СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОДНОПАРНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. А. Яврян, А. В. Яврян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 30, № 3, 1995

В работе метод М. Г. Крейна направляющих функционалов применяется к изометрическим операторам и к симметрическим операторам с неплотной областью определения. Полученные результаты применяются к однопарным интегральным операторам. В результате получается спектральное разложение таких операторов, а также устанавливается единственность спектральной функции.

ВВЕДЕНИЕ

Метод М. Г. Крейна направляющих функционалов впервые был применен в работах [1], [2] к симметрическим операторам с плотной областью определения. В настоящей работе метод М. Г. Крейна применяется к изометрическим операторам, а также к симметрическим операторам с неплотной областью определения. Полученные результаты применяются к однопарным интегральным операторам. В результате получается спектральное разложение таких операторов, а также устанавливается единственность спектральной функции. При вещественных однопарных интегральных операторах такое разложение было получено в [3] Л. де Бранжем. В случае присутствия исключительных интервалов этот вопрос исследовался другим методом в [4].

§1. МЕТОД НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть L — комплексное линейное пространство, на котором определено квазискалярное произведение $[f, g]$, $f, g \in L$. Напомним, что квазискалярное произведение удовлетворяет всем условиям скалярного произведения, кроме условия: из $[f]^2 = [f, f] = 0$ следует $f = 0$. Линейный оператор U с областью определения

Исследование, описанное в этой публикации, оказалось возможным при частичной поддержке Гранта № 93-249 INTAS.

$\mathcal{D}(U) \subset L$ называется *изометрическим*, если

$$[Uf, Ug] = [f, g], \quad \text{для всех } f, g \in \mathcal{D}(U).$$

Линейный функционал $\Psi(\cdot, \zeta) \neq 0$, $|\zeta| = 1$, $\zeta \neq 1$, определенный на L , называется *направляющим функционалом* для оператора U , если для любого $f \in L$ функция $\Psi(f, \zeta)$ аналитична на окружности $|\zeta| = 1$, кроме, быть может, точки $\zeta = 1$, и уравнение

$$Uf - \zeta f = g$$

при любом $|\zeta| = 1$, $\zeta \neq 1$ и $g \in L$ имеет решение тогда и только тогда, когда $\Psi(g, \zeta) = 0$.

Пусть $L_0 = \{f \in L : [f, f] = 0\}$ и L/L_0 - фактор-пространство со скалярным произведением $[\hat{f}, \hat{g}] = [f, g]$, $\hat{f}, \hat{g} \in L/L_0$, $f \in \hat{f}$, $g \in \hat{g}$. Ясно, что $\hat{U} : \hat{U}\hat{f} = \widehat{Uf}$, $\hat{f} \in \mathcal{D}(\hat{U}) = \{\hat{f} : f \in \mathcal{D}(U)\}$ есть оператор (изометрический) в L/L_0 . Пусть H есть пополнение L/L_0 и $\bar{U}$ - замыкание оператора $\hat{U}$. Пусть

$$H_1 = \{\hat{f} \in H : \bar{U}\hat{f} = \hat{f}\}, \quad H_0 = H \ominus H_1. \quad (1)$$

Подпространство H_0 инвариантно относительно $\bar{U}$, так как из $\hat{g} \in H_0 \cap \mathcal{D}(\bar{U})$ следует, что $[\hat{f}, \bar{U}\hat{g}] = [\bar{U}\hat{f}, \bar{U}\hat{g}] = [\hat{f}, \hat{g}] = 0$ для всех $\hat{f} \in H_1$. Следовательно, $\bar{U}\hat{g} \in H_0$. Пусть $\bar{U}|_{H_0}$ - часть оператора $\bar{U}$ в H_0 . Очевидно, что

$$(I - \bar{U}|_{H_0})\hat{g} \neq 0, \quad \forall \hat{g} \in H_0, \hat{g} \neq 0.$$

Как показано в [5], оператор $\bar{U}|_{H_0}$ имеет такое унитарное расширение U_1 (возможно определенное на некотором $\tilde{H} \supset H_0$), что $U_1\hat{g} \neq \hat{g}$ при $\hat{g} \in \tilde{H}$. Следовательно, унитарное расширение $\tilde{U} = \bar{U}|_{H_1} \oplus U_1$ оператора $\bar{U}$ удовлетворяет условию

$$\{\hat{g} \in \tilde{H} : \tilde{U}\hat{g} = \hat{g}\} = H_1.$$

Пусть E_t , $t \in [0, 2\pi]$ - разложение единицы оператора $\tilde{U}$. Из сказанного выше следует, что

$$P_{H_1} = E_{+0} - E_0 + E_{2\pi} - E_{2\pi-0},$$

где P_{H_1} - оператор ортогонального проектирования H на H_1 .

Теорема 1. Существует неубывающая функция $\tau(t)$ ($0 < t < 2\pi$) такая, что для любого $f \in L$

$$[f]^2 = \int_{+0}^{2\pi-0} |\Psi(f, e^{it})|^2 d\tau(t) + [P_H f]^2. \quad (2)$$

Функция $\tau(t)$ называется спектральной функцией оператора U .

Доказательство в основном повторяет ход рассуждений М. Г. Крейна в случае симметрического оператора с плотной областью определения. Сначала докажем две леммы.

