ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 6, 1991 Математика

УДК 517.547

А. О. КАРАПЕТЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В РАДИАЛЬНЫХ ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ*

§ 0. Введение

0.1. Класс Харди H^2 в правой полуплоскости состоит из всех тех голоморфных функций $f(z)\equiv f(x+iy)$, $\operatorname{Re} z>0$, которые удовлетворяют условию

$$\sup_{0<x<+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+iy)|^2\,dy\right\}<+\infty. \tag{0.1}$$

Известный результат Винера и Пэли [1] (см. также [2]) гласит, что указанный класс совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление вида

$$f(z)=\int_0^{+\infty}F(t)\cdot e^{-z\cdot t}\,dt,\ \operatorname{Re} z>0, \tag{0.2}$$

с произвольной функцией $F(t)\in L^2(0,+\infty)$. Иными словами, формула (0.2) задает параметрическое интегральное представление всего класса Харди H^2 в правой полуплоскости. Этот классический результат (как, впрочем, и многие другие результаты монографии [1]) инициировал в свое время многочисленные исследования, продолжающиеся и по настоящее время. В работе [3] мы постарались достаточно подробно осветить исследования, обобщающие теорему Винера—Пэли в том или ином направлении. Ввиду этого ниже приводится лишь беглый обзор некоторых принципиальных работ.

Так, в работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна [4], а также в монографии М. М. Джрбашяна [5, гл. VII] для весовых классов Харди в угловых областях были установлены существенно новые (и более общие, чем (0.2)) интегральные представления посредством ядер Миттаг—Леффлера $E_\rho(z;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k/\Gamma(\mu+k/\rho)$. Это удалось осуществить на основе исследований М. М. Джрбашяна по гармоническому анализу и теории интегральных преобразований в комплексной области, подытоженных в его монографии [5].

В области многомерного комплексного анализа также проводились исследования с целью получить различные обобщения теоремы Винера—Пэли. Так, Бохнер [6] для многомерных классов Харди H^2 в радиальных трубчатых областях получил аналог интегрального пред-

* Настоящая работа была депонирована в АрмНИИНТИ 16 ноября 1990 г., деп. № 49—Ар90, Ереван, 40 стр. (1990).

ставления (0.2). Принципиальное значение имела работа С. Г. Гиндикина [7], где в качестве многомерного аналога полуплоскости рассматривались области Зигеля, являющиеся более общими по сравнению с радиальными трубчатыми областями. В этой работе наряду с дальнейшим обобщением результата Бохнера впервые была поставлена и решена задача иного рода: получить параметрические интегральные представления типа Винера—Пэли для классов голоморфных в областях Зигеля функций, квадратично интегрируемых по всей области определения. В дальнейшем исследования в этом направлении были продолжены различными авторами, и мы вкратце остановимся на их работах.

0.2. Пусть $n \geqslant 1$, B — область в $\mathbf{R}^n$ и $\gamma(y)$, $y \in B$ — произвольная непрерывная положительная (т. е. $\gamma(y) > 0$, $y \in B$) функция. При $0 < p$, $s < +\infty$ обозначим через $H^p_{s,\gamma}(T_B)$ пространство всех голоморфных в трубчатой области $T_B \equiv \{z = x + iy \in \mathbf{C}^n:\ x \in \mathbf{R}^n,\ y \in B\}$ функций $f(z) \equiv f(x + iy)$, подчиненных условию:

$$M^p_{s,\gamma}(f) \equiv \int\limits_B \left\{ \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(x + iy)|^p\, dx \right\}^s \cdot \gamma(y)\, dy < +\infty. \tag{0.3}$$

При $\gamma(y) \equiv 1$, $y \in B$, эти пространства удобнее обозначать просто через $H^p_s(T_B)$. Отметим также, что при $s = 1$ пространство $H^p_{s,\gamma}(T_B) = H^p_{1,\gamma}(T_B)$ состоит из голоморфных в $T_B \subset \mathbf{C}^n$ функций, принадлежащих $L^p(T_B;\ \gamma(y)\, dx\, dy)$.

В работах Генчева [8—10] были установлены интегральные представления типа Винера—Пэли для классов $H^p_s(T_b)$, где $1 \leqslant p \leqslant 2$, $s = 1$ или же $1 < p < 2$, $s = 1/(p-1)$. Следует отметить однако, что в наиболее важном случае $p = 2$, когда эти представления являются параметрическими, результаты Генчева следуют из более общих теорем работы С. Г. Гиндикина [7].

В работах М. М. Джрбашяна и В. М. Мартиросяна [11, 12] иными по сравнению с [7], [8—10] методами были получены интегральные представления типа Винера—Пэли для более общих, чем $H^p_s(T_B)$, классов голоморфных функций одного комплексного переменного.

Случай, когда весовая функция $\gamma(y) \not\equiv 1$, был рассмотрен в диссертации [13, гл. II] и в работе [14]. Там, в частности, было установлено, что если $1 < p \leqslant 2$, $0 < s < +\infty$, то каждая функция $f \in H^p_{s,\gamma}(T_B)$ допускает интегральное представление вида

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int\limits_{\mathbf{R}^n} F(t)\, e^{i\langle z,\, t\rangle}\, dt,\quad z \in T_B, \tag{0.4}$$

где функция $F(t)$, $t \in \mathbf{R}^n$, подчинена определенным условиям, и $\langle z, t\rangle = \sum_{k=1}^n z_k \cdot t_k$, если $z = (z_1, \cdots, z_n)$, $t = (t_1, \cdots, t_n)$.

Как видим, функция $F(t)$ в интегральном представлении (0.4) определена, вообще говоря, на всем пространстве $\mathbf{R}^n$. В этой связи возникает следующая задача: выяснить, при каких естественных условиях, наложенных на область $B \subset \mathbb{R}^n$ и весовую функцию $\gamma(y)$, $y \in B$, представляющие функции $F(t)$ (независимо от выбора $f \in H^p_{s,\gamma}(T_B)$) окажутся сосредоточенными на некотором собственном подмножестве пространства $\mathbb{R}^n$. В тех же работах [13, 14] эта задача была решена в случае, когда

$$B = \{y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_1 > \sum_{k=2}^n y_k^2\}, \tag{0.5}$$

$$\gamma(y) = \varphi(y_1 - \sum_{k=2}^n y_k^2), \quad y = (y_1, \cdots, y_n) \in B, \tag{0.6}$$

и функция $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0, +\infty)$, подчинена определенным условиям. При этом были построены воспроизводящие ядра для рассматриваемых весовых классов голоморфных функций.

В работе Саито [15] аналогичная задача описания носителя представляющих функций $F(t)$ (см. (0.4)) решена уже в случае произвольной области $B \subset \mathbb{R}^n$, но при существенных предположениях $\gamma(y) \equiv 1$, $y \in B$, и $s = 1$. Здесь также построены соответствующие воспроизводящие ядра.

Наконец, в работе [3] рассмотрены пространства $H^p_{s,\gamma}(T_V)$, где $1 \leqslant p \leqslant 2$, $0 < s < +\infty$ и V—острый (т. е. не содержащий целиком ни одной прямой) открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$. Установлено, что если

$$\underline{\lim}_{|y| \to +\infty} \frac{\ln \gamma(y)}{|y|} \geqslant 0 \quad (y \in V), \tag{0.7}$$

то в интегральном представлении (0.4) класса $H^p_{s,\gamma}(T_V)$ представляющие функции $F(t)$ с необходимостью обращаются в нуль вне сопряженного конуса V^*. Для соответствующих весовых классов построены воспроизводящие ядра, но в том случае, когда функция $\gamma(y)$, $y \in V$, подчинена, помимо (0.7), некоторым дополнительным условиям.

0.3. Перейдем теперь к сжатому описанию результатов, установленных в настоящей работе. По ходу нам придется ввести некоторые новые обозначения, которые, впрочем, понадобятся и в дальнейшем.

Как обычно, $\mathbb{R}^n$ рассматривается как вполне вещественное подпространство в $\mathbb{C}^n$. Если $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $w = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n$, то полагаем

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \cdot \overline{w}_k, \quad |z| = \langle z, z \rangle^{1/2}. \tag{0.8}$$

В частности, z и w в (0.8) могут принадлежать пространству $\mathbb{R}^n$.

Далее, через V обычно будем обозначать некоторый открытый выпуклый конус (ОВК) в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$. При этом для произвольной непрерывной положительной функции $\gamma(y)$, $y \in V$, полагаем

$$\gamma_V^*(t) \equiv \int_V e^{-\langle y, t \rangle} \cdot \gamma(y)\, dy, \quad t \in \mathbb{R}^n. \tag{0.9}$$

Если $n=1$ и $V=(0, +\infty)\subset R^1$, то предпочтем более простое обозначение

$$\gamma^*(t)\equiv\int\limits_0^{+\infty} e^{-y\cdot t}\cdot\gamma(y)\,dy,\quad t\in(-\infty, +\infty). \tag{0.10}$$

Пусть V — ОВК в R^n и $\gamma(y)>0$, $y\in V$ — непрерывная функция. Сформулируем ряд свойств, которыми может обладать или не обладать функция γ (см. [13], пункт 1.3.).

(А) $\lim\limits_{|y|\to+\infty}\dfrac{\ln\gamma(y)}{|y|}=0\ (y\in V)$,

(Б) $\overline{\lim\limits_{|y|\to+\infty}}\dfrac{\ln\gamma(y)}{|y|}\leqslant 0\ (y\in V)$,

(В) $\underline{\lim\limits_{|y|\to+\infty}}\dfrac{\ln\gamma(y)}{|y|}\geqslant 0\ (y\in V)$,

(Г) $\gamma\in L^1(V)$,

(Д) При $\forall R\in(0, +\infty)$: $\gamma\in L^1(V_R)$, где $V_R=\{y\in V: |y|<R\}$,

(Е) $\gamma(2\cdot y)\leqslant C\cdot\gamma(y)$, $y\in V$, $C\in(0, +\infty)$.

