О МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТЫХ ФРЕЙМОВЫХ ВАЛЮАЦИЯХ

Г. С. Сукиасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 4, 1996

В работе исследуются валюации (конечно-аддитивные функционалы), определенные на множестве выпуклых многогранников в многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Эти валюации зависят от примарных функций, заданных в пространстве "фреймов". Показано, что все простые валюации могут быть представлены в виде фреймовых валюаций. На основе классической теоремы Гаусса–Остроградского получены необходимые и достаточные условия порождения фреймовыми валюациями локально-конечных знакопеременных мер в $\mathbb{R}^n$.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье исследуются валюации (конечно-аддитивные функционалы), определенные на множестве выпуклых компактных многогранников в многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Главным вопросом является следующий : *при каких условиях эти валюации порождают локально-конечную знакопеременную меру в* $\mathbb{R}^n$, *абсолютно непрерывную относительно n-мерной меры Лебега*? Другими словами, когда существует локально-конечная знакопеременная мера в $\mathbb{R}^n$, значения которой на выпуклых многогранниках совпадают со значениями валюации ?

Изучаемые валюации зависят от функций, которые мы называем *примарными*. Примарные функции определены в пространстве "фреймов" (см. определение в §1) и поэтому мы называем наши валюации "фреймовыми". Фреймовые валюации на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ были исследованы в [6], и настоящую работу можно считать обобщением результатов из [6]. Однако заметим, что в [6] вместо термина "фрейм" использован термин "флаг". Нам кажется, что термин "флаг" более подходит для валюаций в интегрально-геометрических пространствах (см. [1] – [4]). Во многих отношениях изучение флаговых и фреймовых валюаций взаимосвязано.

Валюация называется *простой*, если она равна нулю на многогранниках, не имеющих внутренних точек. Ниже мы рассматриваем только простые валюации. В §1 дано определение фреймовой валюации и доказано, что все простые валюации могут быть представлены в виде фреймовых валюаций с "центрированной" примарной функцией. В §2 рассмотрен важный частный случай, т.н. валюация Остроградского, для которой условия порождения меры вытекают из классической теоремы Гаусса–Остроградского. В §3 получено достаточное условие порождения меры для общих фреймовых валюаций. В §4 показано, что для валюаций в $\mathbb{R}^3$, зависящих от "центрированных" примарных функций, последнее условие является также и необходимым.

§1. ФРЕЙМОВЫЕ ВАЛЮАЦИИ

Обозначим через $\mathcal{H}$ класс всех выпуклых компактных многогранников в $\mathbb{R}^n$. Ниже мы рассматриваем многогранники только из $\mathcal{H}$. Через L_n обозначим n-мерную меру Лебега. Многогранник $H \in \mathcal{H}$ называем *гиперплоским*, если $L_n(H) = 0$, но $L_{n-1}(\partial H) \neq 0$, где ∂H – граница (гиперповерхность) многогранника H. Условимся считать, что гиперплоские многогранники имеют две $(n-1)$-мерные конгруентные грани, внешние нормали которых противоположно направлены. Многогранник H называем *вырожденным*, если $L_{n-1}(\partial H) = 0$.

Отображение $\mu : \mathcal{H} \longmapsto (-\infty, \infty)$ называется *валюацией*, если оно аддитивно в следующем смысле : для любых $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ таких, что $H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H}$, имеет место

$$\mu(H_1 \cup H_2) + \mu(H_1 \cap H_2) = \mu(H_1) + \mu(H_2).$$

Ясно, что если валюация равна нулю на гиперплоских многогранниках, то она равна нулю и на вырожденных многогранниках, т.е. она простая.

Флагом называется упорядоченная n-ка $f = (f_0, f_1, ..., f_{n-1})$, где f_k – это k-мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$, причем $f_0 \subset f_1 \subset \cdots \subset f_{n-1}$. Иногда пишем $f_0 = P \in \mathbb{R}^n$, термин "плоскость" мы используем вместо ныне популярного термина "аффинная плоскость", т.е. мы не предполагаем, что наши плоскости обязательно содержат начало координат O. Пусть дан флаг $f = (f_0, f_1, ..., f_{n-1})$, ортогональную проекцию начала O на гиперплоскость f_{n-1} обозначим через O_{n-1}. Далее, ортогональную проекцию точки O_{n-1} на f_{n-2} обозначим через O_{n-2} и т.д. Выпуклая оболочка точек $O_0, O_1, ..., O_n$ ($O_0 = f_0, O_n = O$) называется *симплексом Шлефли* флага f [5] и обозначается через $S(f)$. Очевидно, $S(f)$ зависит от выбора точки O и может быть гиперплоским или даже вырожденным.

