О ТАУБЕРОВОЙ ТЕОРЕМЕ КАРАМАТЫ

Э. А. Даниелян, З. С. Микаелян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 33, № 1, 1998

В настоящей работе мы доказываем некоторые аналоги известной тауберовой теоремы Караматы о преобразованиях Лапласа монотонных функций.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Измеримая на $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ функция $L(t) > 0$ называется медленно меняющейся на бесконечности ($t \to +\infty$), если для любого $x > 0$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{L(xt)}{L(t)} = 1. \tag{1}$$

Будем говорить, что функция $L(t)$ меделенно меняется в нуле (при $t \to 0$), если $L(1/t)$ меделенно меняется на бесконечности. Отметим, что сходимость в (1) равномерна на любом $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$ (см. [1]).

Пусть $p(x)$ – монотонная функция на $\mathbb{R}^+$ с преобразованием Лапласа

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} p(x)\, dx, \qquad s > 0. \tag{2}$$

Известная теорема Караматы гласит (см., например, [2], стр. 502) :

1) если $L(t)$ медленно меняется на бесконечности и $0 < \rho < +\infty$, то соотношения

$$F(s) \sim s^{-\rho} L(1/s), \qquad s \to 0, \quad s > 0 \tag{3}$$

и

$$p(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\rho)} t^{\rho - 1} \cdot L(t), \qquad t \to +\infty \tag{4}$$

равносильны;

2) если $L(t)$ медленно меняется в нуле и $0 < \rho < +\infty$, то соотношения

$$F(s) \sim s^{-\rho} L(1/s), \qquad s \to +\infty$$

и

$$p(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\rho)} t^{\rho-1} \cdot L(t), \qquad t \to 0, \quad t > 0 \tag{4a}$$

равносильны.

Здесь $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера, а запись $f \sim g$ означает, что $f/g \to 1$. Простое доказательство теоремы Караматы предложено Феллером (см. [2]).

В настоящей работе мы обобщаем теорему Караматы на случай, когда в сходимости $s \to 0$ не трбуется действительных (положительных) значений s.

Теорема 1.

a) Если $L(t)$ медленно меняется на бесконечности и $0 < \rho < +\infty$, то из (4) следует соотношение

$$F(s) \sim s^{-\rho} L(1/|s|), \qquad s \to 0, \quad Res > 0. \tag{5}$$

b) Если $L(t)$ медленно меняется в нуле и $0 < \rho < +\infty$, то из (4a) следует соотношение

$$F(s) \sim s^{-\rho} L(1/|s|), \qquad s \to \infty, \quad Res > 0.$$

Теорема 2. *Если $L(t)$ медленно меняется на бесконечности и $0 < \rho < 1$, то из (4) следует соотношение*

$$F(s) \sim s^{-\rho} L(1/|s|), \qquad s \to 0, \quad Res \geq 0. \tag{5'}$$

Теорема 3. *Если $L(t)$ медленно меняется в нуле и $1 < \rho < +\infty$, то из (4a) следует соотношение*

$$F(s) \sim s^{-\rho} L(1/|s|), \qquad s \to \infty, \quad Res \geq 0. \tag{5''}$$

Отметим, что теоремы 2 и 3 включают важный случай преобразования Фурье.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В доказательствах теорем 1 — 3 существенно используется следующий результат (см. [3], стр. 62) :

Лемма 1. *Пусть f – комплекснозначаня функция, определенная на полуплоскости $\{s : Re\, s \geq 0\}$, и пусть K – произвольное компактное подмножество множества $\{s : Re\, s \geq 0\} \bigcap \{s\colon |s| > r > 0\}$, где $r > 0$ – некоторое фиксированное число.*

Предположим, что для каждого $s \in \mathbf{G}$ существует предел

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{s}{n}\right) = f_0 \tag{6}$$

