ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Г. В. Вирабян

Известия Академии Наук Армении. Математика,
том 27, №1, 1992

Работа посвящена разрешимости первой краевой (Дирихле) задачи для биволнового уравнения. Доказано существование по крайней мере одного самосопряженного расширения дифференциального оператора, порожденного такой задачей. Построены так называемые самосопряженные расширения таких операторов и описаны все положительно определенные самосопряженные расширения таких операторов. Показана также тесная связь таких операторов с операторами типа Соболева.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для гиперболических уравнений второго порядка с условиями на всей границе были рассмотрены в многочисленных работах как советских, так и зарубежных авторов (см., например, [1]). Они имели значительные приложения в теории малых колебаний континуумов. В частности, в теории волноводов, малых колебаний вращающейся идеальной жидкости и т.д.

Мы исследуем здесь первую краевую (Дирихле) задачу для биволнового уравнения. Задача Дирихле для гиперболического уравнения четвертого порядка с параметром была впервые рассмотрена в [2].

Пусть Ω - ограниченная область в плоскости x, y с аналитической границей $\partial\Omega$. Мы рассмотрим в Ω первую краевую (Дирихле) задачу для биволнового уравнения

$$D^4_{xxyy} u \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = f(x, y), \tag{I}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{II}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ - обозначает дифференцирование в направлении внешней нормали к $\partial\Omega$. Соответствующую однородную задачу (т. е. когда $f(x, y) = 0$) обозначим через

$(I_0),(II_0)$. Более детальные формулировки краевых задач (I),(II),(I_0),(II_0) будут даны ниже.

§1. ФОРМУЛА ГРИНА ВОЛНОВОГО-D^2_{xy} И БИВОЛНОВОГО-D^4_{xxyy} ОПЕРАТОРОВ

Пусть $u(x,y)$ и $v(x,y)$ - произвольные функции из класса $C^4(\overline{\Omega})$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Легко проверить следующие тождества :

$$vD^2_{xy}u - uD^2_{xy}v = \frac{\partial}{\partial x}\Big(v\frac{\partial u}{\partial y}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(u\frac{\partial v}{\partial x}\Big), \qquad \forall u,v \in C^2(\overline{\Omega}) \tag{1}$$

$$vD^4_{xxyy}u - uD^4_{xxyy}v = \frac{\partial}{\partial x}\Big\{v\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big\} + \frac{\partial}{\partial y}\Big\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}u\Big\},$$
$$\forall u,v \in C^4(\overline{\Omega}). \tag{2}$$

Интегрируя тождества (1), (2) по области Ω, получаем формулы Грина для двумерного волнового и биволнового операторов :

$$\iint\limits_{\Omega}\{vD^2_{xy}u - uD^2_{xy}v\}dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial y}dy + u\frac{\partial v}{\partial x}dx, \qquad \forall u,v \in C^2(\overline{\Omega}), \tag{3}$$

$$\iint\limits_{\Omega}\{vD^4_{xxyy}u - uD^4_{xxyy}v\}dxdy = \int\limits_{\partial\Omega}\Big[v\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big]dy +$$
$$+\Big[\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}u - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y}\Big]dx, \quad \forall u,v \in C^4(\overline{\Omega}). \tag{4}$$

Переходя к пределу и воспользовавшись теоремами вложения Соболева [3], можно убедиться, что формулы Грина (3) и (4) остаются справедливыми для любых $u,v \in W^2_2(\Omega)$ и $u,v \in W^4_2(\Omega)$, соответственно. Все производные в (3) и (4) понимаются в обобщенном смысле.

Обозначим через $\dot{W}^1_2(\Omega)$ соболевское пространство функций из $W^1_2(\Omega)$, обращающихся в нуль почти всюду на $\partial\Omega$, а через $\tilde{W}^2_2(\Omega)$ - пространство функций из W^2_2, удовлетворяющих краевым условиям (II) в смысле теорем вложения Соболева. Через $\dot{C}_\infty(\overline{\Omega})$ обозначим множество бесконечно дифференцируемых функций на замкнутом множестве $\overline{\Omega}$, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$, а через $\tilde{C}_\infty(\overline{\Omega})$ - множество бесконечно дифференцируемых функций на $\overline{\Omega}$, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$ вместе со своими нормальными производными.