Лемма 1. Если $\Psi(g, \zeta_0) = 0$, $g \in L$, $\zeta_0 = e^{it_0}$, $t_0 \in (0, 2\pi)$, то существует $f \in \mathcal{D}(U)$ такой, что

$$\Psi(f, \zeta) = \Psi(g, \zeta) / (\zeta - \zeta_0), \quad \zeta = e^{it}, \quad t \in (0, 2\pi).$$

Доказательство. Достаточно взять f равным решению уравнения

$$Uf - \zeta_0 f = g.$$

Лемма 2. Для любого промежутка $[\alpha, \beta] \subset (0, 2\pi)$ существует $u \in L$ такой, что $\Psi(u, \zeta) \neq 0$ для всех $\zeta = e^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Доказательство. Пусть $\Psi(f_0, \zeta) \neq 0$. Тогда $\Psi(f_0, \zeta) = 0$ не более чем в конечном числе точек $\zeta = \zeta_k$, $k = \overline{1, n}$. Последовательно применив лемму 1 к этим точкам, мы придем к искомому элементу u .

Доказательство теоремы 1. Пусть $\Delta = [\alpha, \beta] \subset (0, 2\pi)$. В силу леммы 2 существует элемент $u \in L$ такой, что $\Psi(u, \zeta) \neq 0$ при всех $\zeta = e^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Пусть $g \in L$ и

$$\varphi(t) = \int_{\alpha_0}^t dE_\tau g - \int_{\alpha_0}^t \frac{\Psi(g, e^{it})}{\Psi(u, e^{it})} dE_\tau u, \quad t \in \Delta,$$

где α_0 — некоторая точка из Δ .

Покажем, что $\varphi'(t_0) = 0$ для всех $t_0 \in \Delta$. Имеем $\varphi(t) - \varphi(t_0) = J_1 + J_2$, где

$$J_1 = \int_{t_0}^t dE_\tau g - \frac{\Psi(g, e^{it_0})}{\Psi(u, e^{it_0})} \int_{t_0}^t dE_\tau u,$$

$$J_2 = \int_{t_0}^t \left(\frac{\Psi(g, e^{it_0})}{\Psi(u, e^{it_0})} - \frac{\Psi(g, e^{i\tau})}{\Psi(u, e^{i\tau})} \right) dE_\tau u.$$

По условию уравнение

$$Uf - e^{it_0}f = g - \frac{\Psi(g, e^{it_0})}{\Psi(u, e^{it_0})}u \quad (3)$$

имеет решение $f = f_{t_0}$. Применяв к обеим частям (3) оператор $E_t - E_{t_0}$, получим

$$[J_1]^2 = \left| \int_{t_0+0}^t |e^{i\tau} - e^{it_0}|^2 d[E_\tau f_{t_0}, f_{t_0}] \right| = (t - t_0)^2 o(1), \quad t \rightarrow t_0.$$

Так как $\Psi(\cdot, \zeta)$ аналитична, то

$$[J_2]^2 = (t - t_0)^2 o(1), \quad t \rightarrow t_0.$$

Следовательно $\varphi(t) - \varphi(t_0) = (t - t_0)^2 o(1)$ при $t \rightarrow t_0$, т.е. $\varphi'(t_0) = 0$ для всех $t_0 \in \Delta$. Так как $\varphi(\alpha_0) = 0$, то для всех $t \in \Delta$ имеем $\varphi(t) = 0$. Это означает, что

$$E(\Delta)g = \int_{\Delta} \frac{\Psi(g, e^{i\tau})}{\Psi(u, e^{i\tau})} dE_\tau u, \quad g \in L, \quad \Delta \in (0, 2\pi).$$

Отсюда следует, что для любого $g \in L$

$$[E(\Delta)g]^2 = \int_{\Delta} |\Psi(g, e^{i\tau})|^2 d\tau_{\Delta}(t), \quad (4)$$

где

$$d\tau_{\Delta}(t) = \frac{d[E_t u, u]}{|\Psi(u, e^{it})|^2}. \quad (5)$$

Подставив в (4) $g = u_1$ видим, что $d\tau_{\Delta}(t)$, определенное формулой (5) не зависит от выбора элемента $u_1 \in L$, при котором $\Psi(u_1, e^{it}) \neq 0$ для всех $t \in \Delta$. Следовательно, взяв последовательность интервалов $\Delta_n = [\alpha_n, \beta_n]$, $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$, стремящуюся к $(0, 2\pi)$, мы можем при любом $t \in (0, 2\pi)$ определить $\tau(t) = \tau_{\Delta_n}(t)$, $t \in \Delta_n$ так, чтобы

$$|E(2\pi - 0) - E(+0)g|^2 = \int_{+0}^{2\pi-0} |\Psi(g, e^{it})|^2 d\tau(t),$$

что равносильно (2). Теорема 1 доказана.

Замечание. Равнство (2) можно расширить на все функции $f \in H$ следующим образом. Для любого $\hat{f} \in H$ выбираем $f_n \in L$ так, что $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$. Тогда из (2) следует, что последовательность $\Psi(f_n, e^{it})$ имеет предел в $L^2_{\sigma}(0, 2\pi)$, который снова обозначим через $\Psi(\hat{f}, e^{it})$. Ясно, что он не зависит от $\hat{f}$. Тогда (2) будет выполняться для всех $\hat{f} \in H$.

§2. МЕТОД НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

В этом параграфе метод направляющих функционалов изометрических операторов применяется к симметрическому оператору, возможно, с неплотной областью определения.

Пусть A – симметрический оператор с областью определения $\mathcal{D}(A) \subset L$:

$$[Af, g] = [f, Ag] \quad f, g \in \mathcal{D}(A).$$

Пусть U – преобразование Кэли оператора A :

$$U = (A - iI)(A + iI)^{-1}.$$

Ясно, что U – изометрический оператор. Имеем

$$\{\hat{f} \in H : \hat{U}\hat{f} = \hat{f}\} = \{\hat{f} \in H : \hat{f} = \widehat{Ag - ig}, g \in \mathcal{D}(A), \hat{g} = 0\}.$$

Заметим, что если $\mathcal{D}(A)$ не плотна в H , то необязательно, чтобы $\hat{U}$ был преобразованием Кэли некоторого оператора в H .