и сходимость в (6) равномерна на любом компакте K. Тогда

$$\lim_{\substack{s\to 0\\ s\in G}} f(s) = f_0. \tag{7}$$

Для любого $\Psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ мы будем использовать символ $s \underset{\Psi}{\to} 0$ для обозначения сходимости $s \to 0$, причем

$$s \to 0, \quad \mathrm{Re}\, s \geq 0, \quad \arg s \to \Psi.$$

Лемма 2. *Если монотонная на $(0, \infty)$ функция $p(t)$ имеет представление (4) для $1 < \rho < 1$, где $L(t)$ медленно меняется на бесконечности, то*

$$F(s) \sim s^{-\rho}\, L(1/|s|), \qquad s \underset{\Psi}{\to} 0. \tag{8}$$

Если мнотонная на $(0, \infty)$ функция $p(t)$ имеет представление (4) для $0 < \rho < +\infty$, где $L(t)$ медленно меняется в нуле, то

$$F(s) \sim s^{-\rho}\, L(1/|s|), \qquad s \to \infty, \quad \mathrm{Re}\, s \geq 0, \quad \arg s \to \Psi_0, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \Psi_0 \leq \frac{\pi}{2}. \tag{8'}$$

Доказательство леммы 2. Нетрудно увидеть, что утверждение леммы достаточно доказать для

$$p(t) = \frac{1}{\Gamma(\rho)}\, t^{\rho-1}\, L(t), \qquad t > 0. \tag{9}$$

Имеем

$$F(s) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^\infty e^{-sx}\, x^{\rho-1}\, L(x)\, dx. \tag{10}$$

Запишем s в виде $s = |s| \exp(i\,\Psi(s))$, $\Psi(s) = \arg s$ и в (10) произведем замену переменной $x = \frac{t}{|s|}$, в результате чего получим

$$\Gamma(\rho) \cdot s^\rho \cdot F(s) = e^{i\Psi(s)\rho} \int_0^\infty \exp\left(-e^{-i\Psi(s)}\, t\right) t^{\rho-1}\, L\left(\frac{t}{|s|}\right) dt. \tag{11}$$

Вычислим предел в (11) при $s \underset{\Psi}{\to} 0$. Из (10) имеем

$$\frac{\Gamma(\rho)\, s^\rho\, F(s)}{L(1/|s|)} = g_1(s) + g_2(s), \tag{12}$$

где

$$g_1(s) = e^{i\Psi(s)\rho} \int_1^\infty \exp\left(-e^{i\Psi(s)}t\right) A(t,s)\,dt, \tag{13}$$

$$g_2(s) = e^{i\Psi(s)\rho} \int_0^1 \exp\left(-e^{i\Psi(s)}t\right) A(t,s)\,dt \tag{14}$$

и

$$A(t,s) = t^{\rho-1}\frac{L(t/|s|)}{L(1/|s|)}.$$

Проинтегрируем (13) по частям, что дает

$$g_1(s) = e^{i\Psi(s)(1-\rho)}\left\{\exp\left(-e^{i\Psi(s)}\right) + \int_1^\infty \exp\left(-e^{i\Psi(s)}t\right) dA(t,s)\right\}. \tag{15}$$

Легко видеть, что

$$\lim_{s\to 0} A(t,s) = t^{\rho-1}, \qquad t > 0. \tag{16}$$

Так как в силу (9) функция $t^{\rho-1}L(t)$ монотонна, то

$$\lim_{R\to+\infty} \bigvee_{t=R}^{\infty} A(t,s) = \lim_{R\to+\infty} A(R,s) = 0,$$

где $\bigvee_a^b$ – вариация на $[a,b]$.

Таким образом, выполнены условия замечания 3 из [4] (см. стр. 317). Поэтому, в правой части (15) можно перейти к пределу $s \underset{\Psi}{\to} 0$ под знаком интеграла.

Применяя оператор обратного интегрирования по частям в предельном равенстве при $s \underset{\Psi}{\to} 0$, получим

$$g_1(s) \sim e^{i\Psi_0\rho} \int_1^\infty t^{\rho-1} \exp\left(-e^{i\Psi_0}t\right) dt. \tag{17}$$

Покажем, что можно считать $L(t) \equiv 0$ в некоторой окрестности нуля. Действительно, для любого $\delta > 0$ и фиксированного $s_0 > 0$ при $s \to 0$, $\mathrm{Re}\,s \geq 0$ имеем

$$\left|\int_0^\delta e^{-sx} x^{\rho-1} L(x)\,dx\right| \leq \int_0^\delta x^{\rho-1} L(x)\,dx \leq e^{s_0\delta}\,\Gamma(\rho)\,F(s_0) < +\infty.$$

Поэтому, учитывая, что $F(s) \to \infty$ при $s \to 0$, $\mathrm{Re}\,s \geq 0$, мы заключаем, что соотношения

$$\frac{s^\rho F(s)}{L(1/|s|)} \to 1, \quad s \to 0, \quad \mathrm{Re}\,s > 0 \tag{18}$$

и

$$\frac{s^\rho}{L(1/|s|)} \int_0^\infty e^{-sx} x^{\rho-1} L(x)\,dx \to \Gamma(\rho), \quad s \to 0, \quad \mathrm{Re}\,s \geq 0$$

равносильны.