Рассмотрим ортогональный *фрейм* (репер)

$$\overline{f} = (P, \omega_1, ..., \omega_n), \quad P \in \mathbb{R}^n, \quad \omega_i \in \Omega_{n-1}, \quad \cos(\widehat{\omega_i \omega_j}) = 0, \ i \neq j, \quad i, j = 1, ..., n,$$

где Ω_{n-1} обозначает $(n-1)$-мерную сферу направлений с центром в начале координат O. Мы называем P *вершиной*, а ω_i, $i = 1, ..., n$ *направлениями* фрейма $\overline{f}$. Каждому фрейму $\overline{f}$ соответствует флаг $f = (P, f_1, ..., f_{n-1})$, где f_k – k-мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$, проходящая через вершину P перпендикулярно направлениям $\omega_{k+1}, ..., \omega_n$. Отметим, что каждому флагу соответствуют 2^n фреймов. Фрейм $\overline{f}$ полностью определяется парой (f, d), где $d = (d_1, ..., d_n)$ есть n-ка чисел, принимающих значения -1 или $+1$, причем $d_k = +1$, если k-тая координата точки O относительно репера $\overline{f}$ положительна. Симплексом Шлефли $S(\overline{f})$ фрейма называем симплекс Шлефли соответствующего флага.

Говорим, что *флаг $f = (f_0, f_1, ..., f_{n-1})$ произведен многогранником H*, если каждая k-мерная плоскость f_k, $k = 0, 1, ..., n-1$ содержит k-мерную грань D_k

многогранника H. Через $\mathcal{F}(H)$ обозначим множество флагов, произведенных многогранником H. Заметим, что из $f \in \mathcal{F}(H)$ следует, что f_0 есть вершина многогранника H. Через $\overline{\mathcal{F}}(H)$ обозначим (конечное) множество *внешних фреймов*. По определению, $\overline{f} = (f, d) = (P, \omega_1, ..., \omega_n) \in \overline{\mathcal{F}}(H)$ тогда и только тогда, когда $f = (P, f_1, ..., f_{n-1}) \in \mathcal{F}(H)$ и ω_k, $k = 1, ..., n$ совпадают с направлением *относительной внешней нормали.*

Объясним последний термин. Сперва определим ω_n, как направление обычной внешней нормали к гиперграни $D_{n-1} \subset f_{n-1}$. Затем рассмотрим (единственную) $(n-2)$-мерную грань D_{n-2} многогранника H, лежащую в f_{n-2}. В качестве ω_{n-1} возьмем направление той внешней нормали к D_{n-2}, которая лежит в f_{n-1}. Используя индукцию по размерности, определим остальные направления ω_k, $k = n-2, ..., 1$. Например, для n-мерного прямоугольного параллелепипеда H_o, содержащего начало координат O, множество $\overline{\mathcal{F}}(H_o)$ состоит из тех фреймов $\overline{f} = (f, d)$, что $f \in \mathcal{F}(H_o)$ и $d_k = -1$ для всех $k = 1, ..., n$. Если многогранник H вырожденный, то полагаем $\overline{\mathcal{F}}(H) = \emptyset$.

Пусть $F(\overline{f})$ – функция в пространстве фреймов со значениями из $(-\infty, \infty)$. Рассмотрим в $\mathcal{H}$ следующий функционал :

$$\Psi_F(H) = \sum_{\overline{f} \in \overline{\mathcal{F}}(H)} F(\overline{f}), \quad H \in \mathcal{H}. \tag{1.1}$$

Легко проверить, что Ψ_F является валюацией, которую мы называем *фреймовой валюацией с примарной функцией F.*

Пусть $\overline{f} = (f, d)$ и $\overline{f}' = (f, d')$ суть два фрейма с одинаковым флагом f и такими направлениями, что у n-ок d и d' совпадают все компоненты, кроме одной. Если для всех таких пар имеет место $F(\overline{f}) = -F(\overline{f}')$, то функцию F называем *антисимметричной*.

Лемма 1.1. *Если примарная функция $F(\overline{f})$ антисимметрична, то фреймовая валюация (1.1) является простой.*

Доказательство следует из нашей договоренности относительно гиперплоских многогранников.

Функцию от фреймов $F(\overline{f})$ называем *центрированной* (относительно точки O), если F равна нулю на всех фреймах, у которых объем симплекса Шлефли равен нулю.