Найдем H_1 . Пусть $\widehat{\hat{U}\hat{f}} = \hat{f}$, т.е. существует $g_n \in \mathcal{D}(A)$ такая, что

$$(\widehat{A + iI})g_n \rightarrow \hat{f}, \quad (\widehat{A - iI})g_n \rightarrow \hat{f}.$$

Отсюда следует, что $\widehat{g}_n \rightarrow 0$ и $\widehat{Ag}_n \rightarrow \hat{f}$. Таким образом

$$H_1 = \{\hat{f} \in H : \exists g_n \in \mathcal{D}(A), \widehat{g}_n \rightarrow 0, \widehat{Ag}_n \rightarrow \hat{f}\}. \quad (6)$$

Пусть $\Phi(f, \lambda)$, $f \in L$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$ есть направляющий функционал для оператора A , т.е. $\Phi(\cdot, \lambda) \neq 0$, для любого $f \in L$ функция $\Phi(f, \lambda)$ аналитична на $\lambda \in (-\infty, \infty)$ и уравнение $Af - \lambda f = g$ при любом $g \in L$ и $\lambda \in (-\infty, \infty)$ имеет решение в том и только том случае, когда $\Phi(g, \lambda) = 0$. Легко проверить, что

$$\Psi(f, \zeta) = \Phi\left(f, \frac{i(1+\zeta)}{1-\zeta}\right), \quad |\zeta| = 1, \quad \zeta \neq 1$$

будет направляющим функционалом для U . Применяя теорему 1 и взяв $\sigma(\lambda) = \tau(2\pi - 2 \arctan \lambda)$, получим следующее утверждение для оператора A .

Теорема 2. Существует неубывающая функция $\sigma(\lambda)$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$ такая, что для любого $f \in L$

$$[f]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(f, \lambda)|^2 d\sigma(\lambda) + [P_{H_1} f]^2,$$

где H_1 определяется равенством (6).

В частности (см. замечание)

$$[f]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\hat{f}, \lambda)|^2 d\sigma(\lambda), \quad f \in H_0. \quad (7)$$

Пусть $N \subset H$ - максимальное подпространство, ортогональное $\mathcal{D}(A)$. Если $\hat{f} \in H_1$, то существует $g_n \in \mathcal{D}(A)$ такая, что $\widehat{g_n} \rightarrow 0$, $\widehat{Ag_n} \rightarrow \hat{f}$, $n \rightarrow \infty$. Для $g \in \mathcal{D}(A)$ имеем $[g, Ag_n] = [Ag, g_n]$. Переходя к пределу, получаем $[\hat{g}, \hat{f}] = 0$, т.е. $\hat{f} \in N$. Таким образом, $H_1 \subset N$.

В частности, если $\mathcal{D}(A)$ плотно в H , то (7) справедливо в H . Это утверждение впервые установлено М.Г. Крейном (см. [1], [2]). Для симметрического линейного отношения (7) было установлено Г. Лангером и Б.Тексторисом в [6]. В специальном случае оператора A , нами рассматриваемого, из результатов [6] следует, что (7) имеет место в $\mathcal{D}(A)^0$, где

$$\mathcal{D}(A)^0 = \{\hat{f} \in H : \exists f_n \in \mathcal{D}(A), \hat{f}_n \rightarrow \hat{f}\}.$$

Заметим, что, вообще говоря, $\mathcal{D}(A)^0$ есть правильная часть H_0 .

В §3 нам понадобится теорема 1 в следующей форме.

Теорема 2'. Пусть $\Phi(f, \lambda)$, $f \in L$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$ - аналитическая функция такая, что $\Phi(\cdot, \lambda) \not\equiv 0$, и уравнение $(I - \lambda A)f = g$ имеет решение в том и только том случае, когда $\Phi(g, \lambda) = 0$. Тогда существует такая неубывающая функция $\sigma(\lambda)$, что

$$[f]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(f, \lambda)|^2 d\sigma(\lambda) + [P_{H_1} f]^2, \quad f \in L, \quad (8)$$

где

$$H_1 = \{\hat{f} : \exists f_n \in \mathcal{D}(A), \hat{f}_n \rightarrow \hat{f}, \widehat{Af_n} \rightarrow 0\}.$$

Доказательство. Достаточно применить теорему 1 к изометрическому оператору $U = -(A + iI)(A - iI)^{-1}$.

В частности, для $f \in H_0 = H \ominus H_1$ равенство (8) принимает вид

$$[f]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(f, \lambda)|^2 d\sigma(\lambda).$$

§3. ОДНОПАРНЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть φ и ψ — комплексные функции, принадлежащие $L^2(0, b)$ при $0 < b < \infty$.

Рассмотрим интегральный оператор A в $L^2(0, \infty)$, порожденный ядром

$$K(x, s) = \begin{cases} \varphi(x)\overline{\psi(s)}, & x \leq s, \\ \overline{\varphi(s)}\psi(x), & x > s, \end{cases} \quad (9)$$

и определенный на тех финитных функциях $f \in L^2(0, \infty)$, которые удовлетворяют условию

$$\int_0^{\infty} f(x)\overline{\varphi(x)} dx = 0. \quad (10)$$

В случае конечного интервала интегральные операторы с ядрами (9) рассматривались в [7] Гантмахером и Крейном и назывались *однопарными интегральными операторами*.

