}y)\Pi(y,h), \tag{3.8}$$

где величина $\Pi(y,h)$ определяется как предел (когда $\varepsilon\to 0$) условного математического ожидания величины

$$\sum\pm[Z_{km}^{(r)}X_{km}^{(r)}(y\mp\varepsilon,h)+Z_{km}^{(l)}X_{km}^{(l)}(y\mp\varepsilon,h)], \tag{3.9}$$

при условии $n_h(y,\varepsilon)=1$. В (3.9) суммирование проводится по ветвям B_{km}, имеющим конец в интервале $(y-\varepsilon,y+\varepsilon)$. Знак перед квадратными скобками "+", если внутренность B_{km} покрывает $y-\varepsilon$, и "−", если B_{km} покрывает $y+\varepsilon$. Из вида (3.9) следует, что $\Pi(y,h)$ равномерно ограничена.

Оценка 4. При Условии А6 отношение $(2\varepsilon)^{-1}\mathbf{E}n_h(y,\varepsilon)$ равномерно ограничено на множестве $\{\varepsilon < y/2, h > 0\}$.

Доказательство : Поскольку

$$\mathbf{E}n_h(y,\varepsilon) = \mathbf{E}n_1(h^{-1}y, h^{-1}\varepsilon),$$

получаем

$$(2h^{-1}\varepsilon)^{-1}\mathbf{E}n_h(y,\varepsilon) = (2h^{-1}\varepsilon)^{-1}\mathbf{E}n_1(h^{-1}y, h^{-1}\varepsilon).$$

Таким образом, Условие А6 приводит к оценке

$$(2\varepsilon)^{-1}\mathbf{E}n_h(y,\varepsilon) < h^{-1}C,$$

где C — некоторая константа. С вероятностью $\mathbf{S} = 1$ множество $\{hd_i\} \cup \{hq_{km}\}$ принадлежит интервалу $(0, h\,N/2)$. Следовательно, если $h < y/N$ и $\varepsilon < y/2$, то $\mathbf{E}n_h(y,\varepsilon) = 0$. Из предыдущего неравенства, для $h > y/N$ имеем

$$(2\varepsilon)^{-1}\mathbf{E}n_h(y,\varepsilon) < NC/y.$$

Равенства (3.7) и (3.8) позволяют найти $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}(U_1 + U_2)$. Наши оценки равномерны по h, так что по теореме Лебега, для каждой вероятностной плотности $V(h)$ имеем

$$\int V(h) \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E}(U_1 + U_2)\, dh = \lim_{\varepsilon\to 0} \int V(h)\mathbf{E}(U_1 + U_2)\, dh.$$

Получаем следующую теорему (вместо математического ожидания $\mathbf{E}$ пишем интеграл относительно $\mathbf{S}$).

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{S}$ *— вероятностное распределение в пространстве равносторонних* N*-угольных шейпов, обладающих плотностью в соотвествующем параметрическом пространстве,* $V(h)$ *и* $W(y)$ *— плотности вероятностных распределений* $\mathbf{V}$ *и* $\mathbf{W}$, $H = \int h\, V(h)\, dh < \infty$.

Если $\mathbf{S}$ *сосредаточено на А3 и имеет свойства А4 – А6, то* $H^{-1}V(h)$ *удовлетворяет интегральному уравнению типа Вольтерра*

$$-W'(y) = H^{-1}V(y) + N^{-1}\int_0^y H^{-1}V(h)\, K(h,y)dh$$

с ограниченным ядром

$$K(h,y)=h^{-1}\lambda(h^{-1}y)\Pi(y,h)+\int \mathbf{S}(ds)\int_{[hD]}\delta''(\chi-y)\chi\,\cot\psi_1\,\cot\psi_2\,dg,$$

где $\int_{[hD]}\delta''(\chi-y)\chi\,\cot\psi_1\,\cot\psi_2\,dg$ *определяется из (2.7).*

Подчеркнем, что свойство Вольтерра следует из (2.8) и из того факта, что для распределений $\mathbf{S}$, сосредаточенных на А3, имеем $\lambda(x)=0$ для $x<1$.

§4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этом параграфе укажем два новых Условия А7 и А8, из которых следует Условие А5.

Пусть многоугольник $\mathbf{D}^{kr}$ получается из $\mathbf{D}$ евклидивым движением; в $\mathbf{D}^{kr}$ вершина V_k совпадает с началом координат O, и соотвествующая сторона a_r совпадает с отрезком $(0,1)$ на оси x в некоторой координатной системе в $\mathbb{R}^2$. Многоугольник $\mathbf{D}^{kl}$ определяется аналогично, заменой a_r на a_l.