Зависимость свойств функции $\overset{*}{\gamma}_V(t)$, $t\in R^n$, от наличия у функции $\gamma(y)$, $y\in V$, перечисленных выше свойств установлена в работе [3, предложение 1.2].

Далее, множества E_1 и E_2 из R^n назовем линейно эквивалентными, если существует линейный изоморфизм L пространства R^n такой, что $L(E_1)=E_2$.

Наконец, для произвольного $y=(y_1,\cdots, y_n)\in R^n$ положим $y'=(y_1,\cdots, y_{n-1})\in R^{n-1}$, так что $y=(y', y_n)$.

В § 1 работы изучаются так называемые специальные ОВК в $R^n(n>1)$, которые отличаются от обычных ОВК лишь специальным расположением в пространстве R^n.

В § 2 класс специальных ОВК из R^n сужается, и теперь уже рассматриваются нормальные специальные ОВК. Фактически, они тоже отличаются лишь особым расположением в пространстве R^n, ибо согласно предложению 2.1 любой острый ОВК в R^n линейно эквивалентен некоторому нормальному специальному ОВК. Далее, устанавливается важная теорема 2.1, которая позволяет на основании имеющегося эффективного описания нормального специального ОВК $V\subset R^n$ получить столь же эффективное описание сопряженного конуса V^*. Кроме того, с произвольным нормальным специальным ОВК $V\subset R^n$ ассоциируется (см. (2.36)) интеграл $I_V(a)$, зависящий от параметра $a\in R^{n-1}$. Предложение 2.6 уставливает важную связь между V^* и множеством $\{a\in R^{n-1}: I_V(a)<+\infty\}$.

Основным в работе является § 3. Здесь рассматриваются нормальные специальные ОВК $V \subset \mathbf{R}^n$ и особого рода весовые функции $\gamma(y)$, $y \in V$. Необходимо отметить, что в отличие от работы [3], где функции $\gamma(y)$, $y \in V$, характеризовались в основном на бесконечности (т. е. при $|y| \to +\infty$), здесь весовые функции γ характеризуются также около границы конуса V. В указанном случае удается получить достаточно явное выражение для $\gamma_V^*(t)$ через интеграл I_V (см. предложение 3.1), что существенно используется в дальнейшем. Затем устанавливаются интегральные представления типа Винера—Пали (теорема 3.1) и конструируются воспроизводящие ядра (см. (3.32)) и теорему 3.2) для пространств $H^p_{s,\gamma}(T_V)$.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность академику АН Армении М. М. Джрбашяну за постановку задач и постоянное внимание к настоящей работе.

§ 1. Изучение специальных открытых выпуклых конусов

1.1. Как и в работе [16], открытый выпуклый конус (ОВК) $V \subset \mathbf{R}^n$ договоримся называть специальным, если выполняются условия:

1) $V \subset \{y = (y', y_n) \in \mathbf{R}^n: y_n > 0\}$;

2) $e_n = (0, \cdots, 0, 1) \in V$.

Напомним также (см. [16, предложение 5]), что каждый ОВК $V \subset \mathbf{R}^n$ $(V \neq \mathbf{R}^n)$ линейно эквивалентен некоторому специальному ОВК $V_1 \subset \mathbf{R}^n$, причем если конус V острый, то и V_1 является таковым.

Всюду дальше предполагается, что $n > 1$.

Справедливо следующее

Предложение 1.1. *Пусть V — специальный ОВК в пространстве $\mathbf{R}^n$. Тогда для каждого $y' \in \mathbf{R}^{n-1}$ множество*

$$E(y') = \{\sigma \in \mathbf{R}: (y', \sigma) \in V\} \tag{1.1}$$

не пусто; более того, $E(y')$ имеет вид $(b, +\infty)$, где $0 \leqslant b < +\infty$.

За доказательством мы отсылаем к работе [16] (предложение 6)

Этот факт позволяет ассоциировать с каждым специальным ОВК $V \in \mathbf{R}^n$ функцию, заданную на пространстве $\mathbf{R}^{n-1}$ и сопоставляющую каждому $y' \in \mathbf{R}^{n-1}$ число $b = b(y')$, фигурирующее в предложении 1.1. Более точно, пусть V—произвольный специальный ОВК в $\mathbf{R}^n$, введем в рассмотрение функцию

$$\sigma_V(y') = \inf\{\sigma \in \mathbf{R}: (y', \sigma) \in V\}, \ y' \in \mathbf{R}^{n-1}, \tag{1.2}$$

и выясним ее свойства.

Предложение 1.2. 1°. *Пусть V — специальный ОВК в $\mathbf{R}^n$, тогда:*

a) $\sigma_V(y') \geqslant 0$, $y' \in \mathbf{R}^{n-1}$; $\sigma_V(0) = 0$;

2) $\sigma_V(y_1' + y_2') \leqslant \sigma_V(y_1') + \sigma_V(y_2')$, y_1', $y_2' \in \mathbf{R}^{n-1}$;

в) $\sigma_V(\alpha\cdot y') = \alpha\cdot\sigma_V(y')$, $y'\in\mathbb{R}^{n-1}$, $\alpha>0$;

г) *функция* $\sigma_V(y')$ *непрерывна в каждой точке пространства* $\mathbb{R}^{n-1}$;

д) $V=\{y=(y', y_n)\in\mathbb{R}^n: y_n>\sigma_V(y')\}$.

2°. *Пусть* $\sigma(y')$, $y'\in\mathbb{R}^{n-1}$ — *некоторая функция, обладающая свойствами* (а)—(г) *и положим*

$$V\overset{\text{def}}{=}\{y=(y', y_n)\in\mathbb{R}^n;\ y_n>\sigma(y')\}. \tag{1.3}$$

Тогда V *является специальным ОВК в* $\mathbb{R}^n$ *и при этом*

$$\sigma_V(y')\equiv\sigma(y'),\ y'\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{1.4}$$

Доказательство. Пусть $y'\in\mathbb{R}^{n-1}$, тогда в силу предложения 1.1 $E(y')=(b, +\infty)$, где $0\leqslant b<+\infty$, поэтому $\sigma_V(y')=b\geqslant 0$. Кроме того, поскольку $e_n=(0,1)\in V$, то и $\sigma\, e_n=(0,\sigma)\in V$ при любом $\sigma>0$. А значит, $E(0)=(0, +\infty)$, и поэтому $\sigma_V(0)=0$. Итак, свойство (а) установлено. Далее, пусть y_1', $y_2'\in\mathbb{R}^{n-1}$ и числа σ_1, σ_2 таковы, что

$$\sigma_V(y_i')<\sigma_i\ (i=1, 2). \tag{1.5}$$

Тогда $(y_i', \sigma_i)\in V, (i=1, 2)$, и поскольку V суть выпуклый конус, то и

$$(y_1'+y_2', \sigma_1+\sigma_2)\in V. \tag{1.6}$$

Следовательно, $\sigma_1+\sigma_2\in E(y_1'+y_2')$, поэтому

$$\sigma_V(y_1'+y_2')=\inf E(y_1'+y_2')\leqslant\sigma_1+\sigma_2, \tag{1.7}$$

и это для произвольных σ_1, σ_2, удовлетворяющих (1.5). Тем самым свойство (б) также установлено.

Пусть $y'\in\mathbb{R}^{n-1}$, тогда $(y', \sigma)\in V$ при любом $\sigma>\sigma_V(y')$. И если $\alpha>0$, то

$$(\alpha\cdot y', \alpha\cdot\sigma)\in V, \tag{1.8}$$

поэтому $\sigma_V(\alpha\cdot y')\leqslant\alpha\cdot\sigma$. Поскольку это верно при произвольном $\sigma>\sigma_V(y')$, то приходим к неравенству

$$\sigma_V(\alpha\cdot y')\leqslant\alpha\cdot\sigma_V(y'). \tag{1.9}$$

Так как (1.9) справедливо при любых $y'\in\mathbb{R}^{n-1}$ и $\alpha>0$, то имеем также

$$\sigma_V(y')=\sigma_V\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha\cdot y'\right)\leqslant\frac{1}{\alpha}\cdot\sigma_V(\alpha\cdot y'). \tag{1.10}$$

Наконец, комбинируя (1.9) и (1.10), получаем (в).

Далее, убедимся в непрерывности функции $\sigma_V(y')$ в точке $y'=0\in\in\mathbb{R}^{n-1}$. Так как V открыто и $e_n\in V$, то существует $\eta_0>0$ такое, что $(x', 1)\in V$ при $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$, $|x'|<\eta_0$. Затем для произвольного фиксированного $\varepsilon>0$ положим $\delta=\delta(\varepsilon)=\varepsilon\cdot\eta_0$ и покажем, что

$$|\sigma_V(y')-\sigma_V(0)|<\varepsilon \text{ при } |y'|<\delta. \tag{1.11}$$

Действительно, если $|y'|<\delta$, то $|y'/\varepsilon|<\eta_0$, поэтому $(y'/\varepsilon, 1)\in V$, или, что то же самое, $(y', \varepsilon)\in V$. Следовательно, $\sigma_V(y')<\varepsilon$, что, с учетом свойства (а), совпадает с (1.11). Итак, функция $\sigma_V(y')$ непрерывна в точке $0\in \mathbf{R}^{n-1}$. Если же зафиксировать произвольную точку $y_0'\in \mathbf{R}^{n-1}$, то в силу свойства (б) справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} &\sigma_V(y')-\sigma_V(y_0')\leqslant \sigma_V(y'-y_0'),\ y'\in \mathbf{R}^{n-1},\\ &\sigma_V(y_0')-\sigma_V(y')\leqslant \sigma_V(y_0'-y'),\ y'\in \mathbf{R}^{n-1}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

из которых следует непрерывность функции $\sigma_V(y')$ и в точке $y_0'\in \mathbf{R}^{n-1}$. Таким образом, свойство (г) проверено. Наконец, (д) непосредственно вытекает из самого определения функции $\sigma_V(y')$, $y'\in \mathbf{R}^{n-1}$, и тем самым утверждение 1° полностью доказано. Что же касается утверждения 2°, то оно легко проверяется, и на этом мы останавливаться не будем.