Теорема 1.1. *Всякая простая валюация $\mu(H)$ представима в виде фреймовой валюации с некоторой антисимметричной центрированной примарной функцией $F(\overline{f})$:*

$$\mu(H) = \Psi_F(H) = \sum_{\overline{f} \in \overline{\mathcal{F}}(H)} F(\overline{f}). \tag{1.2.}$$

Доказательство : Пусть $I_H(P)$ – индикаторная функция многогранника H :

$$I_H(P) = \begin{cases} 1 & \text{при } P \in H, \\ 0 & \text{при } P \notin H, \end{cases} \quad P \in \mathbb{R}^n.$$

Г. Хадвигер [5] показал, что индикаторная функция любого многогранника представима (почти всюду) в виде конечной линейной комбинации индикаторных функций симплексов Шлефли. Покажем, что одним из таких представлений является

$$I_H(P) = \sum_{\overline{f} \in \overline{\mathcal{F}}(H)} (-1)^{N(d)} I_{S(f)}(P), \tag{1.3}$$

где $N(d)$ – число положительных элементов в $d = (d_1, ..., d_n)$. Докажем (1.3) по индукции относительно размерности пространства $\mathbb{R}^n$. На прямой ($n = 1$) произвольный многогранник $H \in \mathcal{H}$ есть отрезок $[a, b]$, $a < b$; множество $\overline{\mathcal{F}}(H)$ состоит из двух фреймов $(a, \operatorname{sign}(a))$ и $(b, -\operatorname{sign}(b))$, где

$$\operatorname{sign}(a) = \begin{cases} -1 & \text{при } a < 0, \\ +1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для первого фрейма имеем $S(a) = [0, a]$ и $(-1)^{N(\operatorname{sign}(a))} = -\operatorname{sign}(a)$, для второго же $S(b) = [0, b]$ и $(-1)^{N(d)} = \operatorname{sign}(b)$. Представление (1.3) следует из легко проверяемого тождества

$$I_{[a,b]}(P) = \operatorname{sign}(b) I_{[0,b]} - \operatorname{sign}(a) I_{[0,a]}.$$

Предположим теперь, что (1.3) справедливо для пространств $\mathbb{R}^k$, $k < n$. На гиперплоскости $e \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим выпуклый $(n-1)$-мерный многогранник D. Через $T(D)$ обозначим n-мерную пирамиду с вершиной O и основанием D. Для почти всех точек $P \in \mathbb{R}^n$ имеет место

$$I_H(P) = \sum_{D_i \in \mathcal{D}(H)} c_i I_{T(D_i)}(P), \tag{1.4}$$

где $\mathcal{D}(H)$ – множество гиперграней D_i многогранника H. Коэффициент $c_i = -1$, если гиперплоскость e_i, содержащая D_i, отделяет точку O от внутренности многогранника H, и $c_i = 1$ в противном случае. Для применения индукционного предположения представим грань D_i как многогранник в $(n-1)$-мерном пространстве e_i, причем роль начала координат играет ортогональная проекция O_{n-1} точки O на e_i. Для почти всех точек $P \in e_i$ имеем по индукционному предположению

$$I_{D_i}(P) = \sum_{\overline{f}^{(n-1)} \in \overline{\mathcal{F}}(D_i)} (-1)^{N(d^{(n-1)})} I_{S(f^{(n-1)})}(P). \tag{1.5}$$

В (1.5) флаг $f^{(n-1)}$, соответствующий фрейму $\overline{f}^{(n-1)}$, имеет $n-1$ компонент, которые лежат в e_i. Легко проверить (см. [5]), что для любой конечной совокупности чисел b_k и любых многогранников D_k, лежащих в гиперплоскости e, из равенства

$$\sum_k b_k I_{D_k}(P) = 0, \quad P \in e$$

вытекает

$$\sum_k b_k I_{T(D_k)}(P) = 0, \quad P \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, из (1.5) получаем

$$I_{T(D_i)}(P) = \sum_{\overline{f}^{(n-1)} \in \overline{\mathcal{F}}(D_i)} (-1)^{N(d^{(n-1)})} I_{T(S(f^{(n-1)}))}(P) \tag{1.6}$$

почти для всех $P \in \mathbb{R}^n$. Если $f^{(n-1)} = (f_0, f_1, ..., f_{n-2}) \in \mathcal{F}(D_i)$, то

$$f = (f_0, f_1, ..., f_{n-2}, e_i) \in \mathcal{F}(H), \quad D_i \subset e_i, \quad D_i \in \mathcal{D}(H). \tag{1.7}$$

По определению симплекса Шлефли имеем $T(S(f^{(n-1)})) = S(f)$. Из (1.4) - (1.7) получим

$$I_H(P) = \sum_{\overline{f}\in\overline{\mathcal{F}}(H)} (-1)^{N(d^{(n-1)})} c(\overline{f}) I_{S(f)}(P), \tag{1.8}$$

