

ЛЕММА ШВАРЦА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ШАРЕ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Н. Е. Товмасян, Т. М. Кошелева

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 5, 1996

В работе доказано, что если $u(x, y, z)$ — гармоническая функция в шаре $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ и удовлетворяет условиям $|u(x, y, z)| \leq 1$ в этом шаре, $u(0, 0, 0) = 0$, то справедлива оценка

$$|u(x, y, z)| \leq \frac{2(1 + \tau)}{\sqrt{1 + \tau^2}(\sqrt{1 + \tau^2} + 1 - \tau)} - 1,$$

где $\tau = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Полученные результаты применены для эффективного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаровом слое.

ВВЕДЕНИЕ

Если функция $u(x, y)$ гармонична в круге $x^2 + y^2 < 1$, $|u(x, y)| \leq 1$, то для нее справедлива следующая оценка [1] (стр. 102) :

$$|u(x, y) - u(0, 0)| \leq \frac{4}{\pi} \arcsin \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Эта оценка называется *arcsinus-формулой*. В книге [2] (стр. 169, задача 288) эта оценка уточняется (аналог леммы Шварца для аналитических в круге функций) :

Лемма 1. Если функция $u(x, y)$ гармонична в круге $x^2 + y^2 < 1$ и удовлетворяет условиям $|u(x, y)| \leq 1$, $u(0, 0) = 0$, то имеет место оценка

$$|u(x, y)| \leq \frac{4}{\pi} \arctan \sqrt{x^2 + y^2}.$$

В данной работе лемма Шварца распространяется на случай гармонических в шаре функций :

Лемма 2. Если функция $u(x, y, z)$ гармонична в шаре $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r < 1$, внутри которого удовлетворяет условиям $|u(x, y, z)| \leq 1$ и $u(0, 0, 0) = 0$, то

$$|u(x, y, z)| \leq \frac{2(1+r)}{\sqrt{1+r^2}(\sqrt{1+r^2}+1-r)} - 1. \quad (1)$$

При доказательстве леммы Шварца для гармонических в круге функций существенно используются методы теории функций комплексного переменного, неприменимые в трехмерном случае, поэтому здесь предлагается иной метод доказательства указанной леммы. Далее, оценка (1) применяется для эффективного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаровом слое.

§1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ ШВАРЦА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ В ШАРЕ ФУНКЦИЙ

Лемма 3. Пусть $u_1(x, y, z)$ — гармоническая в шаре $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ функция, удовлетворяющая условиям $|u(x, y, z)| \leq 1$ при $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ и

$$u_1(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{при } x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z > 0, \\ -1 & \text{при } x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Тогда

$$u_1(0, 0, r) = \frac{2(1+r)}{\sqrt{1+r^2}(\sqrt{1+r^2}+1-r)} - 1, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (3)$$

Доказательство. Как известно, $u_1(0, 0, r)$ определяется формулой Пуассона (см. [3], стр. 326)

$$u_1(0, 0, r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{(1-r^2) \sin \theta}{(1+r^2-2r \cos \theta)^{3/2}} d\theta \right) d\varphi - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{(1-r^2) \sin \theta}{(1+r^2-2r \cos \theta)^{3/2}} d\theta \right) d\varphi. \quad (4)$$

Для функции $u(x, y, z) = 1$ эта формула примет вид

$$1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{(1-r^2) \sin \theta}{(1+r^2-2r \cos \theta)^{3/2}} d\theta \right) d\varphi. \quad (5)$$

Суммируя (4) и (5), получим

$$u_1(0, 0, r) + 1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{(1-r^2) \sin \theta}{(1+r^2-2r \cos \theta)^{3/2}} d\theta \right) d\varphi. \quad (6)$$

Интегрируя (6), получим формулу (1). Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть $u(x, y, z)$ гармонична в шаре $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, непрерывна в замкнутом шаре $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ и удовлетворяет условиям $|u(x, y, z)| \leq 1$ при $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $u(0, 0, 0) = 0$. Покажем, что функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет неравенству (1). Сначала покажем справедливость неравенства (1) в точках с координатами $(0, 0, r)$, $0 \leq r < 1$. Согласно формуле Пуассона

$$u(0, 0, r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \frac{(1-r^2) \sin \theta}{(1+r^2-2r \cos \theta)^{3/2}} u(p) d\theta \right) d\varphi, \quad (7)$$