1.2. Наряду с функцией $\sigma_V(y')$, $y'\in \mathbf{R}^{n-1}$, с каждым специальным ОВК $V\subset \mathbf{R}^n$ можно ассоциировать также функцию

$$\tau_V(y)\equiv y_n-\sigma_V(y'),\ y=(y', y_n)\in \mathbf{R}^n. \tag{1.13}$$

Очевидно, функция $\tau_V(y)$, $y\in \mathbf{R}^n$, всюду непрерывна, причем

$$V=\{y\in \mathbf{R}^n: \tau_V(y)>0\}. \tag{1.14}$$

Далее, если V (не обязательно специальный) ОВК в $\mathbf{R}^n$, то договоримся обозначать через $\rho_V(y)$, $y\in V$, евклидово расстояние от точки y до границы ∂V, а точнее,

$$\rho_V(y)=\inf\{|v-y|: v\in\partial V\},\ y\in V. \tag{1.15}$$

Нетрудно проверить, что $\rho_V(y)$, $y\in V$, является непрерывной положительной функцией в конусе V.

В работе [16] доказано следующее важное

Предложение 1.3. *Пусть V — специальный ОВК в $\mathbf{R}^n$, тогда существует число $a\in(0, 1]$, зависящее только от V и такое, что*

$$a\leqslant\frac{\rho_V(y)}{\tau_V(y)}\leqslant 1,\ y\in V. \tag{1.16}$$

Доказательство этого факта опускается (см. [16], предложение 7).

Наконец, полезно отметить следующее

Предложение 1.4. *Для произвольного специального ОВК $V\subset \mathbf{R}^n$ справедливо равенство*

$$\partial V=\{(x, \sigma_V(x)): x\in \mathbf{R}^{n-1}\}. \tag{1.17}$$

Доказательство. Пусть $y=(y', y_n)\in\partial V$, тогда существует последовательность $\{y^{(k)}\}_1^\infty\subset V$, сходящаяся к y. В силу непрерывности функции τ_V имеем

$$\lim_{k\to\infty}\tau_V(y^{(k)})=\tau_V(y). \tag{1.18}$$

Далее, поскольку $y^{(k)} \in V$ $(k = 1, 2, \cdots)$, то $\tau_V(y^{(k)}) > 0$; следовательно, $\tau_V(y) \geqslant 0$. Но так как $y \overline{\in} V$, то неравенство $\tau_V(y) > 0$ исключается, и мы окончательно получаем равенство:

$$\tau_V(y) = y_n - \sigma_V(y') = 0. \tag{1.19}$$

Таким образом, точка $y = (y', y_n)$ имеет вид $(x, \sigma_V(x))$, где $x = y' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Наоборот, пусть $y = (x, \sigma_V(x))$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$. Тогда очевидно, что $y \overline{\in} V$. Но в то же время

$$y = \lim_{k \to \infty} y^{(k)}, \tag{1.20}$$

где $y^{(k)} = (x, \sigma_V(x) + 1/k) \in V$, $k = 1, 2, \cdots$. Следовательно, $y \in \partial V$ и, тем самым, предложение полностью доказано.

§ 2. Изучение нормальных специальных открытых выпуклых конусов

2.1. Договоримся для произвольного непустого множества $E \subset \mathbb{R}^{n-1}$ использовать обозначение

$$V(E) = \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^n : y_n > 0,\ y'/y_n \in E\}. \tag{2.1}$$

При этом отметим, что если множество E ограничено, то справедливо соотношение

$$\overline{V(E)} = V(\overline{E}) \cup \{0\} \Leftrightarrow \overline{V(E)} \setminus \{0\} = V(\overline{E}), \tag{2.2}$$

где черта над множеством обозначает его замыкание в соответствующем пространстве.

Заметим также, что если $E \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — открытое выпуклое множество, содержащее начало координат $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, то $V(E)$ суть специальный ОВК в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Далее, пусть V — специальный ОВК в $\mathbb{R}^n$ и положим

$$\Pi_V = \{y' \in \mathbb{R}^{n-1} : (y', 1) \in V\}. \tag{2.3}$$

Тогда нетрудно проверить, что $\Pi_V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — открытое выпуклое множество, содержащее начало координат $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, причем $V = V(\Pi_V)$.

Определение. *Специальный ОВК $V \subset \mathbb{R}^n$ назовем нормальным, если область $\Pi_V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ограничена.* Легко видеть, что каждый нормальный специальный ОВК является острым ОВК; обратное, конечно же, неверно. Более того, не всякий острый специальный ОВК является нормальным. Тем не менее справедливо

Предложение 2.1. *Каждый острый* ОВК $V \subset \mathbb{R}^n$ *линейно эквивалентен некоторому нормальному специальному ОВК $V_1 \subset \mathbb{R}^n$.*

Доказательство этого факта не представляет особого труда и потому опускается.

Предложение 2.2. *Специальный ОВК $V \subset \mathbb{R}^n$ является нормальным лишь при выполнении условия*

$$\sigma_V(y') > 0, \ y' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть конус V нормальный; выберем произвольное $y' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ и покажем, что $\sigma_V(y') > 0$. Действительно, в противном случае мы бы имели

$$(y', \sigma) \in V, \ 0 < \sigma < +\infty \tag{2.5}$$

или же

$$y'/\sigma \in \Pi_V, \ 0 < \sigma < +\infty. \tag{2.6}$$

И поскольку $|y'| \neq 0$, то $|y'/\sigma| \to +\infty$ при $\sigma \downarrow 0$, что противоречит ограниченности области Π_V. Наоборот, пусть выполнено условие (2.4), но в то же время допустим, что область $\Pi_V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ неограничена, то есть существует последовательность $\{y'_k\}_1^\infty \subset \Pi_V$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} |y'_k| = +\infty. \tag{2.7}$$

Полагая $\zeta'_k = y'_k/|y'_k|$ $(k = 1, 2, \cdots)$, заметим, что последовательность $\{\zeta'_k\}_1^\infty$ принадлежит единичной сфере S_{n-1} пространства $\mathbb{R}^{n-1}$. Причем в силу компактности этой сферы мы без ограничения общности можем предположить, что

$$\lim_{k\to\infty} \zeta'_k = \zeta'_0, \ |\zeta'_0| = 1. \tag{2.8}$$

Далее, из условия $y'_k \in \Pi_V$ $(k = 1, 2, \cdots)$, означающего, что

$$(y'_k, 1) \in V \ (k = 1, 2, \cdots), \tag{2.9}$$

мы имеем

$$(\zeta'_k, 1/|y'_k|) \in V \ (k = 1, 2, \cdots). \tag{2.10}$$

Следовательно, при $k = 1, 2, \cdots$ справедливы неравенства

$$\sigma_V(\zeta'_k) < 1/|y'_k|. \tag{2.11}$$

И тогда из (2.11) с учетом (2.7), (2.8) и непрерывности функции σ_V получаем равенство $\sigma_V(\zeta'_0) = 0$, что противоречит условию (2.4). Итак, предложение полностью доказано.

2.2. Всюду дальше V будет обозначать нормальный специальный ОВК в пространстве $\mathbb{R}^n$. При этом, как обычно, сопряженным конусом называется множество

$$V^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, v \rangle \geq 0 \text{ при всех } v \in V\}. \tag{2.12}$$

Предложение 2.3. *Справедливо следующее равенство:*

$$\operatorname{Int} V^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, v \rangle > 0 \textit{ при всех } v \in \partial V \setminus \{0\}\}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [3], предложение 1.1 (в)), что

$$\operatorname{Int} V^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, v \rangle > 0 \text{ при всех } v \in \overline{V} \setminus \{0\}\}. \tag{2.14}$$

Поскольку $\partial V \subset \overline{V}$, то нам достаточно установить следующее: если $y \in R^n$ и $<y, v> > 0$ при всех $v \in \partial V \setminus \{0\}$, то $<y, v> > 0$ при всех $v \in V \setminus \{0\}$. Для этого прежде всего вспомним, что $V = V(\Pi_V)$, причем, поскольку область Π_V ограничена, в силу (2.2) имеем

$$\overline{V} \setminus \{0\} = V(\overline{\Pi}_V), \ \partial V \setminus \{0\} = V(\partial \Pi_V). \tag{2.15}$$

Следовательно, наша задача сводится к следующей: показать, что если $y \in R^n$ и $<y, v> > 0$ при всех $v = (v', 1)$, $v' \in \partial \Pi_V$, то $<y, v> > 0$ при всех $v = (v', 1)$, $v' \in \overline{\Pi}_V$. Итак, пусть $v = (v', 1)$, $v' \in \overline{\Pi}_V$, тогда есть такие $v_1', v_2' \in \partial \Pi_V$, что v' принадлежит отрезку $[v_1', v_2']$, то есть

$$v' = \alpha \cdot v_1' + (1 - \alpha) \cdot v_2', \ \alpha \in [0, 1]. \tag{2.16}$$

Полагая затем $v_1 = (v_1', 1)$, $v_2 = (v_2', 1)$, мы будем иметь

$$v = \alpha \cdot v_1 + (1 - \alpha) \cdot v_2, \ \alpha \in [0, 1], \tag{2.17}$$

причем

$$<y, v_1> > 0, \ <y, v_2> > 0. \tag{2.18}$$

Сопоставляя (2.17) с (2.18), мы получаем, что $<y, v> > 0$, и этим доказательство завершается.