Вместе с краевыми задачами (I),(II) мы рассмотрим также задачу Дирихле для двумерного волнового уравнения

$$D^2_{xy}u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = g(x, y), \tag{III}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{IV}$$

Соответствующую однородную задачу ($g(x, y) = 0$) мы обозначим через (III_0), (IV_0).

Введем некоторые определения, уточняющие формулировки краевых задач (I), (II) и (III), (IV).

Определение 1.1. Функция $u(x, y)$ называется регулярным (классическим) решением краевой задачи (I), (II), если $u(x, y) \in C^2(\overline{\Omega})$ удовлетворяет уравнению в области Ω и обращается в нуль на границе $\partial\Omega$ вместе со своими нормальными производными.

Определение 2.1. Функция $u(x, y)$ называется сильно обобщенным решением краевой задачи (I), (II), если $u(x, y) \in \ddot{W}^2_2(\Omega)$ и равенство

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \, dx dy = \iint\limits_{\Omega} f(x, y) \, \psi(x, y) \, dx dy \tag{5}$$

имеет место для всех $\psi(x, y) \in \ddot{W}^2_2(\Omega)$.

Определение 3.1. Функция $u(x, y)$ называется слабо обобщенным решением краевой задачи (I), (II), если $u(x, y) \in W^2_2(\Omega)$ и интегральное равенство

$$\iint\limits_{\Omega} u(x, y) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \, dx dy = \iint\limits_{\Omega} f(x, y) \, \varphi(x, y) \, dx dy + \int\limits_{\partial\Omega} \{u \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\} dy \tag{6}$$

имеет место для всех $\varphi(x, y) \in \ddot{C}_\infty(\overline{\Omega})$.

Определение 1°.1. Функция $u(x, y)$ называется регулярным (классическим) решением краевой задачи (III), (IV), если $u(x, y) \in C(\overline{\Omega})$ удовлетворяет уравнению (III) в области Ω и краевому условию (IV).

Определение 2°.1 Функция $u(x, y)$ называется сильно обобщенным решением краевой задачи (III), (IV), если $u(x, y) \in \dot{W}^1_2(\Omega)$ и равенство

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \, dx dy = - \iint\limits_{\Omega} f(x, y) \, \psi(x, y) dx dy \tag{7}$$

имеет место для всех $\psi(x, y) \in \dot{W}^1_2(\Omega)$.

Определение 3°.1 Функция $u(x,y)$ называется слабо обобщенным решением краевой задачи (III), (IV), если $u(x,y) \in L_2(\Omega)$ и интегральное равенство

$$\iint\limits_{\Omega} u(x,y)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\,dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial\varphi}{\partial n}dy + \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\varphi(x,y)\,dxdy \tag{8}$$

имеет место для $\varphi(x,y) \in \dot{C}_\infty(\overline{\Omega})$.

Замечание 1.1. Легко проверить, что регулярные решения наших краевых задач являются сильно обобщенными решениями, а, следовательно,также и слабо обобщенными решениями. Обратное верно только при дополнительных условиях гладкости.

§2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Докажем следующую лемму.

Лемма 1.2. *Если $u(x,y)$ является регулярным решением краевой задачи (III), (IV) и удовлетворяет условию*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{9}$$

то $u(x,y) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ - регулярное решение задачи (III), (IV), удовлетворяющее условию (9). Тогда $u(x,y)$ можно представить в виде

$$u(x,y) = f(x) + g(y), \tag{10}$$

где $f(x) \in C^1[\alpha,\beta]$, $g(y) \in C^1[\gamma,\delta]$. Из краевых условий (II) следует, что

$$u|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{11}$$

Из (10) и (11) имеем

$$f'(x) = 0, \qquad g'(y) = 0, \quad \alpha \le x \le \beta, \quad \gamma \le y \le \delta, \tag{12}$$

т.е. $f(x) \equiv c_1$, $g(y) \equiv c_2$, а из краевого условия (IV) следует, что $c_1 = -c_2$, т.е. $u(x,y) \equiv 0$. Лемма доказана.