Легко проверить, что оператор A симметричен. Если $\varphi \in L^2(0, \infty)$, то его область определения неплотна, и как будет показано, в этом случае A не имеет замыкания.

Для получения спектрального разложения оператора A применим теорему 2'. Найдем подпространство H_1 , соответствующее оператору A . Нам понадобится следующее определение. Следуя [3], интервал (α, β) мы будем называть *исключительным*, если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ линейно зависимы в этом интервале с вещественными коэффициентами. Интервал (α, β) назовем *максимально исключительным*, если он не содержится ни в одном другом исключительном интервале.

Как и прежде, через $\mathcal{D}(A)$ обозначим область определения оператора A . Таким образом

$$(Af)(x) = \varphi(x) \int_x^{\infty} \overline{\psi(s)} f(s) ds + \psi(x) \int_0^x \overline{\varphi(s)} f(s) ds = \int_x^{\infty} V(x, s) f(s) ds,$$

$f \in \mathcal{D}(A)$, где

$$V(x, s) = \varphi(x)\overline{\psi(s)} - \overline{\varphi(s)}\psi(x).$$

Мы предполагаем, что

- 1) $\varphi(x) \neq 0$ в интервале вида $(0, \beta)$, $\beta > 0$;
- 2) $\text{mes}\{x : \varphi(x) = 0, \psi(x) = 0\} = 0$;
- 3) интервал вида (α, ∞) не есть исключительный.

Пусть $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$ – множество всех максимальных исключительных интервалов.

Теорема 3. Подпространство H_1 совпадает с множеством функций f , принадлежащих $L^2(0, \infty)$ и удовлетворяющих условиям

$$f(x) = 0 \text{ почти всюду на } F = (0, \infty) \setminus \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k), \quad (11)$$

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(s) \overline{\psi(s)} ds = \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(s) \overline{\varphi(s)} ds = 0. \quad (12)$$

Доказательство. Пусть $f \in H_1$. Тогда существует $f_n \in \mathcal{D}(A)$, $f_n \rightarrow f$ и $Af_n \rightarrow 0$. Имеем

$$\begin{aligned} (Ag)(x) = & -\varphi(x) \int_0^x \overline{\psi(s)} g(s) ds + \psi(x) \int_0^x \overline{\varphi(s)} g(s) ds + \\ & + \varphi(x) \int_0^\infty \overline{\psi(s)} g(s) ds, \quad g \in \mathcal{D}(A). \end{aligned}$$

Следовательно, если $Af_n \rightarrow 0$, то при всех $b < \infty$

$$\int_0^b \left| \varphi(x) \int_0^x \overline{\psi(s)} f_n(s) ds - \psi(x) \int_0^x \overline{\varphi(s)} f_n(s) ds - \varphi(x) \int_0^\infty \overline{\psi(s)} f_n(s) ds \right|^2 dx \rightarrow 0. \quad (13)$$

Легко проверить, что оператор

$$(Vf)(x) = \int_0^x V(x, s) f(s) ds$$

ограничен (даже класса Гильберта-Шмидта) в $L^2(0, b)$, $b < \infty$. Следовательно в $L^2(0, b)$

$$\begin{aligned} \varphi(x) \int_0^x \overline{\psi(s)} f_n(s) ds - \psi(x) \int_0^x \overline{\varphi(s)} f_n(s) ds \rightarrow \\ \rightarrow \varphi(x) \int_0^x \overline{\psi(s)} f(s) ds - \psi(x) \int_0^x \overline{\varphi(s)} f(s) ds. \end{aligned}$$

Так как $\varphi(x) \neq 0$, $x \in (0, b)$, то из (13) следует существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \overline{\psi(s)} f_n(s) ds = -c.$$

Таким образом,

$$\varphi(x) \left(c + \int_0^x \overline{\psi(s)} f(s) ds \right) = \psi(x) \int_0^x \overline{\varphi(s)} f(s) ds \quad (14)$$

почти всюду в $(0, \infty)$. Полагая

$$\Psi(x) = c + \int_0^x \overline{\psi(s)} f(s) ds, \quad \Phi(x) = \int_0^x \overline{\varphi(s)} f(s) ds, \quad (15)$$

в силу (14) мы можем написать

$$\overline{\Phi'(x)} \Psi(x) = \overline{\Psi'(x)} \Phi(x). \quad (16)$$

а) Пусть $\Phi(x_0) \neq 0$ и (α, β) — максимальный интервал, содержащий точку x_0 и $\Phi(x) \neq 0$ при $x \in (\alpha, \beta)$.

Тогда (α, β) — исключительный интервал. Ясно, что $\Phi(\alpha) = 0$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\Phi(x) \overline{y'} = \overline{\Phi'(x)} y, \quad \alpha < x < \beta \quad (17)$$

с условием, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) \text{ существует и конечен.} \quad (18)$$

Очевидно, что $y = \Phi(x)$ есть решение (17) и $\Phi(\alpha) = 0$. Покажем, что общее решение (17), (18) есть $C\Phi(x)$, где C — константа. Пусть

$$\Phi(x) = a(x) + ib(x), \quad y(x) = y_1(x) + iy_2(x),$$

где a, b, y_1, y_2 вещественны. Тогда уравнение (17) перейдет в систему

$$\begin{cases} a(x)y_1' + b(x)y_2' = a'(x)y_1 + b'(x)y_2, \\ b(x)y_1' - a(x)y_2' = -b'(x)y_1 + a'(x)y_2. \end{cases} \quad (19)$$

Функции $y_1 = a(x)$ и $y_2 = b(x)$ — частное решение (19). Так как $\Phi(x) \neq 0$, $x \in (\alpha, \beta)$, то, без ограничения общности, можем считать, что $a(x) \neq 0$, $x \in (\alpha, \beta)$.