На основании соотношения (2.13) устанавливается

Предложение 2.4. *Пусть $a \in R^{n-1}$, тогда $\tilde{a} = (a, 1) \in \operatorname{Int} V^*$ лишь при выполнении условия*

$$\min_{\zeta \in S_{n-1}} \{\sigma_V(\zeta) + <\zeta, a>\} > 0. \tag{2.19}$$

Доказательство. Если $\tilde{a} = (a, 1) \in \operatorname{Int} V^*$, то в силу предложения 2.3 $<\tilde{a}, v> > 0$ при всех $v \in \partial V \setminus \{0\}$. А с учетом предложения 1.4 мы имеем

$$<\tilde{a}, v> > 0, \ v = (x, \sigma_V(x)), \ x \in R^{n-1} \setminus \{0\}, \tag{2.20}$$

или же

$$<a, x> + \sigma_V(x) > 0, \ x \in R^{n-1} \setminus \{0\}. \tag{2.21}$$

Поскольку $S_{n-1} \subset R^{n-1} \setminus \{0\}$, то

$$\sigma_V(\zeta) + <a, \zeta> > 0, \ \zeta \in S_{n-1}. \tag{2.22}$$

Наконец, в силу непрерывности функции σ_V и компактности единичной сферы S_{n-1} из (2.22) получаем

$$\min_{\zeta \in S_{n-1}} \{\sigma_V(\zeta) + <\zeta, a>\} > 0. \tag{2.23}$$

Пусть теперь для некоторого $a \in R^{n-1}$ выполнено условие (2.19), покажем, что $\tilde{a} = (a, 1) \in \operatorname{Int} V^*$. Для этого необходимо показать, что $<\tilde{a}, v> > 0$ при всех $v \in \partial V \setminus \{0\}$. Действительно, пусть $v = (x, \sigma_V(x)) \in \in \partial V \setminus \{0\}$, где $x \in R^{n-1} \setminus \{0\}$.

Тогда имеем

$$<\tilde{a}, v> = <a, x> + \sigma_V(x) = |x|\cdot<a, x/|x|> + |x|\cdot\sigma_V(x/|x|) =$$

$$= |x|\cdot[<a, x/|x|> + \sigma_V(x/|x|)] = |x|\cdot\{<a, \zeta> + \sigma_V(\zeta)\} > 0, \quad (2.24)$$

где $\zeta = x/|x| \in S_{n-1}$. Таким образом, предложение 2.4 доказано.

Заметим (и это нетрудно проверить), что если V (пусть даже острый) — специальный ОВК, то $\mathrm{Int}\, V^*$ может уже не быть специальным ОВК. В то же время справедлива

Теорема 2.1. *Пусть V — нормальный специальный ОВК в $\mathbf{R}^n$ и $U = \mathrm{Int}\, V^*$. Тогда:*

(а) *U — нормальный специальный ОВК в $\mathbf{R}^n$;*

(б) $\Pi_U = \{a \in \mathbf{R}^{n-1} : \sigma_V(\zeta) + <\zeta, a> > 0, \ \forall \zeta \in S_{n-1}\}$;

(в) *При любом $t \in \mathbf{R}^{n-1}$ справедливо равенство*

$$\sigma_U(t) = \max_{\zeta \in S_{n-1}} \left\{-\frac{<\zeta, t>}{\sigma_V(\zeta)}\right\} = -\min_{\zeta \in S_{n-1}} \left\{\frac{<\zeta, t>}{\sigma_V(\zeta)}\right\}. \quad (2.25)$$

Доказательство. Очевидно, что U является, по крайней мере, острым ОВК в $\mathbf{R}^n$. Кроме того, если $y = (y', y_n) \in U$, то $<y, v> > 0$ при $v \in \overline{V} \setminus \{0\}$, поэтому, в частности, $<y, e_n> = y_n > 0$. Следовательно

$$U \subset \{y = (y', y_n) \in \mathbf{R}^n : y_n > 0\}. \quad (2.26)$$

Затем проверим, что $e_n \in U$, то есть

$$<e_n, v> > 0, \forall v = (x, \sigma_V(x)), \ x \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus \{0\}. \quad (2.27)$$

Действительно, $<e_n, v> = \sigma_V(x) > 0$ (в силу нормальности V). Итак, U является специальным ОВК, и при этом (из предложения 2.4) следует, что

$$\Pi_U = \{a \in \mathbf{R}^{n-1} : \sigma_V(\zeta) + <\zeta, a> > 0, \ \forall \zeta \in S_{n-1}\}.$$

Для установления нормальности конуса U мы должны показать ограниченность области $\Pi_U \subset \mathbf{R}^{n-1}$. Допустив противное, приходим к существованию последовательности $\{a^{(k)}\}_1^\infty \subset \Pi_U$ такой, что $\lim_{k\to\infty} |a^{(k)}| = +\infty$. Не ограничивая общности, можно предположить также, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a^{(k)}}{|a^{(k)}|} = \zeta_0 \in S_{n-1}. \quad (2.28)$$

Зафиксируем затем произвольное $\zeta \in S_{n-1}$. Поскольку $a^{(k)} \in \Pi_U (k = 1, 2, \cdots)$, то

$$\sigma_V(\zeta) + <\zeta, a^{(k)}> > 0 \ (k = 1, 2, \cdots) \quad (2.29)$$

или же

$$\sigma_V(\zeta)/|a^{(k)}| + <\zeta, a^{(k)}/|a^{(k)}|> > 0 \ (k = 1, 2, \cdots). \quad (2.30)$$

Устремляя $k \to \infty$, получим

$$<\zeta, \zeta_0> \geqslant 0 \quad (2.31)$$

и это для произвольного $\zeta \in S_{n-1}$, что конечно же, противоречит условию $\zeta_0 \in S_{n-1}$. Таким образом, $U = \operatorname{Int} V^*$ является нормальным специальным ОВК. Переходя к установлению формулы (2.25), с самого начала предположим, что $t \in \mathrm{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, ибо случай $t=0$ тривиален. Нам предстоит доказать следующее: если $\sigma \in \mathrm{R}$, то $(t, \sigma) \in U$ лишь при условии

$$\sigma > -\frac{<\zeta, t>}{\sigma_V(\zeta)}, \ \forall \zeta \in S_{n-1}. \tag{2.32}$$

Если $(t, \sigma) \in U$, то $\sigma > 0$ и $t/\sigma \in \Pi_U$, поэтому

$$\sigma_V(\zeta) + <\zeta, t/\sigma> > 0, \ \forall \zeta \in S_{n-1}, \tag{2.33}$$

что равносильно (2.32). Если же вещественное число σ удовлетворяет условию (2.32), то оно положительно и поэтому удовлетворяет и условию (2.33), которое влечет

$$t/\sigma \in \Pi_U, \tag{2.34}$$

так что $(t, \sigma) \in U$. Таким образом, теорема 2.1 полностью доказана.

2.3. Как и выше, V будет обозначать нормальный специальный ОВК в пространстве R^n. С каждым таким конусом можно связать две величины, положив

$$m_V = \min_{\zeta \in S_{n-1}} \sigma_V(\zeta), \ M_V = \max_{\zeta \in S_{n-1}} \sigma_V(\zeta), \tag{2.35}$$

причем очевидно, что $0 < m_V \leqslant M_V < +\infty$. По ходу заметим, что равенство $m_V = M_V$ будет иметь место лишь в том случае, когда конус V круговой, то есть функция $\sigma_V(x)$, $x \in \mathrm{R}^{n-1}$ на самом деле зависит только от $|x|$.

Далее, введем в рассмотрение интеграл

$$I_V(a) = \int_{\mathrm{R}^{n-1}} e^{-\sigma_V(x) - <x, a>} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} r^{n-2} \int_{S_{n-1}} e^{-r\cdot\{\sigma_V(\zeta) + <\zeta, a>\}} d\sigma_{n-1}(\zeta)\, dr, \ a \in \mathrm{R}^{n-1}, \tag{2.36}$$

где $d\sigma_{n-1}$ обозначает поверхностную меру Лебега на сфере S_{n-1}. Некоторые свойства этого интеграла устанавливает

Предложение 2.5. *Пусть* $a_0 \in \mathrm{R}^{n-1}$, *тогда*

1°. *Если*

$$\min_{\zeta \in S_{n-1}} \{\sigma_V(\zeta) + <\zeta, a_0>\} > 0, \tag{2.37}$$

то интеграл $I_V(a)$ *сходится равномерно в некоторой окрестности точки* a_0.

2°. *Если*

$$\min_{\zeta \in S_{n-1}} \{\sigma_V(\zeta) + <\zeta, a_0>\} < 0, \tag{2.38}$$

то $I_V(a) \equiv +\infty$ *в некоторой окрестости точки* a_0.

Доказательство. Если выполнено условие (2.37), то существуют окрестность $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ точки a_0 и положительное число ε такие, что

$$\sigma_V(\zeta) + \langle \zeta, a \rangle \geqslant \varepsilon > 0, \ \forall \zeta \in S_{n-1}, \ \forall a \in W. \quad (2.39)$$

Тогда при любом $a \in \overline{W}$ справедлива оценка

$$e^{-\sigma_V(x) - \langle x, a \rangle} = e^{-|x| \cdot \{\sigma_V(x/|x|) + \langle x/|x|, a \rangle\}} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\varepsilon \cdot |x|} = \psi(x) \in L^1(\mathbb{R}^{n-1}), \quad (2.40)$$

из которой и следует утверждение 1°.

Если же точка $a_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ удовлетворяет условию (2.38) то существует $\zeta_0 \in S_{n-1}$, при котором

$$\sigma_V(\zeta_0) + \langle \zeta_0, a_0 \rangle < 0.$$

Тогда можно найти окрестность $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ точки a_0, окрестность $\Omega \subset \subset S_{n-1}$ точки ζ_0 и положительное число ε, для которых выполняется неравенство

$$\sigma_V(\zeta) + \langle \zeta, a \rangle \leqslant -\varepsilon, \ \forall \zeta \in \Omega, \ \forall a \in W. \quad (2.41)$$

Следовательно при любом $a \in W$ имеем

$$I_V(a) = \int_0^{+\infty} r^{n-2} \int_{S_{n-1}} e^{-r \cdot \{\sigma_V(\zeta) + \langle \zeta, a \rangle\}} d\sigma_{n-1}(\zeta)\, dr \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{+\infty} r^{n-2} \int_{\Omega} e^{-r \cdot \{\sigma_V(\zeta) + \langle \zeta, a \rangle\}} d\sigma_{n-1}(\zeta)\, dr \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\Omega} d\sigma_{n-1}(\zeta) \cdot \int_0^{+\infty} r^{n-2} \cdot e^{\varepsilon \cdot r}\, dr = +\infty, \quad (2.42)$$

и утверждение 2° также доказано.