где

$$p = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta). \quad (8)$$

Пусть $u_1(x, y, z)$ — гармоническая функция, определенная в лемме 3. Суммируя (4) и (7), получим

$$u_1(0, 0, r) + u(0, 0, r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \frac{(1-r^2) \sin \theta}{(1+r^2-2r \cos \theta)^{3/2}} f(\varphi, \theta) d\theta \right) d\varphi, \quad (9)$$

где

$$f(\varphi, \theta) = \begin{cases} 1 + u(p) & \text{при } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ -1 + u(p) & \text{при } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь координаты точки p определяются формулой (8). Подставляя в (7) $r = 0$ и используя условие $u(0, 0, 0) = 0$, получим

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi u(p) \sin \theta d\theta \right] d\varphi = 0. \quad (11)$$

Из (10) и условия $|u_1(x, y, z)| \leq 1$ следует

$$f(\varphi, \theta) \geq 0 \quad \text{при } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad (12)$$

$$f(\varphi, \theta) \leq 0 \quad \text{при } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \quad (13)$$

Из (10) и (12) следует равенство

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi f(\varphi, \theta) \sin \theta d\theta \right] d\varphi = 0. \quad (14)$$

Равенство (9) можно записать в виде

$$u_1(0, 0, r) + u(0, 0, r) = I_1(r) + I_2(r), \quad (15)$$

где

$$I_1(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{(1-r^2) \sin \theta}{(1+r^2-2r \cos \theta)^{3/2}} f(\varphi, \theta) d\theta \right) d\varphi,$$

$$I_2(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{(1-r^2) \sin \theta}{(1+r^2-2r \cos \theta)^{3/2}} f(\varphi, \theta) d\theta \right) d\varphi.$$

Очевидно, что

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos \theta} \geq \frac{1-r^2}{1+r^2} \quad \text{при} \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad (16)$$

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos \theta} \leq \frac{1-r^2}{1+r^2} \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \quad (17)$$

Поэтому из неравенств (12), (13), (16) и (17) имеем

$$I_1(r) \geq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1-r^2}{1+r^2} \sin \theta f(\varphi, \theta) d\theta \right) d\varphi, \quad (18)$$

$$I_2(r) \geq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2} \sin \theta f(\varphi, \theta) d\theta \right) d\varphi. \quad (19)$$

Суммируя (18) и (19) и используя равенство (14), получим $I_1(r) + I_2(r) \geq 0$.

Следовательно

$$u_1(0, 0, r) + u(0, 0, r) \geq 0. \quad (20)$$

Аналогично мы получим, что

$$u(0, 0, r) - u_1(0, 0, r) \leq 0. \quad (21)$$

Неравенства (20) и (21) можно записать в виде

$$|u(0, 0, r)| \leq u_1(0, 0, r),$$

где $u_1(0, 0, r)$ определяется формулой (3).

Пусть теперь (x_0, y_0, z_0) — произвольная точка, $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$. Тогда при помощи поворота координатной системы доказательство оценки (1) в точке (x_0, y_0, z_0) сведем к доказательству этой же оценки в точке $(0, 0, r)$ при $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. Таким образом, лемма 2 доказана для гармонических функций, непрерывных в замкнутом шаре $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ и удовлетворяющих условиям $|u(x, y, z)| \leq 1$ и $u(0, 0, 0) = 0$.

Пусть теперь $|u(x, y, z)| \leq 1$ при $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ и $u(0, 0, 0) = 0$. Здесь не требуется непрерывности $u(x, y, z)$ в замкнутом шаре $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Рассмотрим функцию $W(x, y, z) = u(Rx, Ry, Rz)$, $0 \leq R < 1$. Ясно, что $W(x, y, z)$ непрерывна в замкнутом шаре $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Поэтому для $W(x, y, z)$ имеет место оценка (1), т.е.

$$|u(Rx, Ry, Rz)| \leq \psi(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (22)$$

где $\psi(r)$ определяется формулой (1), т.е.

$$\psi(r) = \frac{2(1+r)}{\sqrt{1+r^2}(\sqrt{1+r^2}+1-r)} - 1. \quad (23)$$

Переходя в (22) к пределу при $R \rightarrow 1$, получим неравенство (1). Лемма 2 доказана.