Теорема 1.2. *Однородная краевая задача Дирихле для биволнового уравнения в классе регулярных решений из пространства $C^4(\overline{\Omega})$ имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Пусть $u(x,y) \in C^4(\overline{\Omega})$ - регулярное решение задачи $(\mathrm{I}_o),(\mathrm{II}_o)$. Подставляя $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in C^2(\overline{\Omega})$ вместо $v(x,y)$, получаем

$$\iint\limits_{\Omega} \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big)^2 dxdy = \iint\limits_{\Omega} u \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} dxdy + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} dy + \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx. \tag{13}$$

Так как $u(x,y)$ удовлетворяет биволновому уравнению, а из краевых условий (II) следует (11), то

$$\iint\limits_{\Omega} \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big)^2 dxdy = 0. \tag{14}$$

Таким образом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \text{в} \quad \Omega \tag{15}$$

и условия (11) выполнены.

Согласно Лемме 1.2 $u(x,y) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. *В классе сильно обобщенных решений из $C^1(\overline{\Omega})$ однородная краевая задача Дирихле для биволнового уравнения имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Пусть $u(x,y) \in C^1(\overline{\Omega})$ - сильно обобщенное решение задачи (I),(II). Это означает, что

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dxdy = 0, \qquad \forall \psi(x,y) \in \ddot{W}_2^2(\Omega). \tag{16}$$

Возьмем $\psi(x,y) = u(x,y)$. Из (16) имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \text{в} \quad L_2(\Omega). \tag{17}$$

Тогда по лемме Березанского [3](стр. 299) можно представить $u(x,y)$ в виде (10).

Из того, что $u(x,y) \in \ddot{W}_2^2(\Omega)$ следует, что

$$[f(x) + g(y)]|_{\partial\Omega} = 0, \tag{18}$$

$$f'(x) = 0, \qquad x \in [\alpha, \beta], \tag{19}$$

$$g'(y) = 0, \qquad y \in [\gamma, \delta]. \tag{20}$$

Из (18) - (20) получаем, что $u(x,y) = 0$. Теорема доказана.

§3. ОПЕРАТОРНАЯ ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БИВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Целью настоящего параграфа является установления теорем разрешимости неоднородной краевой задачи для биволнового уравнения замсной краевой задачи соответствующим операторным уравнением.

Обозначим через $\mathbf{D}^4$ дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением $\dfrac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}$ и действующим из $\ddot{C}_\infty(\overline{\Omega})$ в $L_2(\Omega)$

$$\mathbf{D}^4: \qquad \ddot{C}_\infty(\overline{\Omega}) \longmapsto L_2(\Omega). \tag{21}$$

Из формулы Грина (4) следует симметричность этого оператора. Легко проверить, что оператор $\mathbf{D}^4$ допускает замыкание в метрике пространства $L_2(\Omega)$. Это замыкание обозначим через $\overline{\mathbf{D}^4}$ (так называемый минимальный оператор, порожденный дифференциальным выражением $\dfrac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}$). Область определения замыкания $\overline{\mathbf{D}^4}$ обозначим через $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}^4},)$а область значений оператора $\overline{\mathbf{D}^4}$ через $R(\overline{\mathbf{D}^4})$. Вместо краевой задачи для биволнового уравнения рассмотрим операторное уравнение

$$\overline{\mathbf{D}^4}u = f(x,y), \qquad f(x,y) \in L_2(\Omega), \tag{$\bar{\mathrm{I}}$}$$

$$u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}^4}). \tag{$\overline{\mathrm{II}}$}$$

Решения задачи (I), ($\overline{\mathrm{II}}$) назовем сильно обобщенными решениями краевой задачи (I),(II). Краевое условие (II) заменено требованием того, чтобы функция $u(x,y)$ принадлежала пространству $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}^4}.)$

Оператор, сопряженный $\overline{\mathbf{D}^4}$ относительно скалярного произведения в $L_2(\Omega)$, обозначим через $\overline{\mathbf{D}^4}^*$ (максимальный оператор), а его область определения через - $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}^4}^*)$.