Для дальнейшего полезно ввести в рассмотрение множество

$$A_V = \{a \in \mathbb{R}^{n-1} : I_V(a) < +\infty\}. \quad (2.43)$$

Можно показать, что множество $A_V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ выпукло, причем имеют место включения

$$\{a \in \mathbb{R}^{n-1} : |a| < m_V\} \subset A_V \subset \{a \in \mathbb{R}^{n-1} : |a| \leqslant M_V\}. \quad (2.44)$$

Поскольку эти факты в дальнейшем не найдут особого применения, на доказательствах мы останавливаться не будем.

Предложение 2.6. *Пусть* $U = \mathrm{Int}\, V^*$, *тогда:*

1°. $\Pi_U = \mathrm{Int}\, A_V$;

2°. *Интеграл* $I_V(a)$ *сходится равномерно на компактах из* Π_U *и определяет в области* Π_U *непрерывную положительную функцию.*

Доказательство. С учетом теоремы 2.1 (б) утверждение 1 равносильно выполнению равенства

$$\operatorname{Int} A_V = \{a \in \mathbb{R}^{n-1} : \sigma_V(\zeta) + <\zeta, a> > 0, \ \forall \zeta \in S_{n-1}\}. \tag{2.45}$$

Если для некоторого $a \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\min_{\zeta \in S_{n-1}} \{\sigma_V(\zeta) + <\zeta, a>\} > 0, \tag{2.46}$$

то согласно предложению 2.5 (1°) интеграл I_V сходится в некоторой окрестности точки a, поэтому $a \in \operatorname{Int} A_V$. Наоборот, пусть теперь $a \in \operatorname{Int} A_V$ и убедимся в том, что условие (2.46) выполняется. С этой целью допустим противное:

$$\min_{\zeta \in S_{n-1}} \{\sigma_V(\zeta) + <\zeta, a>\} \leqslant 0. \tag{2.47}$$

Но тогда в (2.47) не может иметь места строгое неравенство, ибо в силу предложения 2.5 (2°) мы получаем $I_V(a) = +\infty$, что несовместимо с исходным предположением $a \in \operatorname{Int} A_V$. Следовательно, наше допущение (2.47) принимает вид

$$\min_{\zeta \in S_{n-1}} \{\sigma_V(\zeta) + <\zeta, a>\} = 0, \tag{2.48}$$

а значит, существует $\zeta_0 \in S_{n-1}$, при котором

$$\sigma_V(\zeta) + <\zeta_0, a> = 0. \tag{2.49}$$

Полагая далее $a_\delta = a - \delta \cdot \zeta_0$, $\delta \in (0, +\infty)$, будем иметь

$$\sigma_V(\zeta_0 + <\zeta_0, a_\delta> = -\delta < 0. \tag{2.50}$$

Следовательно

$$\min_{\zeta \in S_{n-1}} \{\sigma_V(\zeta) + <\zeta, a_\delta>\} < 0, \ \delta \in (0, +\infty), \tag{2.51}$$

и потому, в силу предложения 2.5. (2°)

$$a_\delta \overline{\in} A_V, \ \delta \in (0, +\infty). \tag{2.52}$$

Остается заметить, что $a_\delta \to a$, $\delta \to 0$, и это противоречит предположению $a \in \operatorname{Int} A_V$. Итак, утверждение 1° доказано. Далее, согласно предложению 2.5 (1°) интеграл I_V сходится равномерно в окрестности каждой точки области Π_V. Используя лемму Гейне—Бореля, заключаем, что интеграл I_V равномерно сходится на компактах из Π_U, и тем самым, определяет в области Π_V непрерывную положительную функцию.

§ 3. Основные интегральные представления

3.1. Пусть V — ОВК в $\mathbb{R}^n$ и $\rho(y)$, $y \in V$—суть произвольная (вообще говоря, комплекснозначная) функция. Назовем ρ однородной, если

$$\rho(\alpha \cdot y) = \alpha \cdot \rho(y), \ y \in V, \ \alpha \in (0, +\infty). \tag{3.1}$$

Приведем примеры таких функций. Если V — произвольный ОВК в $\mathbb{R}^n$ ($V \neq \mathbb{R}^n$), то $\rho_V(y)$, $y \in V$ (см. (1.5)), является однородной непрерывной положительной функцией. Если же V — специальный ОВК в $\mathbb{R}^n$, то и $\tau_V(y), y \in V$ (см. (1.13)), является однородной непрерывной положительной функцией.

Справедлива следующая

Лемма 3.1. *Пусть V — острый ОВК в $\mathbb{R}^n$, $\rho(y)$, $y \in V$ — однородная непрерывная положительная функция, $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0, +\infty)$ — непрерывная положительная функция, обладающая свойством* (B) *и $\gamma = \varphi \circ \rho$. Допустим также, что $1 < p \leqslant 2$, $q = p/(p-1)$ и $s \in (0, +\infty)$. Если измеримая функция $F(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяет условию вида*

$$\int_V \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |F(t)|^q \cdot e^{-q\langle y, t\rangle} \, dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \gamma(y) \, dy < +\infty, \tag{3.2}$$

то $F(t) = 0$ для почти всех $t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $t_0 \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$, тогда в силу (2.12) $\langle t_0, \zeta_0\rangle < 0$ для некоторого $\zeta_0 \in V_S$, где (см. [3], пункт 1.1) V_S обозначает образ конуса V при радиальном проектировании $y \to y/|y|$ на единичную сферу $S_n \subset \mathbb{R}^n$. При этом множество $V_S \subset S_n$ открыто (относительно индуцированной топологии). Затем подберем окрестность $W \subset \mathbb{R}^n / V^*$ точки t_0, компактную окрестность $\Omega \subset V_S$ точки ζ_0 и положительное число ε такими, что

$$\langle t, \zeta\rangle \leqslant -\varepsilon, \quad \forall t \in W, \ \forall \zeta \in \Omega. \tag{3.3}$$

Причем легко видеть, что существуют положительные числа a, A, для которых

$$0 < a \leqslant \rho(\zeta) \leqslant A < +\infty, \ \zeta \in \Omega. \tag{3.4}$$

Далее, поскольку функция φ обладает свойством (B), то существует $R \in (0, +\infty)$, такое, что

$$\varphi(\tau) \geqslant \exp\{-ps\varepsilon/2A \cdot \tau\}, \ \tau \geqslant R > 0. \tag{3.5}$$

На основании всего этого приходим к следующей цепочке неравенств:

$$+\infty > \int_V \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |F(t)|^q \cdot e^{-q\langle y, t\rangle} \, dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \gamma(y) \, dy \geqslant$$

$$\geqslant \int_V \left\{ \int_W |F(t)|^q \cdot e^{-q\langle y, t\rangle} \, dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \varphi(\rho(y)) \, dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} r^{n-1} \int_{V_S} \left\{ \int_W |F(t)|^q \cdot e^{-q\langle r\cdot\zeta, t\rangle} \, dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \varphi(\rho(r\cdot\zeta)) \, d\sigma_n(\zeta) \, dr \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{+\infty} r^{n-1} \int_\Omega \left\{ \int_W |F(t)|^q \cdot e^{-qr\langle \zeta, t\rangle} \, dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \varphi(r\cdot\rho(\zeta)) \, d\sigma_n(\zeta) \, dr \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{+\infty} r^{n-1} \cdot e^{qrs\cdot s(p-1)} \int_\Omega \varphi(r\cdot\rho(\zeta))\,d\sigma_n(\zeta)\,dr \cdot \left\{\int_W |F(t)|^q\,dt\right\}^{s(p-1)} \geqslant$$

$$\geqslant \left\{\int_W |F(t)|^q\,dt\right\}^{s(p-1)} \cdot \int_{R/a}^{+\infty} r^{n-1} \cdot e^{ps\cdot r} \int_\Omega \varphi(r\cdot\rho(\zeta))\,d\sigma_n(\zeta)\,dr \geqslant$$

$$\geqslant \left\{\int_W |F(t)|^q\,dt\right\}^{s(p-1)} \cdot \int_{R/a}^{+\infty} r^{n-1} \cdot e^{ps\cdot r} \int_\Omega e^{-psa/2A\cdot r\cdot\rho(\zeta)}\,d\sigma_n(\zeta)\,dr \geqslant$$

$$\geqslant \left\{\int_W |F(t)|^q\,dt\right\}^{s(p-1)} \cdot \int_{R/a}^{+\infty} r^{n-1} \cdot e^{psa/2\cdot r}\,dr \cdot \int_\Omega d\sigma_n(\zeta). \tag{3.6}$$

Но поскольку

$$\int_{R/a}^{+\infty} r^{n-1} \cdot e^{psa/2\cdot r}\,dr = +\infty,\ 0 < \int_\Omega d\sigma_n(\zeta) < +\infty, \tag{3.7}$$

то из (3.6) получаем, что

$$\left\{\int_W |F(t)|^q\,dt\right\}^{s(p-1)} = 0, \tag{3.8}$$

поэтому $F(t) \underset{\text{п. в.}}{=} 0$ в W. Таким образом, для любой точки $t_0 \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$ существует такая ее окрестность $W \subset \mathbb{R}^n \setminus V^*$, в которой $F(t) \underset{\text{п. в.}}{=} 0$. Следовательно, $F(t) = 0$ для п. в. $t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$, и лемма полностью доказана.