где $c(\overline{f}) = -1$, если у флага (1.7) гиперплоскость e_i разделяет начало O и внутренность многогранника H, и $c(\overline{f}) = +1$ в противном случае. Следовательно, $c(\overline{f}) = -d_n$. Из определения числа $N(d)$ следует, что

$$(-1)^{N(d^{(n-1)})} c(\overline{f}) = (-1)^{N(d^{(n)})}.$$

Формула (1.3) доказана. Индикаторные функции в тождестве (1.3) можно заменить значениями произвольной простой валюации μ. Следовательно,

$$\mu(H) = \sum_{\overline{f}\in\overline{\mathcal{F}}(H)} (-1)^{N(d)} \mu(S(f)).$$

Таким образом, мы получили $\mu(H) = \Psi_F(H)$ с примарной функцией

$$F(f,d) = (-1)^{N(d)} \mu(S(f)). \tag{1.9}$$

Так как валюация μ простая, из $L_n(S(f)) = 0$ вытекает $\mu(S(f)) = 0$. Следовательно, фреймовая функция (1.9) центрированная. Теорема 1.1 доказана.

Замечание 1. Если в (1.9) в качестве μ взять плоскую меру Лебега L_2, то получим, что площадь многоугольника есть фреймовая валюация с центрированной примарной функцией

$$F(P,\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{2} r^2 \sin(\omega_1 - \varphi) \sin(\omega_2 - \varphi), \tag{1.10}$$

где (r,φ) – полярные координаты точки $P = f_0$ (см. [6]). Несмотря на то, что примарная функция (1.10) может изменять свой знак, она порождает посредством (1.1) неотрицательную меру L_2. Заметим также, что примарная функция (1.9) зависит от выбора начала координат, следовательно представление (1.2) не единственно.

§2. ВАЛЮАЦИЯ ОСТРОГРАДСКОГО

Пусть $\iint\limits_H$ обозначает n-мерный интеграл по многограннику $H \in \mathcal{H}$, а $\int\limits_{\partial H}$ означает $(n-1)$-мерный поверхностный интеграл по гиперповерхности ∂H. Рассмотрим функцию $\rho(X,\omega)$ определенную на $\mathbb{R}^n \times \Omega_{n-1}$. Предполагаем, что $\rho(X,\omega)$ непрерывна по $X \in \mathbb{R}^n$ при всех $\omega \in \Omega_{n-1}$. Отметим, что $\rho(X,\omega)$ можно рассматривать как функцию на фреймах, не зависящую от некоторых аргументов.

Рассмотрим функционал

$$\Phi_\rho(H) = \int_{\partial H} \rho(X,\omega)\ L_{n-1}(dX), \quad H \in \mathcal{H}, \tag{2.1}$$

где ω – направление внешней нормали к гиперповерхности ∂H в точке $X \in \partial H$. Для вырожденных многогранников D положим $\Phi_\rho(D) = 0$. Из аддитивных свойств интеграла заключаем, что функционал Φ_ρ является валюацией. Мы называем (2.1) *валюацией Остроградского с плотностью* ρ.

Лемма 2.1. *Валюация Остроградского с плотностью ρ является простой тогда и только тогда, когда ρ антисимметрична : для всех $X \in \mathbb{R}^n$ и $\omega \in \Omega_{n-1}$ имеет место*

$$\rho(X,\omega) = -\rho(X,-\omega), \tag{2.2}$$

где $-\omega$ – направление, диаметрально противоположное ω.

Доказательство следует из нашей договоренности относительно гиперплоских многогранников.

Лемма 2.2. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ зафиксирована декартова система координат, и пусть $F_i(X) = F_i(x_1, ..., x_n)$, $i = 1, ..., n$ - некоторые функции в $\mathbb{R}^n$, имеющие непрерывные производные по всем аргументам. Для всякой валюации Остроградского Φ_ρ и любом выборе функций F_i имеет место равенство*

$$\Phi_\rho(H) = \iint\limits_H \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(X)\ L_n(dX) +$$

$$+\int_{\partial H}\left[\rho(Y,\omega)-\sum_{i=1}^{n}F_i(Y)\cos(\widehat{\omega\omega_i})\right]L_{n-1}(dY), \quad H\in\mathcal{H}, \tag{2.3}$$

где ω_i – направления координатных осей Ox_i, $i=1,...,n$; ω – направление внешней нормали к гиперповерхности ∂H в точке $Y\in\partial H$; $\widehat{\omega\omega_i}$ – угол между ω и ω_i.