Замечание. Легко установить, что функция $\psi(r)$, определенная формулой (23), удовлетворяет оценке

$$0 \leq \psi(r) \leq \frac{3}{2}r, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (24)$$

§2. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ШАРОВОМ СЛОЕ

Пусть D – шаровой слой, ограниченный сферами σ_1 и σ_2 :

$$\sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2, \quad \sigma_2: x^2 + y^2 + z^2 = R_2^2, \quad R_1 > R_2.$$

Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (x, y, z) \in D \quad (25)$$

с граничными условиями Дирихле

$$u(x, y, z) = f_1(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \sigma_1, \quad (26)$$

$$u(x, y, z) = f_2(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \sigma_2, \quad (27)$$

где $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ – заданные вещественные непрерывные на σ_1 и σ_2 , соответственно, функции.

Задача (25) – (27) рассмотрена в монографии [4] (стр. 293). Там же эта задача решалась следующим образом. Заданные на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ функции

$f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ разлагались в ряд по сферическим функциям, а решение $u(x, y, z)$ представлялось в виде

$$u(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) J_n(\theta, \varphi),$$

где A_n и B_n – постоянные, (r, θ, φ) – сферические координаты точки (x, y, z) , а $J_n(\theta, \varphi)$ – сферическая функция порядка n .

В [4] не оценивается остаточный член полученного ряда. В случае, когда $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ – лишь непрерывные функции, получение такой оценки предложенным методом представляет значительные трудности.

Мы предлагаем искать решение этой задачи в виде ряда по определенным гармоническим функциям. Используя лемму 2 Шварца, нам удастся получить оценку остаточного члена полученного ряда для любых непрерывных данных $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$.

Рассмотрим следующие случаи.

1) Пусть $f_1(x, y, z) = c_1$ и $f_2(x, y, z) = c_2$, где c_1 и c_2 – заданные вещественные постоянные. Тогда решение задачи (25) – (27) определяется формулой

$$u(x, y, z) = \frac{a_1}{r} + a_2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (28)$$

где

$$a_1 = \frac{(c_2 - c_1)R_1 R_2}{R_1 - R_2}, \quad a_2 = \frac{c_1 R_1 - c_2 R_2}{R_1 - R_2}.$$

2) Пусть $f_2(x, y, z) = 0$, а $f_1(x, y, z)$ удовлетворяет условию

$$\iint_{\sigma_1} f_1(x, y, z) dS = 0. \quad (29)$$

Обозначим через $V(x, y, z)$ гармоническую в шаре $x^2 + y^2 + z^2 < R_1^2$ функцию, удовлетворяющую условию Дирихле

$$V(x, y, z) = f_1(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \sigma_1. \quad (30)$$

Как известно $V(x, y, z)$ определяется формулой Пуассона

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R_1} \iint_{\sigma_1} \frac{f_1(Q)(R_1^2 - r^2)}{r_0^3} dS_Q, \quad (31)$$

где dS_Q - элемент площади сферы σ_1 , а

$$Q = (\xi, \eta, \zeta), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_0 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

Из условия (21) следует, что $V(0, 0, 0) = 0$. Согласно принципу максимума

$$|V(x, y, z)| \leq A, \quad A = \max_{(x, y, z) \in \sigma_1} |f_1(x, y, z)|. \quad (32)$$

Поэтому для функции $\frac{1}{A}V(xR_1, yR_1, zR_1)$ имеет место утверждение леммы 2, т.е.

$$\frac{|V(xR_1, yR_1, zR_1)|}{A} \leq \psi(r) \leq \frac{3}{2}r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (33)$$

Из (24) и (33) получим

$$|V(x, y, z)| \leq \frac{3}{2}A \frac{r}{R_1}, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (34)$$