Рассмотрим операторное уравнение

$$\overline{\mathbf{D}^4}^* u = f(x,y), \qquad f(x,y) \in L_2(\Omega), \tag{I^*}$$

$$u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}^4}^*). \tag{$\overline{\mathrm{II}}^*$}$$

Решения уравнения (I^*) из пространства $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}^4}^*)$считаются слабо обобщенными решениями задачи (I),(II). Очевидно, что $\overline{\mathbf{D}^4} \subseteq \overline{\mathbf{D}^4}^*$. Обозначим через

D_o^4 оператор $\mathrm{D}^4 = \dfrac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$ на многообразии $\Phi_4(\overline{\Omega})$ четырежды непрерывно-дифференцируемых и финитных функций в Ω и рассмотрим уравнения

$$\mathrm{D}_o^4 u = f(x, y), \qquad u \in \mathcal{D}(\mathrm{D}_o^4) = \Phi_4(\overline{\Omega}), \tag{I}$$

$$\mathrm{D}_o^{4^*} v = f(x, y), \qquad v \in \mathcal{D}(\mathrm{D}_o^{4^*}), \tag{I*}$$

где $\mathrm{D}_o^{4^*}$ - сопряженный к D^4 , действующий в $L_2(\Omega)$.

Лемма 1.3. *Оператор* D_o^4 *симметричен, а* $\mathcal{D}(\mathrm{D}_o^{4^*})$ *совпадает с множеством всех функций* $u \in L_2(\Omega)$, *имеющих обобщенные производные* $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \in L_2(\Omega)$.

Доказательство следует из формулы Грина (4) и из определения обобщенной функции в смысле Соболева.

Лемма 2.3. *Оператор* D_o^4 *на области его значений* $R(\mathrm{D}_o^4)$ *имеет ограниченный обратный* $\mathrm{D}_o^{4^{-1}}$.

Доказательство. Повторно применяя неравенство Фридрихса [4] к произвольной функции $u(x, y) \in \mathcal{D}(\mathrm{D}_o^4)$, получаем

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq c \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right\|_{L_2(\Omega)}, \tag{22}$$

где c - постоянная, зависящая только от области Ω. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Операторное уравнение* (I^*) *для произвольной функции* $f(x, y) \in L_2(\Omega)$ *имеет решение из пространства* $\mathcal{D}(\mathrm{D}_o^{4^*})$.

Доказательство следует из того, что если симметрический оператор D_o^4 на области своих значений $R(\mathrm{D}_o^4)$ имеет ограниченный обратный, то $R(\mathrm{D}_o^{4^*}) = L_2(\Omega)$.

Аппроксимируя функции $u(x, y) \in \mathcal{D}(\mathrm{D}_o^4)$средними в смысле Соболева функциями, легко видеть, что неравенство (22) выполняется и для оператора D^4. Более того, неравенство (22) справедливо также для оператора $\overline{\mathrm{D}^4}$, который, будучи замыканием симметрического оператора D^4, является замкнутым симметрическим оператором. Таким образом, операторы D^4 и $\overline{\mathrm{D}^4}$ имеют ограниченные обратные с областью значений $R(\mathrm{D}^4)$ и $R(\overline{\mathrm{D}^4})$, соответственно, а $R(\overline{\mathrm{D}^4})$ является подпространством в $L_2(\Omega)$. Следовательно, справедливая следующая

Теорема 3.3. *Для любых* $f(x,y) \in L_2(\Omega)$ *операторное уравнение*

$$\mathbf{D}^{4^*} u = f(x,y) \tag{23}$$

имеет решение.

Определение. Операторное уравнение

$$Ax = y \tag{$*$}$$

или оператор A в гильбертовом пространстве H называется нормально разрешимым, если условие : $y \in H$ -ортогонально к подпространству решений уравнения

$$A^* z = 0. \tag{$**$}$$

является необходимым и достаточным (не обязательно однозначно) для разрешимости уравнения $(*)$.

Теорема 4.3. *Операторное уравнение* $(\bar{I})$ *является нормально (не обязательно однозначно) разрешимым в* $L_2(\Omega)$.

Так как симметрический замкнутый оператор $\overline{\mathbf{D}^4}$ с плотной в $L_2(\Omega)$ областью определения $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}^4})$имеет ограниченный обратный на подпространстве $R(\overline{\mathbf{D}^4})$, то справедливо следуюшее утверждение.