Чтобы найти общее решение (19), введем новые функции z_1 и z_2 :

$$y_1 = a(x)z_1, \quad y_2 = b(x)z_1 + z_2.$$

Тогда система (19) перейдет в систему

$$\begin{cases} (a^2(x) + b^2(x))z_1' + b(x)z_2' = b'(x)z_2, \\ -a(x)z_2' = a'(x)z_2. \end{cases}$$

Отсюда легко находим z_1 и z_2 . Подставляя эти решения в (19), получаем общее решение системы (19):

$$y_1(x) = a(x)(c_1 h(x) + c_2), \quad y_2(x) = b(x)(c_1 h(x) + c_2) + \frac{c_1}{a(x)},$$

где

$$h(x) = \int_{\delta}^x \frac{b'(t)a(t) + b(t)a'(t)}{a^2(t)(a^2(t) + b^2(t))} dt, \quad (20)$$

и $\delta > 0$, c_1, c_2 – вещественные постоянные. Предположим, что

$$y_1(x) = y_{10} + o(1), \quad y_2(x) = y_{20} + o(1), \quad \text{при } x \rightarrow \alpha.$$

В силу (20) имеем

$$c_1 h(x) = \frac{y_{10} + o(1)}{a(x)}, \quad \text{при } x \rightarrow \alpha,$$

и

$$y_2(x) = \frac{c_1 + o(1)}{a(x)}, \quad \text{при } x \rightarrow \alpha.$$

Следовательно, $c_1 = 0$. Таким образом, $y(x) = c_2 \Phi(x)$. Так как $\Psi(x)$ – решение (17), (18), то $\Psi(x) = c_2 \Phi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$. Учитывая (14), получаем $\varphi(x) = c_2 \psi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$, т.е. интервал (α, β) – исключительный.

б) Пусть $\Psi(x_0) \neq 0$ и (α, β) – максимальный интервал, содержащий x_0 и $\Psi(x) \neq 0$ при $x \in (\alpha, \beta)$. Тогда (α, β) снова исключительный интервал. Сначала докажем, что $\Psi(\alpha) = 0$. Действительно, если $\alpha \neq 0$, то из $\Psi(\alpha) \neq 0$ следует, что (α, β) – не максимальный. Пусть $\alpha = 0$ и $\Psi(0) \neq 0$, Рассмотрим уравнение (17) с Ψ вместо Φ . Так как $\Phi(x)$ – решение уравнения (17) и $\Phi(0) = 0$, то $\Phi(x) = 0$ при $x \in (0, \beta)$. С учетом (14) получаем $\varphi(x) = 0$ для $x \in (0, \beta)$, что противоречит условию 1). Следовательно $\Psi(\alpha) = 0$. Повторяя рассуждения а) с заменой Φ на Ψ , заключаем, что $\psi(x) = c_1 \varphi(x)$ при $x \in (\alpha, \beta)$, т.е. (α, β) – исключительный интервал.

Пусть (α, β) – максимальный исключительный интервал. Так как функции φ и ψ не могут обращаться тождественно в нуль на одном и том же интервале и $\beta < \infty$, то из а) и б) получаем

$$\Phi(\alpha) = \Phi(\beta) = \Psi(\alpha) = \Psi(\beta) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(s)\overline{\varphi(s)} ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(s)\overline{\psi(s)} ds = 0.$$

Пусть $x \in F$. Тогда из а) и б) следует, что

$$\int_0^x f(s)\overline{\varphi(s)} ds = c - \int_0^x f(s)\overline{\psi(s)} ds = 0.$$

Отсюда следует, что $f(x)\overline{\varphi(x)} = f(x)\overline{\psi(x)} = 0$ почти всюду на F . Учитывая условие 2), получим, что $f(x) = 0$ почти всюду на F . Таким образом, мы доказали, что из $f \in H_1$ следуют условия (11) и (12).

Докажем обратное. Пусть f удовлетворяет условиям (11) и (12). Покажем, что $f \in H_1$. Сначала покажем, что f удовлетворяет уравнению (14) и $c = 0$. Пусть x принадлежит некоторому исключительному интервалу (α, β) . Тогда

$$(0, x) = \bigcup_{\beta_k < x} (\alpha_k, \beta_k) \bigcup (\alpha, x) \bigcup (F \cap (0, x)).$$

Следовательно

$$\begin{aligned} & -\varphi(x) \int_0^x \overline{\psi(s)} f(s) ds + \psi(x) \int_0^x \overline{\varphi(s)} f(s) ds = \\ & = \sum_{\beta_k < x} \left[-\varphi(x) \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \overline{\psi(s)} f(s) ds + \psi(x) \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \overline{\varphi(s)} f(s) ds \right] - \\ & -\varphi(x) \int_{\alpha}^x \overline{\psi(s)} f(s) ds + \psi(x) \int_{\alpha}^x \overline{\varphi(s)} f(s) ds = 0. \end{aligned}$$

Если же $x \in F$, то

$$(0, x) = \bigcup_{\beta_k < x} (\alpha_k, \beta_k) \bigcup (F \cap (0, x)),$$

и, как и выше, (14) легко проверяется. Так как интервал вида $(\alpha, +\infty)$ по предположению не является исключительным, то существует последовательность точек x_n , которые не принадлежат никакому исключительному интервалу и $x_n \rightarrow +\infty$.