Пусть $L(t) = 0$ в некоторой окрестности $t = 0$. Так как для любого $\gamma > 0$ (см. [1], стр. 26)

$$L\left(\frac{t}{|s|}\right) < 2t^{-\gamma} L\left(\frac{1}{|s|}\right), \qquad 0 < t \le 1,$$

то устремляя $s \to 0$ в (14), получаем

$$g_2(s) \sim e^{i\Psi_0 \rho} \int_0^1 t^{\rho-1} \exp\left(-e^{i\Psi_0} t\right) dt.$$

Учитывая (12) — (14), (17) и равенство

$$e^{i\Psi(s)\rho} \int_0^\infty \exp\left(-e^{i\Psi(s)} t\right) t^{\rho-1}\, dt = \Gamma(\rho), \qquad 0 < \rho < +\infty, \tag{19}$$

(см. [5], стр. 322), получаем (18). Лемма 2 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 — 3

Доказательство теоремы 1. Для функции

$$f(s) = \frac{s^\rho \cdot F(s)}{L(1/|s|)} \tag{20}$$

соотношения (7) и (5) равносильны. Идея доказательства теоремы 1 заключается в проверке того, что функция $f(s)$, определенная формулой (20), удовлетворяет условиям леммы 1 с $f_0 = 1$.

Условие (6) в нашем случае означает, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(s/n)^\rho \cdot F(s/n)}{L(n/|s|)} = 1 \tag{21}$$

для любого s, $\operatorname{Re} s > 0$.

Соотношение (21) следует из леммы 2. Теперь докажем, что сходимость в (21) равномерна на любом компактном подмножестве K множества $\{s:\ -\Psi_0 < < \arg s < \Psi_0,\ R_1 < |s| < R_2\}$, где $0 < \Psi_0 < \pi/2$ и $0 < R_1 < R_2 < \infty$. Для любых $s \in K$ и $t > 0$ имеем

$$\left|\exp\left(e^{-\Psi(s)} t\right)\right| = \exp\left(-\cos\Psi(s)\, t\right) \le e^{-at}, \tag{22}$$

где $a = \cos\Psi_0 > 0$.

Учитывая, что $\Psi(s) = \Psi(s/n)$ для всех $n \ge 1$, в силу (11) и (19) имеем

$$f(s/n) - 1 = \frac{1}{\Gamma(\rho)} e^{i\Psi(s)\rho} \int_0^\infty \exp\left(e^{-\Psi(s)} t\right) t^{\rho-1} \left[\frac{L(nt/|s|)}{L(n/|s|)} - 1\right] dt,\ n \ge 1,\ s \in K.$$

Из этого равенства и оценки (22) при всех $n \geq 1$ и $s \in K$ следует неравенство

$$f(s/n) - 1 \leq I_n(|s|, 0), \tag{23}$$

где

$$I_n(|s|, y) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_y^{\infty} e^{-at}\, t^{\rho-1} \left| \frac{L(nt/|s|)}{L(n/|s|)} - 1 \right| dt, \quad y \geq 0.$$

По данному $\varepsilon > 0$ при малом $\delta > 0$ выберем $y > 0$ так, чтобы

$$\int_y^{\infty} e^{-at}\, t^{\rho-1}\, dt < \varepsilon \quad \text{и} \quad \int_y^{\infty} e^{-at}\, t^{\rho-1+\delta}\, dt < \varepsilon. \tag{24}$$

Поскольку

$$\frac{1}{R_2} \leq \frac{1}{|s|} \leq \frac{1}{R_1} \quad \text{для всех} \quad s \in K,$$

то при фиксированном $y > 0$ множества чисел $\{y/|s|\}$ и $\{1/|s|\}$ ограничены и отделены от нуля. Имеем

$$L(ny/|s|) \sim L(n/|s|) \sim L(ny/R_i), \quad n \to +\infty, \quad i = 1, 2 \quad \text{равномерно по} \quad s \in K \tag{25}$$