Теорема 5.3. *Оператор* $\overline{\mathbf{D}^4}$ *имеет не менее одного самосопряженного расширения* T_o *в* $L_2(\Omega)$ *такого, что уравнение*

$$T_o u = f(x,y) \tag{24}$$

однозначно разрешимо для любых $f(x,y) \in L_2(\Omega)$.

Решения операторного уравнения (24) считаются обобщенными решениями задачи (I),(II).

Замечание 1.3. Область определения $\mathcal{D}(T_o)$самосопряженного расширения T_o оператора $\overline{\mathbf{D}^4}$ можно представить как прямую сумму

$$\mathcal{D}(T_o) = \mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}^4}) \dot{+} M, \tag{25}$$

где M - множество всех таких функций из $L_2(\Omega)$, которые имеют обобщенные производные $\mathbf{D}^4 u$ и $(\mathbf{D}^4)^2 u$ из $L_2(\Omega)$ и ортогональны ко всем решениям уравнения

$$\overline{\mathbf{D}^4}^{*}\, v = 0. \tag{26}$$

Оператор T_o действует на функциях $u \in \mathcal{D}(T_o)$как обобщенная производная в смысле Соболева

$$T_o u = \mathbf{D}^4 u \in L_2(\Omega). \tag{27}$$

Замечание 2.3 Теорема 2.2 означает, что ядро оператора $\overline{\mathbf{D}^4}$ состоит из нулевого элемента.

Замечание 3.3. Теоремы 3-5 об операторных уравнениях можно переформулировать, как теоремы существования и единственности (нормальной разрешимости) сильно обобщенного или слабо обобщенного решения краевой задачи (I), (II). Для этого достаточно заменить в формулировках указанных теорем соответствующее операторное уравнение задачей Дирихле (I),(II) для биволнового уравнения.

§4. РАСШИРЕНИЕ ПО ФРИДРИХСУ БИВОЛНОВОГО ОПЕРАТОРА

В предыдущем параграфе через $\mathbf{D}_o^4$ мы обозначили биволновой оператор $\mathbf{D}^4$, отображающий $\Phi_4(\overline{\Omega})$ в $L_2(\Omega)$. Симметрический оператор $\mathbf{D}_o^4$ допускает замыкание $\overline{\mathbf{D}_o^4}$. Следующая лемма описывает область определения $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}_o^4})$этого замыкания.

Лемма 1.4. *Область определения $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}_o^4})$оператора $\overline{\mathbf{D}_o^4}$ состоит из тех функций из пространства $L_2(\Omega)$, для которых обобщенные производные Соболева $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \in L_2(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть последовательность функций $u_n(x,y) \in L_2(\Omega)$ $(n = 1,2,3...)$ такова, что

$$u_n(x,y) \longrightarrow u(x,y) \in L_2(\Omega), \tag{28}$$

$$\frac{\partial^4 u_n(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} \longrightarrow w(x,y) \in L_2(\Omega) \qquad \text{где} \qquad n \to \infty, \tag{29}$$

По формуле Грина (4) для любого $\varphi(x,y) \in \Phi_4(\overline{\Omega})$ имеем

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial^4 u_n}{\partial x^2 \partial y^2}\, \varphi(x,y)\, dx dy = \iint\limits_{\Omega} u_n(x,y)\, \frac{\partial^4 \varphi(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}\, dx dy. \tag{30}$$

Переходя к пределу в (32) и используя (30),(31), получаем

$$\iint\limits_{\Omega} w(x,y)\, \varphi(x,y) dx dy = \iint\limits_{\Omega} u(x,y) \frac{\partial^4 \varphi(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}\, dx dy \tag{31}$$

для любых $\varphi(x,y) \in \Phi_4(\overline{\Omega})$.

А это означает, что $w(x,y)$ - обобщенная производная Соболева для $u(x,y)$: $w(x,y) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \in L_2(\Omega)$. Лемма доказана.

Замечание 4.1 Доказывая Лемму 2.3, мы установили неравенство (22), которое справедливо также для симметрических замкнутых операторов $\mathbf{D}_o^{4^*}$.

Таким образом, мы доказали следующую лемму.