Доказательство : Классическая формула Гаусса–Остроградского в n-мерном пространстве имеет вид

$$\iint_H \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}F_i(X)\,L_n(dX)=\int_{\partial H}\sum_{i=1}^{n}F_i(Y)\cos(\widehat{\omega\omega_i})\,L_{n-1}(dY), \tag{2.4}$$

где $F_i(X)$ – произвольные функции в $\mathbb{R}^n$, имеющие непрерывные производные по всем аргументам. Равенство (2.3) непосредственно следует из (2.1) и (2.4).

Через $\mathcal{M}_n$ обозначим класс локально конечных знакопеременных мер на $\mathbb{R}^n$, абсолютно непрерывных относительно меры Лебега. Пусть $F_i(X)$, $i=1,...,n$ – некоторые функции в $\mathbb{R}^n$, имеющие непрерывные производные по всем аргументам. Рассмотрим валюацию Остроградского Φ_ρ с плотностью

$$\rho(X,\omega)=\sum_{i=1}^{n}F_i(X)\cos(\widehat{\omega\omega_i}). \tag{2.5}$$

Для плотности (2.5) выполнено условие (2.2), следовательно валюация Φ_ρ является простой. После подстановки выражения (2.5) в (2.3) поверхностный интеграл в (2.3) обратится в ноль. В силу Леммы 2.2 заключаем, что Φ_ρ порождает меру из $\mathcal{M}_n$, плотность $a(X)$ которой (относительно меры Лебега L_n) равна

$$a(X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\rho(X,\omega_i). \tag{2.6}$$

Следовательно, представление (2.5) есть достаточное условие продолжимости валюации Остроградского до знакопеременной меры из $\mathcal{M}_n$. Ниже мы покажем, что это условие является также и необходимым. Будем писать $\rho(X,\omega)\in\mathbf{C}^{(1)}$, если для всякого направления ω функция $\rho(X,\omega)$ имеет непрерывные производные по x_i, $i=1,...,n$.

Теорема 2.1. *Валюация Остроградского Φ_ρ с плотностью $\rho \in \mathbf{C}^{(1)}$ порождает знакопеременную меру $m \in \mathcal{M}_n$ тогда и только тогда, когда существуют функции $F_i(X)$ такие, что ρ имеет вид (2.5). Если (2.5) имеет место, то выражение (2.6) не зависит от выбора декартовой системы координат и представляет собой плотность меры m относительно меры Лебега L_n.*

Доказательство : Пусть существует такая мера $m \in \mathcal{M}_n$, что $\Phi_\rho(H) = m(H)$ для всех $H \in \mathcal{H}$. Для доказательства того, что ρ имеет вид (2.5), аппроксимируем многогранник H конечными суммами $D_k = \cup K_j^{(k)}$ непересекающихся n-мерных параллелепипедов $K_j^{(k)}$, гиперграни которых ортогональны какой-либо координатной оси (и параллельны остальным осям). Так как выражение

$$J(X,\omega) = \rho(X,\omega) - \sum_{i=1}^{n} \rho(X,\omega_i)\cos(\widehat{\omega\omega_i})$$

равно нулю на гиперплоскостях, ортогональных какой-либо координатной оси, имеем

$$\int_{\partial K_j^{(k)}} \left[\rho(Y,\omega) - \sum_{i=1}^{n} \rho(Y,\omega_i)\cos(\widehat{\omega\omega_i})\right] L_{n-1}(dY) = 0. \qquad (2.7)$$

Из (2.3) и (2.7) получаем

$$m(D_k) = \iint\limits_{D_k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\rho(X,\omega_i)\, L_n(dX).$$

Имеем $m(H) = \lim\limits_{k\to\infty} m(D_k)$, следовательно

$$m(H) = \Phi_\rho(H) = \iint\limits_{H} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\rho(X,\omega_i)\, L_n(dX).$$

С помощью Леммы 2.2 получаем, что равенство (2.7) справедливо для всех многогранников $H \in \mathcal{H}$.

Теперь предположим противное : пусть для некоторой пары (X_0,ω_0) равенство (2.5) не справедливо. Для определенности пусть $J(X_0,\omega_0) > 0$. Так как $\rho \in \mathbf{C}^{(1)}$, то существует такая окрестность U точки $X_0 \in \mathbb{R}^n$, что $J(X,\omega_0) > 0$

при всех $X \in U$. Рассмотрим n-мерный симплекс S_0, у которого все вершины лежат в U, n гиперграней ортогональны какой-либо координатной оси, а $(n+1)$-ая гипергрань D расположена так, что ее внешняя нормаль имеет направление ω_0. Согласно (2.7) имеет место $\int\limits_{\partial S_0} J\, dL_{n-1} = 0$. Учитывая, что $J(X,\omega) = 0$ в точках $X \in \partial S_0 \setminus D$, получим

$$\int\limits_D J(X,\omega_0)\, dL_{n-1} = 0.$$

Но с другой стороны, при $X \in D$ имеем $J(X,\omega_0) > 0$ и $L_{n-1}(D) > 0$. Полученное противоречие доказывает Теорему 2.1.

