Посвящается профессору
Мхитару М. Джрбашяну
в связи 75-летним юбилеем

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ТЕОРЕМЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. А. Вагаршакян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 28, №4, 1993

Обозначим через h_1 класс гармонических функций, определенных на единичном круге и удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(r e^{ix})| dx < \infty.$$

Согласно классической теореме Рисса-Герглотца h_1 совпадает с множеством функций, допускающих представление

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} d\mu(t),$$

где $d\mu$ — конечная мера. Из этого представления следует, что любую функцию $u(z) \in h_1$ можно записать в виде

$$u(z) = u_1(z) - u_2(z), \quad (1)$$

где $u_1(z)$ и $u_2(z)$ — неотрицательные гармонические функции.

В работе рассматривается более широкий чем h_1 класс h гармонических функций. Мы обсудим следующий вопрос: можно ли представить любую функцию $u(z) \in h$ в виде (1), каждая из функций u_1, u_2 допускает оценки значительно лучшие, чем это возможно для всех функций из h ?

1°. Рассмотрим функции

$$A(z) = 1 + r \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} r^n \cos(nx) \ln n, \quad z = re^{ix}$$

$$B(z) = 1 + r \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^n}{\ln n} \cos(nx), \quad 0 < r < 1.$$

Гармоническая функция $u(z)$ принадлежит классу h , если

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{it}) B(re^{i(x-t)}) dt \right| dx < \infty. \quad (2)$$

Заметим, что аналогичные классы гармонических функций были введены и исследованы в работе М. М. Джрбашяна [1]. Они обозначались через U_{ω} , где $\omega(x)$ — неотрицательная интегрируемая функция, определенная на $[0, 1]$. Вопрос существования и построения функции $\omega_0(t)$, для которой определены $U_{\omega_0} \equiv h$ нам представляется не простой задачей.

Теорема 1. *Класс h совпадает с множеством гармонических функций, допускающих представление*

$$u(z) = \int_{-\pi}^{\pi} A(ze^{-it}) d\mu(t), \quad (3)$$

где $d\mu$ — конечная мера.

Доказательство очевидно и непосредственно следует из теоремы Ф. Рисса и Г. Герглотца.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 2. *Любое $u(z) \in h$ можно записать в виде*

$$u(z) = u_1(z) - u_2(z),$$

где $u_1(z)$ и $u_2(z)$ принадлежат классу h и допускают оценку

$$u_k(z) \leq \frac{M}{(1 - |z|) \log \frac{2}{1 - |z|}}, \quad |z| < 1, \quad k = 1, 2.$$

Доказательство. Из теории чисел хорошо известна функция $\Lambda(n)$, которая определена на натуральных числах следующим образом: если $n = p^m$, где p

— простое число, то $\Lambda(p^m) = \ln p$; для всех других n , $\Lambda(n) = 0$. Из определения $\Lambda(n)$ имеем

$$\ln n = \sum_{n/d} \Lambda(d),$$

где n/d означает, что d — делитель n .

Обозначим через $\xi_n = \exp\left(\frac{2\pi}{n}i\right)$, $n = 1, 2, \dots$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 - |z|^2}{|1 - z\xi_n^k|^2} - 1 \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|} \xi_n^{jk} e^{ijx} \right) - 1 \right] = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} r^j \left(\sum_{j/n} \Lambda(n) \right) \cos(jx) = \sum_{j=1}^{\infty} r^j \cos(jx) \ln j. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 - |z|^2}{|1 - z\xi_n^k|^2} = \frac{1 - |z|^{2n}}{|1 - z^n|^2}.$$

Следующее неравенство справедливо для любых z , $|z| < 1$

$$-|z|^{\frac{n}{2}} \leq \frac{1 - |z|^{2n}}{|1 - z^n|^2} - 1.$$

В самом деле, так как

$$|1 - z^n|^2 \leq (1 + |z|^n)^2 \leq \frac{(1 - |z|^{\frac{n}{2}})(1 + |z|^{\frac{n}{2}})(1 + |z|^n)}{1 - |z|^{\frac{n}{2}}} = \frac{1 - |z|^{2n}}{1 - |z|^{\frac{n}{2}}},$$

то требуемое неравенство верно.