Возьмем

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{при } x \leq x_n, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Легко проверить, что f_n удовлетворяет условиям (12), $f_n \in \mathcal{D}(A)$ и

$$Af_n = -\varphi(x) \int_0^x \overline{\psi(s)} f_n(s) ds + \psi(x) \int_0^x \overline{\varphi(s)} f_n(s) ds = 0.$$

Таким образом, $f \in H_1$. Этим завершается доказательство теоремы 3.

Замечание. Из хода доказательства теоремы 3 видно, что H_1 совпадает с множеством решений уравнения (14). Видно также, что если некоторая функция $f \in L^2(0, \infty)$ удовлетворяет уравнению (14), то $c = 0$.

Следствие 1. Отсутствие исключительного интервала необходимо и достаточно для существования обратного оператора A^{-1} ($Af \neq 0$ при $f \neq 0$).

Следствие 2. Замыкание $\overline{R(A)}$ области значений $R(A)$ совпадает с $H_0 = L^2(0, \infty) \ominus H_1$ и состоит из функций $g \in L^2(0, \infty)$, которые на интервалах (α_k, β_k) определяются следующим образом :

$$g(x) = \begin{cases} c_k \varphi(x), & \text{если } \varphi(x) \neq 0, \quad x \in (\alpha_k, \beta_k) \\ c_k \psi(x), & \text{если } \varphi(x) \equiv 0, \quad x \in (\alpha_k, \beta_k), \end{cases}$$

где c_k - произвольные комплексные числа.

Доказательство. Пусть $g \in L^2(0, \infty) \ominus \overline{R(A)}$, т.е.

$$(Af, g) = 0, \quad \text{при всех } f \in \mathcal{D}(A).$$

Это означает, что

$$\int_0^\infty \overline{g(x)} dx \int_x^\infty V(x, s) f(s) ds = \int_0^\infty f(x) dx \int_0^x \overline{g(s)} V(s, x) ds = 0$$

для любой функции f , удовлетворяющей условию (10).

Отсюда следует, что существует такая постоянная $c = c(g)$, что

$$\int_0^x \overline{V(s, x)} g(s) ds = c\varphi(x),$$

что совпадает с (14), т.е. $g \in H_1$. Это значит что $H_0 \subset \overline{R(A)}$. Соотношение $\overline{R(A)} \subset H_0$ очевидно. Мы доказали, что $\overline{R(A)} = H_0$.

Вторая часть следствия 2 проверяется с помощью теоремы 3.

Обозначим через L множество финитных функций из $L^2(0, \infty)$. Оператор A переводит $\mathcal{D}(A)$ в L . Рассмотрим уравнение

$$f - \lambda Af = g, \quad g \in L, \quad \lambda \in (-\infty, \infty),$$

которое равносильно уравнению

$$f(x) - \lambda \int_x^\infty V(x, s) f(s) ds = g(x), \quad f \in \mathcal{D}(A). \quad (21)$$

Так как условия $f \in \mathcal{D}(A)$ и $(f, \varphi) = 0$ эквивалентны, то мы можем написать

$$((I - \lambda V_1)^{-1} g, \varphi) = (g, (I - \lambda V_1^*)^{-1} \varphi) = 0,$$

где

$$(V_1 f)(x) = \int_x^\infty V(x, s) f(s) ds.$$

Учитывая, что $V(x, s) = -\overline{V(s, x)}$, получаем следующее условие разрешимости

(21):

$$\Phi(g, \lambda) = \int_0^\infty g(x) \varphi_\lambda(x) dx = 0,$$

где $\varphi_\lambda(x)$ — решение интегрального уравнения

$$\varphi_\lambda(x) + \lambda \int_0^x V(x, s) \varphi_\lambda(s) ds = \varphi(x).$$

Поэтому $\varphi_\lambda = (I + \lambda V)^{-1} \varphi$. Таким образом, функционал $\Phi(\cdot, \lambda) = (\cdot, \varphi_\lambda)$ есть направляющий функционал для A . Применяя теорему 2' получаем спектральное разложение оператора A .

Теорема 4. Существует неубывающая функция $\sigma(\lambda)$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$ такая, что продолжение по непрерывности отображения

$$U: g \mapsto \Phi(g, \lambda), \quad g \in L_0 = H_0 \cap L$$

есть изометрия из H_0 в $L_\sigma^2(-\infty, \infty)$. При этом элемент Af , $f \in \mathcal{D}(A) \cap H_0$ переходит в $\frac{1}{\lambda} \Phi(f, \lambda) \in L_\sigma^2(-\infty, \infty)$.

Пусть P_{H_1} и P_{H_0} — операторы ортогонального проектирования, соответственно, на H_1 и H_0 . Ясно, что при финитном f $P_{H_1} f$ и $P_{H_0} f$ тоже финитны (хотя они могут быть b -финитными, в то время, как f была a -финитной, $b > a$).

Имеем

$$P_{H_0} f = \begin{cases} f(x), & x \in F, \\ c_k \varphi(x) \quad \text{или} \quad c_k \psi(x), & x \in (\alpha_k, \beta_k), \end{cases}$$

где

$$c_k = \frac{\int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(s) \overline{\varphi(s)} ds}{\int_{\alpha_k}^{\beta_k} |\varphi(s)|^2 ds} \quad \text{или} \quad c_k = \frac{\int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(s) \overline{\psi(s)} ds}{\int_{\alpha_k}^{\beta_k} |\psi(s)|^2 ds}, \quad \text{или} \quad \varphi(s) \equiv 0 \quad \text{на} \quad (\alpha_k, \beta_k).$$

С помощью теоремы 3 легко проверяется, что подпространства H_1 и H_0 приводят оператор A , т.е. из $f \in \mathcal{D}(A)$ следует, что $P_{H_0}f \in \mathcal{D}(A)$, $P_{H_1}f \in \mathcal{D}(A)$ и $P_{H_1}Af = AP_{H_1}f$.