В следующем параграфе мы получим некоторые условия, при выполнении которых простая валюация представима в виде (2.1).

§3. ПРИВЕДЕНИЕ К СЛУЧАЮ ВАЛЮАЦИИ ОСТРОГРАДСКОГО

Назовем *k-усеченным флагом* последовательность $f^{(k)} = (f_k, ..., f_{n-1})$, где f_j – j-мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$, причем $f_k \subset f_{k+1} \subset \cdots \subset f_{n-1}$, $k < n$. Пусть включение $f^{(k)} \subset f$ означает, что $f^{(k)} = (f_k, ..., f_{n-1})$ есть подпоследовательность флага $f = (f_0, f_1, ..., f_{n-1})$. Рассмотрим также *$k$-усеченные фреймы* :

$$\overline{f}^{(k)} = (P, \omega_{k+1}, ..., \omega_n), \quad P \in \mathbb{R}^n, \quad \omega_i \in \Omega_{n-1}, \quad \cos(\widehat{\omega_i \omega_j}) = 0, \; i \neq j.$$

Каждому усеченному фрейму $\overline{f}^{(k)} = (P, \omega_{k+1}, ..., \omega_n)$ соответствует усеченный флаг $f^{(k)} = (f_k, ..., f_{n-1})$, где f_j – j-мерные плоскости, проходящие через P перпендикулярно направлениям $\omega_{j+1}, ..., \omega_n$, $j = k, ..., n-1$. Заметим, что усеченные фреймы с разными вершинами могут отображаться в один и тот же усеченный флаг.

Зафиксируем многогранник $H \in \mathcal{H}$. Говорим, что *усеченный флаг $f^{(k)}$ произведен многогранником H*, если существует произведенный многогранником H флаг $f \in \mathcal{F}(H)$, для которого $f^{(k)} \subset f$. Говорим, что *усеченный фрейм $\overline{f}^{(k)}$ произведен многогранником H*, если соответствующий ему усеченный флаг $f^{(k)}$ произведен многогранником H.

Обозначим через $\mathcal{F}_k(H)$, $k = 1, ..., n-1$ конечное множество последовательностей $\tau = (\omega_{k+1}, ..., \omega_n) \in \Omega_{n-1}^{n-k}$ длины $n-k$, таких что существует усеченный фрейм $\overline{f}^{(k)} = (P, \omega_{k+1}, ..., \omega_n)$, произведенный многогранником H. Заметим, что для каждого $\tau = (\omega_{k+1}, ..., \omega_n) \in \mathcal{F}_k(H)$ существует несколько произведенных многогранником H усеченных фреймов $\overline{f}^{(k)} = (P_i, \tau)$ с разными вершинами P_i. Однако из условия $\tau \in \mathcal{F}_k(H)$ слёдует, что все эти вершины P_i лежат в одной k-мерной плоскости $f_k(\tau)$, которая ортогональна направлениям $\omega_{k+1}, ..., \omega_n$. Через $D_k(\tau)$ обозначим (единственную) k-мерную грань многогранника H, лежащую в $f_k(\tau)$. Например, если $\tau = (\omega_2, ..., \omega_n) \in \mathcal{F}_1(H)$, то в $\overline{\mathcal{F}}(H)$ существует ровно два произведенных многогранником H фрейма вида $\overline{f} = (P, \omega, \tau)$, а именно $\overline{f} = (P, \omega_1, \tau)$ и $\overline{f}' = (P', \omega_1', \tau)$. При этом обязательно $\omega_1' = -\omega_1$, а точки P, P' являются концами (одномерного) ребра $D_1(\tau)$.