Точно такими же рассуждениями может быть доказана

Лемма 3.2. *Пусть V—острый ОВК в* $\mathbb{R}^n$, $\rho(y)$, $y \in V$ — *однородная непрерывная положительная функция*, $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0, +\infty)$ — *непрерывная положительная функция, обладающая свойством* (B) *и* $\gamma = \varphi\circ\rho$. *Тогда*

$$\overset{*}{\gamma}_V(t) = +\infty,\ t \in \mathbb{R}^n / V^*. \tag{3.9}$$

На доказательвтве мы останавливаться не будем.

Комбинируя леммы 3.1 и 3.2 с теоремой 2 работы [14] или теоремами 2.3, 2.5 диссертации [13] (см. также [3], § 0, теорема I), получаем следующий важный результат.

Теорема 3.1. *Пусть V — острый ОВК в* $\mathbb{R}^n$, $\rho(y)$, $y \in V$ — *однородная непрерывная положительная функция*, $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0, +\infty)$ — *нерперывная положительная функция, обладающая свойством* (B), *и* $\gamma = \varphi\circ\rho$. *Допустим также, что* $1 \leqslant p < 2$ *и* $s \in (0, +\infty)$. *Тогда каждая функция* $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$ *допускает интегральное представление вида*

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\cdot\int\limits_{V^*}F(t)\cdot e^{i<z,\,t>}\,dt,\quad z\in T_V,\tag{3.10}$$

где

1°. *При* $p=1$ *функция* $F(t)$, $t\in\mathbb{R}^n$ *непрерывна и удовлетворяет условиям:*

$$F(t)\equiv 0,\quad t\in\mathbb{R}^n\setminus V^*,\tag{3.11}$$

$$\sup_{t\in V^*}\{|F(t)|\cdot\gamma_V^*(s\cdot t)\}\leqslant\frac{M^1_{s,\gamma}(f)}{(2\pi)^{n/2\cdot s}}<+\infty.\tag{3.12}$$

2°. *При* $1<p\leqslant 2$ *функция* $F(t)$, $t\in V^*$, *измерима и удовлетворяет условию* ($q=p/(p-1)$)

$$\int\limits_V\left\{\int\limits_{V^*}|F(t)|^q\cdot e^{-q<y,\,t>}\,dt\right\}^{s(p-1)}\cdot\gamma(y)\,dy\leqslant\frac{M^p_{s,\gamma}(f)}{(2\pi)^{n/2\cdot s(2-p)}}<+\infty.\tag{3.13}$$

При этом для почти всех $y\in V$ *справедливо равенство* ($f_y(x)\equiv f(x+iy)$, $y\in V$, $x\in\mathbb{R}^n$)

$$\hat{f}_y(t)=\begin{cases}0, & t\in\mathbb{R}^n\setminus V^*,\\ F(t)\cdot e^{-<y,\,t>}, & t\in V^*.\end{cases}\tag{3.14}$$

Кроме того, при $p=2$ *интегральное представление* (3.10) *класса* $H^p_{s,\gamma}(T_V)$ *является параметрическим. Более точно, класс* $H^2_{s,\gamma}(T_V)$ *совпадает с множеством функций* $f(z)$ *вида* (3.10), *где* $F(t)$, $t\in V^*$ — *произвольная измеримая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_V\left\{\int\limits_{V^*}|F(t)|^2\cdot e^{-2<y,\,t>}\,dt\right\}^s\cdot\gamma(y)\,dy<+\infty,\tag{3.15}$$

причем выполняется равенство Парсеваля

$$M^2_{s,\gamma}(f)=\int\limits_V\left\{\int\limits_{V^*}|F(t)|^2\cdot e^{-2<y,\,t>}\,dt\right\}^s\cdot\gamma(y)\,dy.\tag{3.16}$$

3.2. Всюду дальше предполагается, что V — нормальный специальный ОВК в $\mathbb{R}^n$ ($n>1$), $\varphi(\tau)$, $\tau\in(0,+\infty)$ — некоторая непрерывная положительная функция и $\gamma=\varphi\circ\tau_V$. При этом очевидно, что и функция $\gamma(y)=\varphi(\tau_V(y))$, $y\in V$, непрерывна и положительна. Для дальнейшего было бы желательно иметь более явное выражение для функции

$$\gamma_V^*(t)=\int\limits_V e^{-<t,\,y>}\cdot\gamma(y)\,dy,\quad t\in\mathbb{R}^n.\tag{3.17}$$

И оказывается, что независимо от каких бы то ни было свойств исходной непрерывной положительной функции φ имеет место

Предложение 3.1. *Справедлива формула*

$$\gamma_V^*(t)=\begin{cases}+\infty,\ t\in \mathbf{R}^n\setminus V^*,\\ \dfrac{\varphi^*(t_n)}{(t_n)^{n-1}}\cdot I_V(t'/t_n),\ t=(t',t_n)\in \operatorname{Int} V^*.\end{cases} \tag{3.18}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $t=(t',t_n)\in \mathbf{R}^n$, тогда справедлива цепочка равенств

$$\gamma_V^*(t)=\int\limits_V e^{-\langle t,y\rangle}\cdot\varphi(\tau_V(y))\,dy=$$

$$=\int\limits_V e^{-\langle t',y'\rangle-t_n\cdot y_n}\cdot\varphi(y_n-\sigma_V(y'))\,dy'dy_n=$$

$$=\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{-\langle t',y'\rangle-t_n\cdot\sigma_V(y')}\int\limits_{\sigma_V(y')}^{+\infty} e^{-t_n\cdot(y_n-\sigma_V(y'))}\times$$

$$\times\varphi(y_n-\sigma_V(y'))\,dy_n dy'=$$

$$=\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{-\langle t',y'\rangle-t_n\cdot\sigma_V(y')}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t_n\cdot\tau}\cdot\varphi(\tau)\,d\tau dy'=$$

$$=\varphi^*(t_n)\cdot\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{-\langle t',y'\rangle-t_n\cdot\sigma_V(y')}\,dy'. \tag{3.19}$$

Если $t_n\leqslant 0$, то

$$-t_n\cdot\sigma_V(y')\geqslant 0,\ \forall y'\in\mathbf{R}^{n-1}, \tag{3.20}$$

поэтому из (3.19) получаем

$$\gamma_V^*(t)\geqslant\varphi^*(t_n)\cdot\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{-\langle t',y'\rangle}\,dy'=+\infty. \tag{3.21}$$

Если же $t_n>0$, то опять же из (3.19) имеем

$$\gamma_V^*(t)=\varphi^*(t_n)\cdot\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{-\langle t',y'\rangle-\sigma_V(t_n\cdot y')}\,dy'=$$

$$=\frac{\varphi^*(t_n)}{(t_n)^{n-1}}\cdot\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{-\sigma_V(x)-\langle x,t'/t_n\rangle}\,dx=\frac{\varphi^*(t_n)}{(t_n)^{n-1}}\cdot I_V(t'/t_n). \tag{3.22}$$

Таким образом, мы пришли к следующему равенству:

$$\gamma_V^*(t)=\begin{cases}+\infty,\ t=(t',t_n),\ t_n\leqslant 0,\\ \dfrac{\varphi^*(t_n)}{(t_n)^{n-1}}\cdot I_V(t'/t_n),\ t=(t',t_n),\ t_n>0.\end{cases} \tag{3.23}$$

Полагая затем $U = \operatorname{Int} V^*$, в силу теоремы 2.1 (a) получим, что U — нормальный специальный ОВК в $\mathbb{R}^n$. Тогда область $\Pi_U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ограничена, причем $U = V(\Pi_U)$. Кроме того, поскольку $V^* = \overline{U}$, то согласно (2.2) имеем

$$V^* \setminus \{0\} = V(\overline{\Pi}_V). \tag{3.24}$$

Следовательно, если $t = (t', t_n) \in \mathbb{R}^n$ и $t_n > 0$, то $t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$ лишь при условии, что $t'/t_n \overline{\in} \overline{\Pi}_U$, и $t \in \operatorname{Int} V^*$ лишь при условии, что $t'/t_n \in \Pi_U$. После этого остается заметить, что формула (3.18) будет следовать из (3.23), как только мы установим следующий факт: если $t = (t', t_n) \in \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$ и $t_n > 0$, то $\gamma_V^*(t) = +\infty$. А это действительно так, ибо тогда $t'/t_n \overline{\in} \overline{\Pi}_U$, причем в силу предложения 2.6 (1°) и выпуклости множества A_V

$$\overline{\Pi}_U = \overline{A}_V, \tag{3.25}$$

так что $t'/t_n \overline{\in} \overline{A}_V$. Следовательно, $I_V(t'/t_n) = +\infty$, а значит $\gamma_V^*(t) = = +\infty$, что и завершает доказательство.

Далее, нас будет интересовать следующий вопрос: в какой мере свойства функции $\gamma = \varphi \circ \tau_V$ зависят от свойств функции φ?

Предложение 3.2. *Если функция $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0, +\infty)$, обладает свойством* (Д), *то и функция $\gamma(y)$, $y \in V$ обладает этим свойством.*

Доказательство. Нам надо проверить, что при любом $R \in (0, +\infty)$, $\gamma \in L^1(V_R)$, где

$$V_R = \{y \in V : |y| < R\}. \tag{3.26}$$

Для этого рассмотрим множество

$$E(R) = \{y' \in \mathbb{R}^{n-1} : \sigma_V(y') < R\} \tag{3.27}$$

и заметим, что оно ограничено, а точнее

$$E(R) \subset \{y' \in \mathbb{R}^{n-1} : |y'| < R/m_V\}. \tag{3.28}$$

Следовательно, имеем

$$\int\limits_{V_R} \gamma(y)\,dy = \int\limits_{V_R} \varphi(y_n - \sigma_V(y'))\,dy'dy_n \leqslant \int\limits_{\substack{y \in V \\ 0 < y_n < R}} \varphi(y_n - \sigma_V(y'))\,dy'dy_n <$$

$$\leqslant \int\limits_{E(R)} dy' \int\limits_{\sigma_V(y')}^{R} \varphi(y_n - \sigma_V(y'))\,dy_n = \int\limits_{E(R)} dy' \int\limits_{0}^{R - \sigma_V(y')} \varphi(\tau)\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{0}^{R} \varphi(\tau)\,d\tau \cdot \int\limits_{E(R)} dy' < +\infty, \tag{3.29}$$

и предложение 3.2 доказано.