Пусть $A_0f = AP_{H_0}f$, $f \in \mathcal{D}(A) \cap H_0$. Так как $\{f \in \mathcal{D}(A) : Af = 0\} \subset H_1$ и по следствию $2 \overline{R(A)} = H_0$, то A_0^{-1} — симметрический оператор с плотной областью определения в H_0 . В дальнейшем предположим, что

$$\int_0^{\infty} (|\varphi(s)|^2 + |\psi(s)|^2) ds = \infty. \quad (22)$$

Теорема 5. При условии (22) хотя бы одно из дефектных чисел оператора A_0 равно нулю.

Доказательство. Найдем $(A_0^{-1})^*$. Пусть функция $g \in H_0$ такая, что для любой $f \in \mathcal{D}(A)$ существует $g^* \in H_0$, для которой $(A_0^{-1}f, g) = (f, g^*)$. Другими словами, для любой $f_1 \in H_0 \cap \mathcal{D}(A_0)$ имеем $(f_1, g) = (Af_1, g)$. Отсюда и учитывая, что $V(x, s) = -\overline{V(s, x)}$, после изменения порядка интегрирования получаем, что, существуют такая постоянная $c = c(g)$ и функция f_2 , ортогональная к H_0 , что

$$g(x) = c\varphi(x) - \int_0^x V(x, s)g^*(s) ds + f_2(x).$$

Легко видеть, что $f_2(x) = 0$. Таким образом, $g \in \mathcal{D}((A_0^{-1})^*)$ означает, что существуют постоянная $c = c(g)$ и функция $g^*(x) \in H_0$ такие, что

$$g(x) = c(g)\varphi(x) - \int_0^x V(x, s)g^*(s) ds,$$

и $(A_0^{-1})^*g = g^*$. Рассмотрим уравнение

$$(A_0^{-1})^*g - \lambda g = 0, \quad (23)$$

которое равносильно уравнению

$$g^*(x) + \lambda \int_0^x V(x, s)g^*(s) ds = \lambda c\varphi(x). \quad (24)$$

Отсюда следует, что $g^*(x) = \lambda c\varphi_\lambda(x)$, т.е. $g(x) = c\varphi_\lambda(x)$. Таким образом, дефектные числа оператора A_0^{-1} не больше 1. Пусть оба дефектных числа равны 1. Это означает, что $\varphi_\lambda(x) \in L^2(0, \infty)$ для всех λ , $\text{Im} \lambda \neq 0$ и что оператор

A_0^{-1} имеет самосопряженное расширение. Из последнего следует, что уравнение $(A_0^{-1})^* f - \lambda f = g$, т.е. уравнение

$$f^*(x) - \lambda \left(c\varphi(x) - \int_0^x V(x, s) f^*(s) ds \right) = g(x)$$

для любой функции $g \in H_0$ при некотором $c = c(g)$ имеет решение $f^* \in L^2(0, \infty)$.

Отсюда получаем

$$f^*(x) = (I + \lambda V)^{-1} g + \lambda c_1 \varphi_\lambda(x), \quad (25)$$

где c_1 — произвольная постоянная. Теперь найдем $(I + \lambda V)^{-1}$. Легко проверить, что

$$V - (\cdot, \psi)\varphi = V^* - (\cdot, \varphi)\psi.$$

Следовательно

$$(I + \bar{\lambda}V)^{-1} - (I + \bar{\lambda}V^*)^{-1} = -\lambda [(\cdot, \psi_\lambda)\varphi_{\bar{\lambda}} - (\cdot, \varphi_\lambda)\psi_{\bar{\lambda}}]. \quad (26)$$

Пусть $C_\lambda = C(I + \lambda C)^{-1}$ — фредгольмова резольвента оператора C . Тогда из (26) следует, что

$$V_{\bar{\lambda}} - (V^*)_{\bar{\lambda}} = (\cdot, \psi_\lambda)\varphi_{\bar{\lambda}} - (\cdot, \varphi_\lambda)\psi_{\bar{\lambda}}. \quad (27)$$

Так как ядра $V_\lambda(x, s)$ и $(V^*)_\lambda(x, s)$ операторов V_λ и V_λ^* треугольны ($V_\lambda(x, s) = 0$ при $s > x$ и $(V^*)_\lambda(x, s) = 0$ при $s < x$), то из (27) следует, что

$$V_\lambda(x, s) = \varphi_\lambda(x)\overline{\psi_{\bar{\lambda}}(s)} - \psi_\lambda(x)\overline{\varphi_{\bar{\lambda}}(s)}, \quad x > s. \quad (28)$$

Подставляя это выражение в (25), получаем

$$f^*(x) = g(x) - \lambda \int_0^x \left(\varphi_\lambda(x)\overline{\psi_{\bar{\lambda}}(s)} - \psi_\lambda(x)\overline{\varphi_{\bar{\lambda}}(s)} \right) g(s) ds + \lambda c_1 \varphi_\lambda(x). \quad (29)$$

Пусть g — финитная функция такая, что $g(x) = 0$ при $x > a$ и

$$\int_0^a g(x)\overline{\varphi_\lambda(x)} dx \neq 0.$$

Из (29) и $f^*, \varphi_\lambda \in L^2(0, \infty)$ следует $\psi_\lambda \in L^2(0, \infty)$. Итак, $\varphi_\lambda, \psi_\lambda \in L^2(0, \infty)$ при любом λ , $\text{Im} \lambda \neq 0$. Легко показать, что если $\varphi_\lambda, \psi_\lambda, \varphi_{\bar{\lambda}}, \psi_{\bar{\lambda}} \in L^2(0, \infty)$, то

вольтеров оператор V_λ , порожденный ядром $V_\lambda(x, s)$ в $L^2(0, \infty)$ будет вполне непрерывным (даже класса Гильберта-Шмидта). Так как очевидно, что оператор $I - \lambda V_\lambda$ никогда не обращается в нуль, то оператор

$$I + \lambda V = (I - \lambda V_\lambda)^{-1}$$

будет ограниченным в $L^2(0, \infty)$. Следовательно

$$\varphi = (I + \lambda V)\varphi_\lambda \in L^2(0, \infty), \quad \psi = (I + \lambda V)\psi_\lambda \in L^2(0, \infty),$$

что противоречит условию (22). Теорема 5 доказана.