Пусть $F(\overline{f}) = F(P, \omega_1, ..., \omega_n)$ – антисимметричная функция в пространстве фреймов. Фреймовую валюацию с примарной функцией F можно представить в виде

$$\Psi_F(H) = \sum_{(\omega_2, ..., \omega_n) \in \mathcal{F}_1(H)} [F(P_1, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) + F(P_2, -\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)], \quad H \in \mathcal{H}, \tag{3.1}$$

где P_1, P_2 – концы ребра $D_1(\omega_2, ..., \omega_n)$. Предположим, что существует производная по направлению ω_1 :

$$F_1(P, \omega_2, ..., \omega_n) = \frac{\partial}{\partial_{\omega_1} P} F(P, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) = \frac{\partial}{\partial_{-\omega_1} P} F(P, -\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n). \tag{3.2}$$

Ввиду антисимметричности фреймовой функции F, значения производной F_1 не зависят от ω_1 при фиксированных $\omega_2, ..., \omega_n$. По формуле Ньютона–Лейбница из (3.1) получаем

$$\Psi_F(H) = \sum_{\tau = (\omega_2, ..., \omega_n) \in \mathcal{F}_1(H)} \int_{D_1(\tau)} F_1(P, \omega_2, ..., \omega_n)\, L_1(dP). \tag{3.3}$$

По определению валюации Остроградского имеем

$$\Psi_F(H) = \sum_{\tau' \in \mathcal{F}_2(H)} \Phi_{F_1}(D_2(\tau')), \tag{3.4}$$

где Φ_{F_1} – двумерная валюация Остроградского с примарной функцией (3.2), определенная на 2-плоскости e, содержащей 2-грань $D_2(\tau')$:

$$\Phi_{F_1}(D_2) = \int_{\partial D_2} F_1(P, \omega_2(P), \omega_3, ..., \omega_n)\, L_1(dP). \tag{3.5}$$

Здесь ω_2 – направление относительной внешней нормали к границе плоского многоугольника $\partial D_2(\tau')$ в точке $P \in \partial D_2$, а $\tau' = (\omega_3, ..., \omega_n)$.

Теперь предположим, что двумерная валюация Остроградского (3.5) порождает меру $m \in \mathcal{M}_2$ на каждой 2-плоскости e. Из Теоремы 2.1 следует, что для любого $\tau = (\omega_3, ..., \omega_n)$ плотность $F_1(P, \omega_2, \tau) = F_1(P, \omega_2, ..., \omega_n)$, как функция двух переменных $P \in e$ и $\omega_2 \in \Omega_1$, удовлетворяет условию (2.5), а именно

$$F_1(P, \omega_2, \tau) = F_1(P, \xi, \tau)\cos\varphi + F_1(P, \eta, \tau)\sin\varphi, \tag{3.6}$$

где (ξ, η) – некоторая система декартовых координат на плоскости e, φ – угол между ω_2 и ξ-осью. Отметим, что (см. [6]) представление (3.6) не зависит от выбора системы координат (ξ, η).

В нижеприведенной Теореме 3.1 мы используем термин "Тест k". Дадим необходимые разъяснения.

Тест 1 : Пусть задана антисимметричная фреймовая функция F, построим функцию F_1 согласно (3.2). Если на каждой 2-плоскости F_1 удовлетворяет условию (3.6), то скажем, что *Тест 1 имеет положительный исход.*

Предположим, что уже построена функция $F_{k-1}(P, \omega_k, ..., \omega_n)$, определенная на $(k-1)$-усеченных фреймах. Построим функцию $F_k(P, \omega_{k+1}, ..., \omega_n)$, определенную на k-усеченных фреймах, согласно следующему алгоритму. Через $e(P, \tau_k)$,

$\tau_k = (\omega_{k+1}, ..., \omega_n)$ обозначим k-мерную плоскость, проходящую через P ортогонально направлениям $\omega_{k+1}, ..., \omega_n$. Пусть $\{\xi_i\}_1^k$ – направления осей некоторой декартовой системы координат на k-плоскости e. Положим

$$F_k(P, \tau_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial_{\xi_i} P} F_{k-1}(P, \xi_i, \tau_k). \tag{3.7}$$

Если для всех $\tau_k = (\omega_{k+1}, ..., \omega_n)$ справедливо представление

$$F_{k-1}(P, \omega, \tau_k) = \sum_{i=1}^{k} F_{k-1}(P, \xi_i, \tau_k) \cos(\widehat{\omega\xi_i}), \tag{3.8}$$

то выражение (3.7) не зависит от выбора системы координат на k-плоскости $e(P, \tau_k)$. В свою очередь, и F_k может удовлетворять условию (3.8), т.е.

$$F_k(P, \omega, \tau_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} F_k(P, \xi_i, \tau_{k+1}) \cos(\widehat{\omega\xi_i}), \quad \tau_{k+1} = (\omega_{k+2}, ..., \omega_n). \tag{3.8'}$$

Тест k : Пусть задана фреймовая функция F_{k-1}, построим функцию F_k согласно (3.7). Если на каждой $(k+1)$-плоскости F_k удовлетворяет условию (3.8'), то скажем, что *Тест k имеет положительный исход.*

Отметим, что классическая теорема Гаусса–Остроградского и ее следствия (в частности (3.8)) требуют наложения условий *гладкости*. В нашем случае достаточно предположить, что примарная функция $F(P, \omega_1, ..., , \omega_n)$ при всех $\omega_1, ..., \omega_n$ имеет непрерывные производные по P порядка $n-1$. Применяя $n-1$ раз Теорему 2.1, получим основной результат статьи.