А7 : **на каждом многоугольнике $\mathbf{D}^{kr}$ или $\mathbf{D}^{kl}$, любая сторона a_j, которая не имеет общей вершины с a_r (соотвественно, a_l) продолжается до случайной прямой g_j, с вероятностным распределением $\rho_j(g)dg$, а плотность $\rho_j(g)$ ограничена, где dg–инвариантная относительно евклидовых движений, мера в пространстве $\mathbf{G}$ прямых на плоскости.**

А8 : **случайный внутренний угол многоугольника $\mathbf{D}$ в каждой вершине V_k тупоугольный и с вероятностю $\mathbf{S}=1$ превосходит $\pi/2+\nu$ для некоторого постоянного $\nu>0$.**

Лемма. *Из Условий А7 и А8 следует Свойство А5.*

Доказательство : На окружности $C(y,O)$ радиуса y с центром в O рассмотрим случайные множества $\{t_j\}^{kr}_{y,h}$. По определению, $\{t_j\}^{kr}_{y,h}$ есть множество точек, в которых продолжения $\{g_j\}$ $N-2$ сторон многоугольника $h\mathbf{D}^{kr}$ пересекают $C(y,O)$. Исключены стороны, которые пересекаются в точке O. С каждой случайной точкой t_j связываем случайный угол ξ_j между g_j и касательной к $C(y,O)$ в точке t_j. Другими словами, на $C(y,O)$ расматриваем семейство маркированных точек $\{t_j,\xi_j\}^{kr}_{y,h}$. Маркированные точки $\{t_j,\xi_j\}^{kl}_{y,h}$ определяются аналогично. Так как

$$\sin\xi_j=y^{-1}\sqrt{y^2-h^2q^2_{kj}},$$

то если математическое ожидание

$$\int \mathbf{S}(ds) \sum \frac{1}{\sin \xi_j} \tag{4.1}$$

существует и ограничено на $0 < h < y$, получим А5. Ясно, что (4.1) равно сумме вкладов каждой случайной прямой g_j. Каждый из этих вкладов определяется вероятностным распределением соотвествующей прямой. Из Условия А8 следует, что вклад прямой, содержащей сторону с вершиной в $x = 1$, ограничен. Используя

$$dg = \sin \xi_j \, d\xi_j dl,$$

где dl – мера длины на $C(y, O)$, вклад в (4.1) прямой g_j из числа оставшихся равен

$$\int \frac{1}{\sin \xi_j} h^{-1} \rho_j(h^{-1}g) dg = h^{-1} \int_0^\pi \int_{C(y,0)} \rho_j(h^{-1}g) d\xi_j dl < \infty,$$

где $h^{-1}g$ обозначает прямую, полученную из g с помощью гомотетии плоскости с коефициентом h^{-1}. Замечая, что $\rho_j(h^{-1}g)$ концентрирована на прямых, пересекающих внутренность $C(hN, O)$, т.е. что область интегрирования по $d\xi_j$ имеет порядок h, получаем равномерную оценку. Лемма доказана.

Примеры вероятностных распределений S, удовлетворяющих условиям Теоремы 3, существуют начиная с $N = 5$. Построение для $N = 5$ можно провести следующим образом. Опишем шейп равностороннего пятиугольника парой γ_1, γ_2 внутренних углов, прилежащих к фиксированной стороне a_1 единичной длины. Множество γ_1, γ_2, удовлетворяющее "геометрическим условиям" А3, А4 и А8 содержит окрестность правильного пятиугольного шейпа и, следовательно, имеет не нулевую $d\gamma_1 \, d\gamma_2$–меру. Для того, чтобы удовлетворить "аналитическим условиям" А6 и А7 (и, следовательно, по Лемме, Условию А5), достаточно взять любое вероятностное распределение на множестве, обладающем *ограниченной плотностью* относительно $d\gamma_1 \, d\gamma_2$. Последнее утверждение следует из чисто качественного рассмотрения и имеет место для равносторонних N-угольников с $N > 5$.

ABSTRACT. One of the oldest stereology problems is the so called Wicksell problem. In the plane we have a collection of circular discs of random radii whose centers form a translation invariant point process. The intersections of a "test line" with these discs generate a random segment process in one dimension. The problem asks, given the probability distribution of the length of typical intersection segment, to determine the probability distribution of the typical disc radius. The problem has a well known solution by reduction to Abel integral equation. If the domains are homothetic copies of a single domain that no longer is a circular disc, the global isotropy is saved by subjecting the individual domains to independent uniform rotations. However, no solution seems to exist for the same problem in this more general setting. In the present paper, the domains of random size isotropically scattered in the plane are equilateral N-gons. Additionally, we require that the shapes of the polygons be random and sampled from a probability distribution S in the corresponding space of shapes. We show that under certain conditions as regards S, determination of size distribution can be reduced to solving a Volterra integral equation with bounded kernel depending solely on S. The equilateral triangles and rhombi fall out, but there exist concrete random models of equilateral pentagons satisfying the complete set of the outlined conditions.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, "Convex polygons and random tessellations", In : "Stochastic Geometry", Editors : E. F. Harding and D. G. Kendall, John Wiley, 1974.
2. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
3. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян, Введение в стохастическую геометрию, Москва, Наука, 1989.

15 августа 1998

Институт математики
НАН Армении
E-mail : rhambart@aua.am