Лемма 2.4. *Оператор $\overline{\mathbf{D}_o^4}$ полуограничен снизу .*

На линейном многообразии $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}_o^4})$введем скалярное произведение

$$[u,v] = \left(\overline{\mathbf{D}_o^4} u, v\right)_{L_2(\Omega)} = \left(\mathrm{D}^2 u, \mathrm{D}^2 v\right)_{L_2(\Omega)}, \qquad u,v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}_o^4}.) \tag{32}$$

Обозначим через $H(\overline{\mathbf{D}_o^4})$ гильбертово пространство, пополняющее линейное многообразие $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}_o^4})$в норме $||\cdot||_\phi = ||\mathrm{D}^2 \cdot ||_{L_2(\Omega)}$, порожденной скалярным произведением (32).

Гильбертово пространство $H(\overline{\mathbf{D}_o^4})$ состоит из функций $u(x,y) \in L_2(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in L_2(\Omega)$.

Область определения $\mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}_o^4}^*)$сопряженного оператора $\overline{\mathbf{D}_o^4}^*$ состоит из всех таких функций $u(x,y) \in L_2(\Omega)$, которые имеют в Ω, обобщенные производные Соболева $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \in L_2(\Omega)$. Это следует из определения обобщенной функции и тождества

$$\iint\limits_{\Omega} \overline{\mathbf{D}_o^4} u\, v dx dy = \iint\limits_{\Omega} u\, \overline{\mathbf{D}_o^4}^* v dx dy \qquad \text{для всех} \quad u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}_o^4}),\ v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}_o^4}^*). \tag{33}$$

Оператор $\mathbf{D}^4{}_\phi$, действующий на множестве функций $\mathcal{D}(\mathbf{D}^4{}_\phi) = H(\overline{\mathbf{D}_o^4}) \cap \cap \mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}_o^4}^*)$по формуле

$$\mathrm{D}^4{}_\phi u = \overline{\mathbf{D}_o^4}^* u, \tag{34}$$

является самосопряженным (жестким) расширением по Фридрихсу биволнового оператора $\overline{\mathbf{D}^4_o}$.

Операторное уравнение

$$\mathbf{D}^4{}_\phi u = f(x,y) \in L_2(\Omega) \tag{35}$$

можно рассматривать как обобщение задачи (I), (II), а решения (35) являются обобщенными решениями краевой задачи (I), (II) для биволнового уравнения.

Замечание 2.4. Область определения квадратного корня оператора $\overline{\mathbf{D}^4_o}$ совпадает с $H(\overline{\mathbf{D}^4_o})$.

Замечание 3.4. Область определения любого положительного самосопряженного расширения $\widetilde{\overline{\mathbf{D}^4_o}}$ оператора $\overline{\mathbf{D}^4_o}$ можно представить как

$$\mathcal{D}(\widetilde{\overline{\mathbf{D}^4_o}}) = \mathcal{D}(\overline{\mathbf{D}^4_o}) \dot{+} (\mathbf{D}^4{}_\phi{}^{-1} + A)U. \tag{36}$$

где A - некоторый ограниченный самосопряженный положительный оператор, действующий на подпространстве $U = Ker\,\overline{\mathbf{D}^4_o}^*$.

§5. СВЯЗЬ МЕЖДУ БИВОЛНОВЫМ ОПЕРАТОРОМ И ОПЕРАТОРОМ ТИПА СОБОЛЕВА

Пусть $\dot{W}^4_2(\Omega)$ - соболевское гильбертово пространство функций, обобщенные производные Соболева вплоть до четвертого порядка суммируемы вместе с квадратом в Ω. Функции вместе со своими производными первого порядка должны обращаться в нуль на $\partial\Omega$. Скалярное произведение в $\dot{W}^4_2(\Omega)$ дается формулой

$$(u,v)_{\dot{W}^4_2(\Omega)} = \iint\limits_\Omega \Delta^2 u\, v\, dx dy. \tag{37}$$

Обозначим через T биволновой оператор, отображающий гильбертово пространство $\dot{W}^4_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ по следующему закону :

$$Tu = \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} : \quad \dot{W}^4_2(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega), \tag{38}$$

где использованы обобщенные производные.