и, одновременно, для любого $y_0 \in (0, y)$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{L(nt/|s|)}{L(n/|s|)} - 1 \right) = 0, \quad \text{равномерно по} \quad t \in [y_0, y] \quad \text{и} \quad s \in K. \tag{26}$$

Обозначим $x^{-\delta}\overline{L}(x) = \sup\limits_{x \leq t < +\infty} t^{-\delta} L(t)$. Тогда (см. [1], стр. 27) $\overline{L}(x) \sim L(x)$ при $x \to +\infty$ и

$$R_1^{\delta}\, \overline{L}(ny/R_1) \leq |s|^{\delta}\, \overline{L}(ny/|s|) \leq R_2^{\delta}\, \overline{L}(ny/R_2), \quad \text{для всех} \quad n \geq 1 \quad \text{и} \quad s \in K. \tag{27}$$

Так как $\overline{L}(ny/R_i) \sim L(ny/R_i)$ при $n \to +\infty$ и $i = 1, 2$, то, согласно (25) и (27)

$$\overline{L}(ny/|s|) < 2\, L(n/|s|) \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{\delta}, \quad \text{при всех} \quad n \geq n_0 \quad \text{и} \quad s \in K. \tag{28}$$

Далее, для любого $\gamma > 0$ (см. [1], стр. 26)

$$\frac{L(nt/|s|)}{L(n/|s|)} < 2\, y^{\gamma}\, t^{-\gamma}, \quad \text{для всех} \quad n \geq n_0, \quad t \in (0, y_0], \quad s \in K. \tag{29}$$

С помощью (24) и (28) оценим интеграл $I_n(|s|, y)$. Для всех $n \geq n_0$ и $s \in K$

$$\Gamma(\rho)\, I_n(|s|, y) \leq \frac{(n/|s|)^{\delta}}{L(n/|s|)} \int_y^{\infty} e^{-at} t^{\rho-1+\delta} \left(\frac{n}{|s|} t \right)^{-\delta} L(nt/|s|)dt + \int_y^{\infty} e^{-at} t^{\rho-1}\, dt \leq$$

$$\leq \frac{\overline{L}(ny/|s|)\, y^{-\delta}}{L(n/|s|)} \int_y^{\infty} e^{-at}\, t^{\rho-1+\delta}\, dt + \int_y^{\infty} e^{-at}\, t^{\rho-1}\, dt < \left(2 \left(\frac{R_2}{yR_1} \right)^{\delta} + 1 \right) \varepsilon. \tag{30}$$

В силу (26) и (29)

$$I_n(|s|,0) - I_n(|s|,y) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^y e^{-at} t^{\rho-1} \left| \frac{L(nt/|s|)}{L(n/|s|)} - 1 \right| dt < \varepsilon$$

для всех $n \geq n_0$ и $s \in K$.

Из (23), (30) и последнего неравенства мы заключаем, что

$$0 \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} |f(s/n) - 1| \leq \varepsilon \quad \text{для всех} \quad s \in K.$$

В силу произвольности ε, при $\varepsilon \to 0$ получаем утверждение теоремы. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $s_n \to 0$, причем $\mathrm{Re} s_n \geq 0$. Если последовательность $\{s_n\}$ содержит только конечное число элементов со стремящимися к нулю действительными частями, то подпадаем в условия теоремы 1. То же самое верно и при $\mathrm{Re}\, s_n > 0$ для бесконечно многих значений n. В противном случае $\{s_n\}$ распадается на две последовательности $\{s'_n\}$ и $\{s''_n\}$ с $\mathrm{Re} s'_n > 0$ и $\mathrm{Re} s''_n = 0$, соответственно. По теореме 1 и лемме 2 асимптотики $F(s'_n)$ и $F(s''_n)$ при $n \to \infty$ выражаются одинаковой формулой. Поэтому та же формула верна для $F(s_n)$ при $n \to +\infty$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2.

ABSTRACT. In this paper we prove some analogs of a well-known Tauberian theorem of J. Karamata on Laplace transforms of monotone functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Сенета, Правильно меняющиеся функции, М., Наука, 1985.
2. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, 1984.
3. K. Nevels, On Stable Attraction and Tauberian Theorems, Groningen, 1974.
4. Г. Е. Шилов, Математический анализ. Специальный курс, издание второе, М., 1961.
5. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. Н. Маричев, Интегралы и ряды. Элементарные функции, М., Наука, 1981.

19 ноября 1997

Ереванский государственный университет