Как известно (см. [3]), решение $u(x, y, z)$ уравнения Лапласа в области D представляется в виде

$$u(x, y, z) = V_1(x, y, z) - V_2(x, y, z), \quad (35)$$

где $V_1(x, y, z)$ гармонична в шаре $x^2 + y^2 + z^2 < R_1^2$, а $V_2(x, y, z)$ гармонична вне шара $x^2 + y^2 + z^2 < R_2^2$ и $V_2(x, y, z) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Подставляя (35) в (26) и (27) (при $f_2(x, y, z) = 0$), получим

$$V_1(p) - V_2(p) = f_1(p), \quad \text{при } p = (x, y, z) \in \sigma_1, \quad (36)$$

$$V_1(p) - V_2(p) = 0, \quad \text{при } p \in \sigma_2. \quad (37)$$

Пусть $p = (x, y, z)$ - точка в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Через $\alpha(p)$ обозначим точку, симметричную точке p относительно сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, т.е.

$$\alpha(p) = \left(\frac{R^2 x}{r^2}, \frac{R^2 y}{r^2}, \frac{R^2 z}{r^2} \right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Пусть $W_1(x, y, z)$ - некоторая функция в шаре $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$ (или вне этого шара). Тогда функция

$$W_2(p) = \frac{R}{r} W_1(\alpha(p))$$

называется *преобразованием Кельвина* функции $W_1(p)$. Известно (см. [3], стр. 302), что если $W_1(p)$ гармонична в шаре $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$, то $W_2(p)$ гармонична вне этого шара и наоборот.

Условия (36) и (37) можно представить в виде

$$V_1(x, y, z) - \frac{R_1}{r} V_2 \left(\frac{R_1^2 x}{r^2}, \frac{R_1^2 y}{r^2}, \frac{R_1^2 z}{r^2} \right) = f_1(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \sigma_1, \quad (38)$$

$$\frac{R_2}{r} V_1 \left(\frac{R_2^2 x}{r^2}, \frac{R_2^2 y}{r^2}, \frac{R_2^2 z}{r^2} \right) - V_2(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \sigma_2. \quad (39)$$

Левая часть (38) – гармоническая функция внутри шара $x^2 + y^2 + z^2 < R_1^2$, а левая часть (39) – гармоническая функция вне шара $x^2 + y^2 + z^2 < R_2^2$ и обращается в нуль в бесконечности, поэтому из граничных условий (38) и (39) эти функции определяются при помощи формулы Пуассона

$$V_1(x, y, z) - \frac{R_1}{r} V_2 \left(\frac{R_1^2 x}{r^2}, \frac{R_1^2 y}{r^2}, \frac{R_1^2 z}{r^2} \right) = V(x, y, z), \quad \text{при } r < R_1, \quad (40)$$

$$\frac{R_2}{r} V_1 \left(\frac{R_2^2 x}{r^2}, \frac{R_2^2 y}{r^2}, \frac{R_2^2 z}{r^2} \right) - V_2(x, y, z) = 0, \quad \text{при } r > R_2, \quad (41)$$

где $V(x, y, z)$ определяется формулой (31). Из (41) получим

$$V_2(x, y, z) = \frac{R_2}{r} V_1 \left(\frac{R_2^2 x}{r^2}, \frac{R_2^2 y}{r^2}, \frac{R_2^2 z}{r^2} \right). \quad (42)$$

Подставляя $V_2(x, y, z)$ из (42) в (40), получим

$$V_1(x, y, z) = q V_1(q^2 x, q^2 y, q^2 z) + V(x, y, z), \quad q = \frac{R_2}{R_1}, \quad x^2 + y^2 + z^2 < R_1^2. \quad (43)$$

Так как $0 < q < 1$, то уравнение (43) можно решить методом последовательных приближений :

$$V_1(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k V(q^{2k} x, q^{2k} y, q^{2k} z). \quad (44)$$

Подставляя $V_2(x, y, z)$ из (44) в (42), получим

$$V_2(x, y, z) = \frac{R_2}{r} \sum_{k=0}^{\infty} q^k V \left(q^{2k} \frac{R_2^2 x}{r^2}, q^{2k} \frac{R_2^2 y}{r^2}, q^{2k} \frac{R_2^2 z}{r^2} \right). \quad (45)$$