В гильбертовом пространстве $\dot{W}_2^4(\Omega)$ рассмотрим оператор типа Соболева

$$\wp^4 = \Delta^{-2}\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} \tag{39}$$

где Δ^{-2} - оператор, обратный к двумерному бигармоническому оператору Δ^2 при нулевых условиях (II) на границе.

Оператор (39), порожденный системой типа Соболева дифференциальных уравнений типа Соболева высокого порядка был рассмотрен в [5]. В этой работе, в частности, установлено существование полной совокупности полиномиальных собственных функций оператора $\wp^4$ в $\dot{W}_2^4(\Omega)$, в случае круговых областей. Оператор (39) является симметрическим и ограниченным оператором на линейном многообразии бесконечно дифференцируемых и финитных в Ω функций. Самосопряженное расширение оператора $\wp^4$ во всем гильбертовом пространстве обозначается той же буквой и рассматривается как отображение $L_2(\Omega)$ в гильбертово пространство $\dot{W}_2^4(\Omega)$ с областью определения $\mathcal{D}(\wp^4) = \dot{W}_2^4(\Omega) \subset L_2(\Omega)$

$$\wp^4 : \mathcal{D}(\wp^4) \longrightarrow \dot{W}_2^4(\Omega). \tag{40}$$

Следующая теорема показывает связь биволнового оператора с операторами типа Соболева.

Теорема 1.5. *Операторы T и $\wp^4$ взаимно сопряжены.*

Доказательство. Действительно, для любых $u(x,y) \in \mathcal{D}(T)$ и $v(x,y) \in$ $\in \mathcal{D}(\wp^4)$имеем

$$\begin{aligned}(Tu, v)_{L_2(\Omega)} &= \Big(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}, v\Big)_{L_2(\Omega)} = \Big(u, \frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial y^2}\Big)_{L_2(\Omega)} = \\ &= \Big(u, \Delta^2\Delta^{-2}\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial y^2}\Big)_{L_2(\Omega)} = \big(\Delta^2 u, \wp^4 v\big)_{L_2(\Omega)} = \big(u, \wp^4 v\big)_{\dot{W}_2^4(\Omega)}.\end{aligned} \tag{41}$$

Это означает, что $T^* = \wp^4$. Теорема доказана.

Замечание 1.5. Оператор T является ограниченным оператором, определенным на всем $\dot{W}_2^4(\Omega)$, и, следовательно, замкнутым.

Рассмотрим следующие уравнения :

$$Tu = f(x,y), \qquad f(x,y) \in L_2(\Omega), \tag{A}$$

$$\wp^4 v = F(x,y), \qquad F(x,y) \in \dot{W}_2^4(\Omega). \tag{A^*}$$

Соотношения, установленные выше и соответствующие результаты из работы [6] показывают, что между разрешимостью (в различных смыслах) задач (А) и (A^*) имеется взаимосвязь. Это, в свою очередь указывает на связь разрешимости задачи Дирихле для биволнового уравнения со свойствами оператора типа Соболева $\wp^4$.

ABSTRACT. The paper is devoted to the solvability of the first boundary (Dirichlet's) problem for the biwave equation. The existence of at least one selfadjoint extention of the differential operator generated by such problem is proved. The so-called Fridrich's selfadjoint (rigid) extention for such operator is constructed and all positive definite selfadjoint extentions for such operator is described. The close connection of such operator with the Sobolev type operator is shown.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. A. Aleksandrian R.A.,Berezansky, Il'in, Kostjucenko, " Some questions in spectral theory for partial differential equations", Amer. Math. Soc. Transl., vol. 2, p. 105, 1976.
2. Г. В. Вирабян, " О спектре оператора и задаче Дирихле для уравнения $\Diamond^2 u + 4\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Diamond u + 2\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = f(x,y,z,t)$", ДАН СССР, т. 132, №5, 1960.
3. Ю. М. Березанский, Разложение Самосопряженных Операторов по Собственным Функциям, Киев, Наукова Думка, 1965.
4. В. И. Смирнов, Курс Высшей Математики, т. 5, Москва, 1959.
5. В. Г. Вирабян, Диссертация, Ереван, 1964.
6. С.Г. Крейн, Линейные Уравнения в Банаховом Пространстве, Москва, 1971.

18 Ноября 1990

Ереванский государственный университет