Теорема 3.1. *Пусть Ψ_F – простая валюация в $\mathbb{R}^n$ с примарной функцией $F \in \mathbf{C}^{(n-1)}$. Если все Тесты* $1, ..., n-1$ *последовательно имеют положительные исходы, то Ψ_F можно продолжить до знакопеременной меры $m \in \mathcal{M}_n$.*

Замечание 2. Теорема 3.1 дает достаточное условие для порождения меры, тогда как Теорема 2.1 – необходимое и достаточное. Необходимость условия (3.8) доказана ниже для случая простых фреймовых валюаций в $\mathbb{R}^3$ с центрированными примарными функциями.

§4. ЦЕНТРИРОВАННЫЕ ФРЕЙМОВЫЕ ФУНКЦИИ

Теорема 4.1. *Простая фреймовая валюация в $\mathbb{R}^3$ с гладкой центрированной примарной функцией F может быть продолжена до меры $m \in \mathcal{M}_3$ тогда и только тогда, когда функция F_1, определенная по (3.2), имеет вид (3.6), а функция F_2, определенная посредством (3.7) с $k = 2$, имеет вид (3.8'), т.е. оба Теста 1 и 2 имеют положительные исходы.*

Доказательство : Достаточность следует из Теоремы 3.1, докажем необходимость. Из Теоремы 2.1 видно, что достаточно доказать необходимость условия (3.6). Пусть Ψ_F – простая фреймовая валюация с гладкой центрированной примарной функцией F, и пусть существует такая мера $m \in \mathcal{M}_3$, что $\Psi_F(H) = m(H)$ для всех $H \in \mathcal{H}$. Рассмотрим двумерную валюацию Остроградского Φ_{F_1} (см. (3.5)) на произвольной плоскости e, пусть $p(e)$ – расстояние от начала координат O до плоскости e. Каждому многоугольнику $D \subset e$ поставим в соответствие пирамиду $T(D)$ с вершиной O и основанием D. Отметим, что $L_3(T(D)) = 1/3p(e)L_2(D)$. Из центрированности примарной функции F следует, что $m(T(D)) = \Psi_F(T(D)) = \Phi_{F_1}(D)$. Будем уменьшать многоугольник D, стягивая его к точке. Так как $m \in \mathcal{M}_3$, то имеет место

$$m(T(D)) = cL_3(T(D)) + o(L_3(T(D)) = \frac{1}{3}cp(e)L_2(D) + o(L_2(D)).$$

Следовательно, $\Phi_{F_1}(D) = c'L_2(D) + o(L_2(D))$, где c, c' – некоторые постоянные. Таким образом, двумерная валюация Остроградского Φ_{F_1} порождает в e знакопеременную меру из $\mathcal{M}_2$. В силу Теоремы 2.1, получим, что F_1 имеет вид (2.5), а следовательно и (3.6). Теорема 4.1 доказана.

ABSTRACT. The paper considers valuations defined on convex polyhedrons in Euclidian spaces $\mathbb{R}^n$. The valuations depend on primary functions defined in the space of "frames". All so-called simple valuations can be represented as frame valuations. Using classical Gauss–Ostrogradski theorem, necessary and sufficient conditions are found, when a simple frame valuation actually generates a locally finite signed measure in $\mathbb{R}^n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Амбарцумян, "О конечно-аддитивных функционалах в $\mathbb{R}^3$", Изв. НАН Армении, Математика, том. 28, № 2, стр. 51 – 59, 1993.
2. R. V. Ambartzumian, "Measure generation by Euler functionals", Adv. Appl. Prob. (SGSA), vol. 27, pp. 606 – 626, 1995.
3. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей", Изв. НАН Армении, Математика, том. 29, № 4, стр. 1 – 57, 1994.
4. Р. Г. Арамян, "Порождение мер в пространстве плоскостей и сферические эйлеровы функционалы", Изв. НАН Армении, Математика, том. 29, № 4, стр. 58 – 74, 1994.
5. Г. Хадвигер, Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, М., Наука, 1967.
6. Г. С. Сукиасян, "Конечно-аддитивные функционалы на плоскости", Изв. НАН Армении, Математика, том. 29, № 4, стр. 75 – 89, 1994.

2 декабря 1995

Институт математики
НАН Армении
E-mail : rhambart@aua.am