Так как $0 < q < 1$ и V удовлетворяет оценке (32), то ряды (44) и (45) сходятся равномерно в замкнутом шаровом слое $R_2^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R_1^2$. Таким образом,

решение задачи (25) – (27) определяется формулой (35), где $V_1(x, y, z)$ и $V_2(x, y, z)$ определяются при помощи рядов (44) и (45). Следовательно, в качестве n -го приближения решения задачи (25) – (27) берем следующую функцию :

$$u_n(x, y, z) = \sum_{k=0}^{n-1} q^k V(q^{2k}x, q^{2k}y, q^{2k}z) - \frac{R_2}{r} \sum_{k=0}^{n-1} q^k V\left(q^{2k} \frac{R_2^2 x}{r^2}, q^{2k} \frac{R_2^2 y}{r^2}, q^{2k} \frac{R_2^2 z}{r^2}\right). \quad (46)$$

Так как $V(x, y, z)$ – гармоническая функция в шаре $x^2 + y^2 + z^2 < R_1^2$, то каждый член рядов (44) и (45) является гармонической функцией в области D .

Оценим погрешность решения $u(x, y, z) - u_n(x, y, z)$, где $u(x, y, z)$ – точное решение задачи (25) – (27). Из условия (30) следует, что гармоническая в области D функция $u_n(x, y, z)$ удовлетворяет граничным условиям

$$u_n(x, y, z) = -\frac{R_2}{r} q^{n-1} V\left(q^{2n-2} \frac{R_2^2 x}{r^2}, q^{2n-2} \frac{R_2^2 y}{r^2}, q^{2n-2} \frac{R_2^2 z}{r^2}\right) + f_1(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \sigma_1, \quad (47)$$

$$u_n(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \sigma_2. \quad (48)$$

Из (26), (27) (при $f_2(x, y, z) = 0$), (47) и (48) получим

$$u(x, y, z) - u_n(x, y, z) = \frac{R_2}{r} q^{n-1} V\left(q^{2n-2} \frac{R_2^2 x}{r^2}, q^{2n-2} \frac{R_2^2 y}{r^2}, q^{2n-2} \frac{R_2^2 z}{r^2}\right), \quad (x, y, z) \in \sigma_1, \quad (49)$$

$$u(x, y, z) - u_n(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \sigma_2. \quad (50)$$

Так как $u(x, y, z) - u_n$, $n = 1, 2, \dots$ – гармонические функции в области D , то из условий (49), (50) и принципа максимума для гармонических функций получим

$$|u(x, y, z) - u_n(x, y, z)| \leq R_2 q^{n-1} \max_{(x, y, z) \in \sigma_1} \left| \frac{1}{r} V\left(q^{2n-2} \frac{R_2^2 x}{r^2}, q^{2n-2} \frac{R_2^2 y}{r^2}, q^{2n-2} \frac{R_2^2 z}{r^2}\right) \right|. \quad (51)$$

Из оценок (34) и (51) имеем

$$|u(x, y, z) - u_n(x, y, z)| \leq \frac{3}{2} A q^{3n}, \quad A = \max_{p \in \sigma_1} |f_1(p)|.$$

Следовательно, погрешность n -го приближения не превышает $\frac{3}{2} A q^{3n}$ и при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю, как убывающая геометрическая прогрессия.

Пусть теперь в граничном условии (26), (27) $f_1(x, y, z) = 0$, а $f_2(x, y, z)$ удовлетворяет условию $\iint_{\sigma_2} f_2(x, y, z) = 0$. После применения преобразования Кельвина

$$V(x, y, z) = \frac{1}{r} u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right) \quad (52)$$

этот случай приводится к вышерассмотренному.

3) Теперь рассмотрим общий случай. Представим функции f_1 и f_2 в виде

$$f_k(x, y, z) = g_k(x, y, z) + c_k, \quad k = 1, 2, \quad (53)$$

где

$$c_k = \frac{1}{4\pi R_k^2} \iint_{\sigma_k} f_k(x, y, z) dS, \quad k = 1, 2.$$

Очевидно, что

$$\iint_{\sigma_k} g_k(x, y, z) dS = 0, \quad k = 1, 2.$$

Используя представление (53), общий случай приведем к случаям 1) и 2).