Функция $A(z)$ допускает представление

$$-\sum_p \ln p \left(\sum_{m=1}^{\infty} |z|^{\frac{p^m}{2}} \right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) |z|^{\frac{n}{2}} \leq A(z),$$

где сумма берется по всем простым числам. Далее, имеем

$$\begin{aligned} -\int_2^{\infty} \frac{|z|^{\frac{x}{2}}}{\ln x} dx &\leq -\int_2^{\infty} \frac{\pi(x)}{x} |z|^{\frac{x}{2}} dx \leq -\int_2^{\infty} \left(\int_t^{\infty} \frac{|z|^{\frac{y}{2}}}{y} dy \right) d\pi(t) = \\ &= -\int_2^{\infty} \left(\int_1^{\infty} |z|^{\frac{t}{2}} dx \right) \ln t d\pi(t) \leq A(z), \end{aligned}$$

где $|z| < 1$ and $\pi(x)$ количество простых чисел, не превосходящих x . В последнем неравенстве мы использовали известную оценку $\pi(x) \leq \frac{x}{\ln x}$. Таким образом

$$-\frac{A}{(1 - |z|) \ln \frac{2}{1 - |z|}} \leq A(z), \quad |z| < 1. \quad (4)$$

Конечная мера $d\mu$ в (3) представляется в виде

$$d\mu = d\mu_1 - d\mu_2,$$

где $d\mu_1$ и $d\mu_2$ — неотрицательные меры. Положим

$$u_1(z) = \int_{-\pi}^{\pi} A(ze^{-it}) d\mu_2(t), \quad u_2(z) = \int_{-\pi}^{\pi} A(ze^{-it}) d\mu_1(t).$$

Из (4) следует, что $u_1(z)$ и $u_2(z)$ допускают требуемую оценку.

2°. Теорему 2 нельзя улучшить. Действительно, любая функция из h не может быть представлена в виде (1), где гармонические функции $u_1(z)$ и $u_2(z)$ допускают оценку

$$u_k(z) \leq \frac{M}{(1-|z|) \ln^{1+\varepsilon} \frac{2}{1-|z|}}, \quad |z| < 1, \quad k = 1, 2.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — фиксированное число. В самом деле, в силу теоремы Никольского [2], если гармоническая функция удовлетворяет условию

$$u(z) \leq \varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right), \quad |z| < 1,$$

где $\varphi(t) > 0$ и правильно растет, то при $t \rightarrow +\infty$ имеем

$$|u(z)| \leq \frac{c}{1-|z|} \left(\int_0^{(1-|z|)^{-1}} \sqrt{\frac{\varphi(t)}{t^3}} dt \right)^2, \quad |z| < 1.$$

Используя эту теорему, получаем

$$\frac{c}{1-|z|} \ln^{1-\varepsilon} \frac{2}{1-|z|} \leq u_k(z).$$

Поэтому

$$|u(z)| \leq |u_1(z)| + |u_2(z)| \leq \frac{2c}{1-|z|} \ln^{1-\varepsilon} \frac{2}{1-|z|}, \quad |z| < 1. \quad (5)$$

Однако $A(z) \in h$ не удовлетворяет условию (5), так как

$$\frac{c}{1-r} \ln \frac{2}{1-r} \leq 1+r + \sum_{n=2}^{\infty} r^n \ln n = A(r), \quad 0 < r < 1$$

для некоторого $c > 0$.

Для функции из h возможно привести другое интегральное представление, где ядро Пуассона сохраняется, однако вместо $d\mu$ стоит обобщенная функция. Именно этот путь обобщения формулы Рисса-Берглота рассмотрен в работе [3]. Для класса h можно привести аналогичное интегральное представление. Тогда Теорема 2 станет своеобразным обобщением для некоторого класса обобщенных функций теоремы Жордана о представлении конечной меры в виде разности двух неотрицательных мер.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "Обобщенный оператор Римана - Лиувилля и некоторые его применения", Изв. АН СССР, Математика, т. 32, стр. 1075 - 1111, 1968.
2. Н. К. Никольский, "Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального синтеза", Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 120, 1974.
3. W. Hayman and B. Korenblum, "An extension of the Riesz - Berglotz formula," Annals Acad. Sci. Fennice, series A1, Mathem., vol. 2, pp. 175 - 201, 1976.

10 Августа 1993

Институт математики
НАН Армении