Легко проверить (см. [4]), что $\Phi(f, \lambda)$, $f \in L \cap H_0$ есть направляющий функционал для оператора A_0^{-1} . Следовательно, из теоремы 4 и теоремы Крейна (утверждающей, что для единственности спектральной функции необходимо и достаточно равенство нулю хотя бы одного из дефектных чисел оператора A_0^{-1}) получаем

Следствие 3. Спектральная функция $\sigma(\lambda)$ оператора A единственна.

В частности, если функции φ и ψ вещественны, то дефектные числа оператора A совпадают и их общее значение равно нулю. Следовательно, в этом случае оператор $\overline{A_0^{-1}}$ самосопряженный; что было также доказано в [4].

Покажем, что если $\varphi_\lambda \in L^2(0, \infty)$ и λ вещественно, то λ будет собственным значением, а φ_λ - соответствующей собственной функцией оператора $\overline{A_0^{-1}}$. Пусть сначала $\lambda = 0$, т.е. $\varphi \in L^2(0, \infty)$. Так как $(A_0^{-1}g, \varphi) = 0$ для всех $g \in \mathcal{D}(A_0^{-1})$, то из самосопряженности $\overline{A_0^{-1}}$ следует, что $(g, \overline{A_0^{-1}}\varphi) = 0$, откуда $\overline{A_0^{-1}}\varphi = 0$. Прежде чем перейти к случаю произвольного λ , найдем фредгольмову резольвенту $A_\lambda = A(I - \lambda A)^{-1}$ оператора A . Так как $Af = -V^*f$ для $f \in \mathcal{D}(A)$, то

$$(I - \lambda A)^{-1}g = (I + \lambda V^*)^{-1}g,$$

т.е. $A_\lambda g = (V^*)_\lambda g$, где $(g, \varphi_\lambda) = 0$. Учитывая (26) и $(V^*)_\lambda(x, s) = -\overline{(V^*)_\lambda(x, s)}$, получим

$$(A_\lambda g)(x) = \varphi_\lambda(x) \int_x^\infty \overline{\psi_\lambda(s)} g(s) ds + \psi_\lambda(x) \int_x^\infty \overline{\varphi_\lambda(s)} g(s) ds$$

для тех g , для которых $(g, \varphi_{\bar{\lambda}}) = 0$. Таким образом, A_{λ} есть однопарный оператор. Если λ вещественно, то A_{λ} симметричен и при этом роль φ и ψ играют φ_{λ} и ψ_{λ} соответственно.

Пусть $\varphi_{\lambda} \in L^2(0, \infty)$, $\text{Im} \lambda = 0$. Тогда по уже доказанному, 0 будет собственным значением, а φ_{λ} — соответствующей собственной функцией для замыкания оператора

$$(A_{\lambda} P_{H_0})^{-1} = A_0^{-1} - \lambda I, \quad \text{т.е.} \quad \overline{A_0^{-1}} \varphi_{\lambda} = \lambda \varphi_{\lambda}.$$

Заметим, что если $\varphi \in L^2(0, \infty)$ и выполняется (22), то оператор A не будет иметь замыкания. Действительно, из $\overline{A_0^{-1}} \varphi = 0$ следует, что существует $f_n \in \mathcal{D}(A_0^{-1})$ такая, что $f_n \rightarrow \varphi$ и $A_0^{-1} f_n \rightarrow 0$. Это означает, что при $g_n = A_0^{-1} f_n$ имеем $g_n \rightarrow 0$ и $A g_n \rightarrow \varphi \neq 0$.

ABSTRACT. M. G. Krein's method of directing functionals is applied to the isometric operators as well as to the symmetric operators with non-dense domain of definition. The results are applied to the one-pair integral operators. We obtain their spectral expansions and prove the uniqueness of the corresponding spectral functions.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. Г. Крейн, "Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения", ДАН СССР, т. 53, № 1, стр. 3 – 6, 1946.
2. М. Г. Крейн, "Про ермітові оператори з напрямними функціоналами", Сб. трудов Ін-та математики АН УССР, т. 10, стр. 83 – 106, 1948.
3. L. de Branges, "Some Hilbert spaces of entire functions. IV", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 105, pp. 43 – 83, 1962.
4. В. А. Яврян, "К спектральной теории однопарных интегральных операторов", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 22, № 1, стр. 75 – 93, 1987.
5. М. А. Красносельский, "О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов", Украинский матем. журнал, т. 1, стр. 21 – 38, 1949.
6. H. Langer, B. Textorius, "A generalization of M. G. Krein's method of directing functionals to linear relations", Proc. Roy. Soc. Edinburgh, vol. 81A, pp. 237 – 246, 1978.
7. F. R. Gantmacher, M. G. Krein, Oszillation Matrizen, Oszillation Kerne und Kleine Schwingungen Mechanischer Systeme, Akademie Verlag, Berlin, 1960.