Рассмотрим теперь задачу Дирихле для уравнения Лапласа в области, ограниченной сферами

$$\begin{cases} \sigma'_1: x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2, \\ \sigma'_2: (x-d)^2 + y^2 + z^2 = R_2^2, \end{cases} \quad d > 0, \quad d + R_2 < R_1. \quad (54)$$

При помощи параллельного переноса системы координат эту задачу можно рассматривать в области D_0 , ограниченной сферами

$$\begin{cases} \sigma_1: (x-x_0)^2 + y^2 + z^2 = R_1^2, \\ \sigma_2: (x-x_0-d)^2 + y^2 + z^2 = R_2^2, \end{cases}$$

где x_0 — произвольно заданная отрицательная постоянная, $x_0 < -R_1$. В дальнейшем будем выбирать x_0 таким образом, чтобы обратное преобразование

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \zeta = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

переводило сферы σ_1 и σ_2 в концентрические сферы γ_1 и γ_2 . Центры сфер γ_1 и γ_2 расположены на оси ξ и их координаты равны

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_0 - R_1} + \frac{1}{x_0 + R_1} \right) \quad \text{и} \quad \xi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d + x_0 - R_2} + \frac{1}{d + x_0 + R_2} \right).$$

Радиусы этих сфер, соответственно, равны ρ_1 и ρ_2 :

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x_0 - R_1} + \frac{1}{x_0 + R_1} \right] \quad \text{и} \quad \xi_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{d + x_0 - R_2} + \frac{1}{d + x_0 + R_2} \right].$$

Следовательно, при обратном преобразовании образами σ_1 и σ_2 будут концентрические сферы тогда и только тогда, когда $\xi_1 = \xi_2$, т.е.

$$\frac{1}{x_0 - R_1} + \frac{1}{x_0 + R_1} = \frac{1}{d + x_0 - R_2} + \frac{1}{d + x_0 + R_2}. \quad (55)$$

Найдем решение уравнения (55), удовлетворяющее условию $x_0 < -R_1$. Уравнение (55) можно переписать в виде

$$dx_0^2 + x_0(d^2 - R_2^2 + R_1^2) + dR_1^2 = 0. \quad (56)$$

Из условий (54) следует, что дискриминант уравнения (56) положительный, и одно из решений определяется формулой

$$x_0 = \frac{1}{2d} \left[R_2^2 - d^2 - R_1^2 - \sqrt{(R_2^2 - d^2 - R_1^2)^2 - 4d^2 R_1^2} \right]. \quad (57)$$

Из условия (54) следует, что $x_0 < -R_1$. Пусть значение x_0 выбрано по формуле (57). Тогда, после преобразования Кельвина (52) с $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, задача Дирихле для уравнения Лапласа в области D_0 сводится к той же задаче в шаровом слое

$$\rho_2^2 < (x - \xi_1)^2 + y^2 + z^2 < \rho_1^2.$$

ABSTRACT. We prove that if $u(x, y, z)$ is harmonic in the ball $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ and satisfies the conditions $|u(x, y, z)| \leq 1$ in the same ball and $u(0, 0, 0) = 0$, then

$$|u(x, y, z)| \leq \frac{2(1+r)}{\sqrt{1+r^2}(\sqrt{1+r^2}+1-r)} - 1,$$

where $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. This inequality is applied for an efficient solution of the Dirichlet problem for Laplace equation in a spheric shell.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Hurwitz, R. Courant, Funktionentheorie, vol. 3, Springer, Berlin, 1929.
2. Г. Поля, Г. Серё, Задачи и теоремы из анализа, том I, Наука, М., 1978.
3. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, Наука, М., 1972.
4. С. Г. Михлин, Курс математической физики, Наука, М., 1968.

21 апреля 1995

Ереванский политехнический институт,
Мелитопольский педагогический институт, Украина
E-mail : hterzian@seua.am