Справедливо также

Предложение 3.3. *Пусть функция* $\varphi(\tau)$, $\tau\in(0, +\infty)$, *обладает свойствами* (Б) *и* (Д), *тогда*

1°. *Функция* $\gamma_V^*(t)$ *непрерывна в конусе* $\operatorname{Int} V^*$ *и при этом*

$$0<\gamma_V^*(t)<+\infty,\quad t\in\operatorname{Int} V^*. \tag{3.30}$$

2°. *Если* $a\in V$ *и* $\delta\in(0, +\infty)$, $\alpha\in[0, +\infty)$, *то*

$$\eta(t)=\frac{e^{-<a,\, t>}}{[\gamma_V^*(\delta\cdot t)]^{\alpha}}\in L^p(\operatorname{Int} V^*) \tag{3.31}$$

при всех $0<p\leqslant\infty$.

Доказательство. Комбинируя предложения 3.1, 2.6 (2°) и [3, предложение 1.2 (б) при $n=1$], сразу же получаем утверждение 1°. Что же касается утверждения 2°, то оно является следствием предложения 3.2 и [3, лемма 3.2].

3.3. Пусть, как и выше, V обозначает нормальный специальный ОВК в пространстве R^n $(n>1)$. Допустим также, что $\varphi(\tau)$, $\tau\in(0, +\infty)$ — непрерывная положительная функция, обладающая свойствами (А) и (Д), и $\gamma=\varphi\circ\tau_V$. В этих предположениях рассмотрим функцию

$$\Phi(z, w)=\int\limits_{\operatorname{Int} V^*}\frac{e^{i<z-\overline{w},\, t>}}{\gamma_V^*(2\cdot t)}\,dt=2^{n-1}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\Pi_U}\frac{da}{I_V(a)}\int\limits_0^{+\infty}\frac{r^{2n-2}}{\varphi^*(2r)}\,e^{ir<z-\overline{w},\,(a,1)>}\,dr,\quad z,\ w\in T_V. \tag{3.32}$$

Кроме того, для любых $z\in T_V$, $v\in V$ положим

$$R_{z,v}(t)=\begin{cases}0, & t\in R^n\setminus V^*,\\ (2\pi)^{n/2}\cdot\dfrac{e^{i<z+iv,\,t>}}{\gamma_V^*(2\cdot t)}, & t\in\operatorname{Int} V^*.\end{cases} \tag{3.33}$$

На основании предложения 3.3 (2°) и [3, лемма 3.1] без особого труда устанавливается

Лемма 3.3. а) *Функция* $\Phi(z, w)$, *задаваемая формулой* (3.32), *определена при всех* $z, w\in T_V$ *и является голоморфной относительно переменной* z *и антиголоморфной относительно переменной* w. (б) *Если* $z\in T_V$, $v\in V$ *то* $R_{z,v}(t)\in L^p(R^n)$ *при всех* $0<p\leqslant\infty$ *и при этом ядро* $\Phi(z, u+iv)$, *как функция от* $u\in R^n$, *является преобразованием Фурье функции* $R_{v,v}(t)$.

Далее, справедлив следующий основной результат.

Теорема 3.2. *Пусть* V — *нормальный специальный ОВК в* R^n, $\varphi(\tau)$, $\tau\in(0, +\infty)$ — *непрерывная положительная функция, обладающая свойствами* (А) *и* (Д), $\gamma=\varphi\circ\tau_V$ *и ядро* $\Phi(z, w)$ *определено по формуле* (3.32). *Допустим также, что* $1\leqslant p\leqslant 2$ *и положительное число* s *удовлетворяет одному из следующих условий:*

а) $1/p \leqslant s \leqslant 2/p$;

я) $1/p \leqslant s \leqslant 1/(p-1)$, чо при этом функция φ обладает дополнительным свойством (E).

Тогда каждая функция $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$ допускает интегральное представление вида

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int\limits_{T_V} f(w) \cdot \Phi(z, w) \cdot \gamma(v)\, du dv, \quad z \in T_V, \quad (w = u + iv) \qquad (3.34)$$

причем интеграл справа абсолютно сходится при каждом $z \in T_V$.

Доказательство. Ход рассуждений будет приблизительно таким же, что и при доказательстве теоремы 3.1 работы [3]. Поэтому мы остановимся лишь на узловых моментах, опуская при этом некоторые подробности.

Итак, пусть $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$, тогда по теореме 3.1 справедливо интегральное представление вида

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int\limits_{V^*} F(t) \cdot e^{i<z, t>}\, dt, \quad z \in T_V, \qquad (3.35)$$

где при $p = 1$ функция $F(t)$, $t \in \mathbf{R}^n$, непрерывна и удовлетворяет условиям (3.11), (3.12), а при $1 < p \leqslant 2$ функция $F(t)$, $t \in V^*$, измерима и удовлетворяет условию (3.13). Кроме того, для почти всех $v \in V$ имеет место равенство

$$\hat{f}_v(t) = \begin{cases} F(t) \cdot e^{-<v, t>}, & t \in V^*, \\ 0, & t \in \mathbf{R}^n \setminus V^*. \end{cases} \qquad (3.36)$$

Зафиксируем затем произвольное $z = x + iy \in T_V$ и положим

$$I(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int\limits_{T_V} f(w) \cdot \Phi(z, w) \cdot \gamma(v)\, du dv \quad (w = u + iv). \qquad (3.37)$$

Если интеграл $I(z)$ абсолютно сходится, то

$$I(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int\limits_V \gamma(v) \int\limits_{\mathbf{R}^n} f_v(u) \cdot \Phi(z, u + iv)\, du dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int\limits_V \gamma(v) \int\limits_{\mathbf{R}^n} f_v(u) \cdot \hat{R}_{z,v}(u)\, du dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int\limits_V \gamma(v) \int\limits_{\mathbf{R}^n} \hat{f}_v(t) \cdot R_{z,v}(t)\, dt dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int\limits_V \gamma(v) \int\limits_{V^*} F(t) \cdot e^{-<v, t>} \cdot \frac{e^{i<z+iv, t>}}{\gamma^*_V(2 \cdot t)}\, dt dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{V^*} \frac{F(t)\cdot e^{<z,t>}}{\gamma_V^*(2\cdot t)} \int_V e^{-2<v,t>}\cdot\gamma(v)\,dv\,dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{V^*} F(t)\cdot e^{<z,t>}\,dt = f(z). \tag{3.38}$$

Остается убедиться в абсолютной сходимости интеграла $I(z)$, то есть показать, что

$$\tilde{I}(z) = \int_V \gamma(v) \int_{R^n} |f_v(u)|\cdot|\Phi(z, u+iv|\,du\,dv < +\infty. \tag{3.39}$$

Для этого введем обозначения

$$\tilde{f}(v) = \left(\int_{R^n} |f_v(u)|^p du\right)^{1/p}, \quad v\in V; \tag{3.40}$$

$$\tilde{R}(v) = \left(\int_{R^n} |R_{z,v}(t)|^p\,dt\right)^{1/p} =$$

$$= (2\pi)^{n/2}\cdot\left(\int_{V^*} \frac{e^{-p<y+v,t>}}{[\gamma_V^*(2\cdot t)]^p}\,dt\right)^{1/p}, \quad v\in V. \tag{3.41}$$

Тогда на основании интегрального неравенства Гельдера, леммы 3.3 (б) и теоремы Хаусдорфа—Юнга получаем

$$\tilde{I}(z) \leqslant \text{const}\cdot J, \quad J = \int_V \tilde{f}(v)\cdot\tilde{R}(v)\cdot\gamma(v)\,dv. \tag{3.42}$$

Нам достаточно показать, что $J < +\infty$, при этом в силу условия $f\in H^p_{s,\gamma}(T_V)$ в нашем распоряжении имеется неравенство

$$\int_V [\tilde{f}(v)]^{ps}\cdot\gamma(v)\,dv < +\infty. \tag{3.43}$$

Введем далее положительную меру

$$d\mu(t) = \frac{e^{-p<y,t>}}{[\gamma_V^*(2\cdot t)]^p}\,dt, \quad t\in V^*, \tag{3.44}$$

полная масса μ_0 которой конечна в силу предложения 3.3 (2°). После этого (3.41) может быть записано следующим образом:

$$[\tilde{R}(v)]^p = \text{const}\cdot\int_{V^*} e^{-p<v,t>}\,d\mu(t), \quad v\in V, \tag{3.45}$$

откуда, в частности, получим

$$\sup_{v\in V}[\tilde{R}(v)] < +\infty. \tag{3.46}$$

Если $s = 1/p$, то из (3.43) и (3.46) легко следует, что $J < +\infty$. Если же $s > 1/p$, то подберем число $r\in(1, +\infty)$ таким, чтобы $1/r + 1/ps = 1$.

И тогда в силу интегрального неравенства Гельдера и соотношения (3.43) задача сводится к установлению конечности интеграла

$$J_1 = \int\limits_V [\tilde{R}(v)]^r \cdot \gamma(v)\, dv. \tag{3.47}$$

Поскольку $r/p \geqslant 1$, то применив к (3.45) интегральное неравенство Йенсена, получим

$$[\tilde{R}(v)]^r \leqslant \mathrm{const} \cdot (\mu_0)^{r/p-1} \cdot \int\limits_{V^*} e^{-r<v,t>}\, d\mu(t),\ v \in V. \tag{3.48}$$

Следовательно

$$J_1 \leqslant \mathrm{const} \cdot \int\limits_V \gamma(v) \int\limits_{V^*} e^{-r<v,t>} d\mu(t)\, dv = \mathrm{const} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathrm{Int}\, V^*} \gamma_V^*(r \cdot t)\, d\mu(t) = \mathrm{const} \cdot \int\limits_{\mathrm{Int}\, V^*} \frac{e^{-p<y,t>} \cdot \gamma_V^*(r \cdot t)}{[\gamma_V^*(2 \cdot t)]^p}\, dt. \tag{3.49}$$

Затем учтем, что согласно предложению 3.1 при $t = (t', t_n) \in \in \mathrm{Int}\, V^*$ справедливы равенства

$$\gamma_V^*(r \cdot t) = \frac{\varphi^*(r \cdot t_n)}{(r \cdot t_n)^{n-1}} \cdot I_V(t'/t_n), \tag{3.50}$$

$$\gamma_V^*(2 \cdot t) = \frac{\varphi^*(2 \cdot t_n)}{(2 \cdot t_n)^{n-1}} \cdot I_V(t'/t_n). \tag{3.51}$$

Кроме того, имеем неравенство

$$\varphi^*(r \cdot t_n) \leqslant \mathrm{const} \cdot \varphi^*(2 \cdot t_n)\ \ t_n \geqslant 0, \tag{3.52}$$

которое (см. [3, предложение 1.2 (г, д)]) в случае (а) выполняется в силу того, что тогда $r \geqslant 2$, а в случае (б) — ввиду того, что φ обладает свойством (Е). Комбинируя (3.50)—(3.52), получим

$$\gamma_V^*(r \cdot t) \leqslant \mathrm{const} \cdot \gamma_V^*(2 \cdot t),\ t \in \mathrm{Int}\, V^*. \tag{3.53}$$

Принимая во внимание (3.49), приходим к неравенству:

$$J_1 < \mathrm{const} \cdot \int\limits_{\mathrm{Int}\, V^*} \frac{e^{-p<y,t>}}{[\gamma_V^*(2 \cdot t)]^{p-1}}\, dt. \tag{3.54}$$

Наконец, из (3.54) на основании предложения 3.3 (2°) получаем, что $J_1 < +\infty$ и, тем самым, теорема 3.2 полностью доказана.

3.4. Теперь обсудим один важный частный случай теоремы 3.2. Пусть опять V — нормальный специальный ОВК в $\mathbf{R}^n$, положим

$$\varphi(\tau) = \tau^\alpha,\ \tau \in (0, +\infty),\ \alpha > -1. \tag{3.55}$$

Легко проверяется, что функция φ обладает как свойствами (А), (Д), так и свойством (Е). Кроме того, справедлива формула

$$\varphi^*(t_n) = \Gamma(\alpha + 1)/(t_n)^{\alpha+1},\ t_n > 0. \tag{3.56}$$

Поэтому, полагая

$$\gamma(y)=\varphi(\tau_V(y))\equiv[\tau_V(y)]^{\alpha},\ y\in V, \tag{3.57}$$

согласно предложению 3.1 имеем

$$\gamma_V^*(t)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(t_n)^{n+\alpha}}\cdot I_V(t'/t_n),\ t=(t',t_n)\in \operatorname{Int}V^*. \tag{3.58}$$

При этом формула (3.32) принимает вид

$$\Phi(z,w)=\frac{2^{n+\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot\int\limits_{\operatorname{Int}V^*}\frac{e^{i<z-\overline{w},t>}}{I_V(t'/t_n)}\cdot(t_n)^{n+\alpha}\,dt=$$

$$=2^{n+\alpha}\cdot\frac{\Gamma(2n+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{\Pi_U}\frac{da}{I_V(a)}\cdot\frac{1}{<i(\overline{w}-z),(a,1)>^{2n+\alpha}}. \tag{3.59}$$

С учетом сказанного из теоремы 3.2 вытекает

Теорема 3.3. *Пусть V — нормальный специальный ОВК в $\mathbb{R}^n$, $\alpha>-1$ и ядро $\Phi(z,w)$ определено по формуле* (3.59). *Допустим также, что $1\leqslant p\leqslant 2$ и $1/p\leqslant s\leqslant 1/(p-1)$. Тогда каждая голоморфная в трубчатой области T_V функция $f(z)\equiv f(x+iy)$, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_V\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x+iy)|^p\,dx\right\}^s\cdot[\tau_V(y)]^{\alpha}\,dy<+\infty, \tag{3.60}$$

допускает интегральное представление вида

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi)^n}\cdot\int\limits_{T_V}f(w)\cdot\Phi(z,w)\cdot[\tau_V(v)]^{\alpha}\,du\,dv,\ z\in T_V\ (w=u+iv), \tag{3.61}$$

причем интеграл справа абсолютно сходится при всех $z\in T_V$.

Замечание. Комбинируя предложения 1.3, 2.1 и теорему 3.4, можно получить аналогичные интегральные представления для голоморфных в трубчатых областях $T_V\subset\mathbb{C}^n$ функций f, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_V\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x+iy)|^p\,dx\right\}^p\cdot[\tilde{\rho}_V(y)]^{\alpha}\,dy<+\infty, \tag{3.62}$$

где V — острый ОВК в $\mathbb{R}^n$, $\alpha>-1$, $1\leqslant p\leqslant 2$ и $1/p\leqslant s<1/(p-1)$. На этом мы останавливаться не будем; отметим лишь, что пространства голоморфных функций, удовлетворяющих условиям типа (3.62), рассматривались и ранее (см. [16]), но в другой связи.

Институт математики
АН Армении

Поступила 4.IV.1991

Ա. Հ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ. Ուղիղ խողովակաձև տիրույթներում հոլոմորֆ ֆունկցիաների ինտեգրալ ներկայացումները *(ամփոփում)*։

Այս աշխատանքում դիտարկվում են $T_V=\{z=x+iy\in C^n : x\in R^n, y\in V\}$ խողովակաձև տիրույթում հոլոմորֆ այն $f(z)\equiv f(x+iy)$ ֆունկցիաների դասերը, որոնք բավարարում են

$$\int_V \left\{ \int_{R^n} |f(x+iy)|^p dx \right\}^s \cdot \gamma(y)\, dy < +\infty \quad (0 < p,\ s < +\infty)$$

պայմանին։ Այստեղ V-ն R^n-ում հատուկ ձևով դասավորված (ուստի և նորմալ կոչվող) սուր բաց ուռուցիկ կոն է։ Բացի այդ, $\gamma(y)$ կշռային ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝ $\gamma(y)\equiv\varphi(\tau_V(y))$, $y\in V$, որտեղ $\varphi(\tau)$-ն, $\tau\in(0,+\infty)$, դրական է և անընդհատ, իսկ $\tau_V(y)$, $y\in R^n$, ֆունկցիան կապված է V կոնի հետ, որոշում է այն՝ $V=\{y\in R^n : \tau_V(y)>0\}$ է, բացի այդ $\tau(y)\asymp \mathrm{dist}(y,\partial V)$, $y\in V$։ Ենթադրելով, որ $1<p<2$, իսկ s պարամետրը և φ ֆունկցիան բավարարում են որոշակի պայմանների, աշխատանքում դիտարկվող դասերի համար հաստատվում են Պելի-Վիների տիպի ինտեգրալ ներկայացումներ և կառուցվում են վերարտադրող կորիզներ։

A. H. KARAPETYAN. *Integral representations of holomorphic functions in tube domains over cones* (summary)

In present paper we consider the classes of functions $f(z)\equiv f(x+iy)$ holomorpic in tube domains $T_V=\{z=x+iy\in C^n : x\in R^n,\ y\in V\}$ and satisfying the condition

$$\int_V \left\{ \int_{R^n} |f(x+iy)|^p dx \right\}^s \cdot \gamma(y)\, dy < +\infty \quad (0 < p,\ s < +\infty).$$

Here V is a sharp open convex cone situated in R^n in a special way (and therefore called normal). Moreover, $\gamma(y) > 0$ is a weight function of the form $\gamma(y)=\varphi(\tau_V(y))$, $y\in V$. Here $\varphi(\tau)$, $\tau\in(0,+\infty)$, is positive and continuous and the function $\tau_V(y)$, $y\in R^n$, is associated with cone V, determines it, i. e. $V=\{y\in R^n : \tau_V(y)>0\}$ and $\tau_V(y)\asymp \mathrm{dist}(y,\partial V)$, $y\in V$. For $1<p<2$ and under certain conditions on parameter s and function φ we establish Paley—Wiener type integral representations and construct reproducing kernels for the classes of holomorphic funetions under consideration.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Paley, N. Wiener.* Fourier Transforms in the Complex Domain, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 19, Amer. Math. Soc. New York, 1934.
2. *Н. Винер, Р. Пэли.* Преобразование Фурье в комплексной области, М., Наука, 1964.
3. *А. О. Карапетян.* Интегральные представления весовых пространств функций голоморфных в трубчатых областях, Изв. АН Армении, Математика, 25, № 4, 1990, 315—332.
4. *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян.* Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460.
5. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1966.
6. *S. Bochner.* Group invariance of Cauchy's formula in several variables, Ann. Math., 45. № 4, 1944, 686—707.
7. *С. Г. Гиндикин.* Анализ в однородных областях, УМН, 19, № 4, 1964, 3—92.
8. *T. G. Genchev.* Paley—Wiener type theorems for functions holomophic in a half—plane, Докл. Болг. АН, 37, 1983, 141—144.

9. *T. G. Genchev*. Integral representations for functions holomorphic in tube domains, Докл. Болг. АН, 37, 1984, 717—720.
10. *T. G. Genchev*. Paley—Wiener type theorems for functions in Bergman spaces over tube domains, J. Math. Anal. Appl., 118, № 2, 1986, 496—501.
11. *М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян*. Интегральные представления некоторых классов функций, голоморфных в полосе или в полуплоскости, ДАН СССР, 283, № 5, 1985, 1054—1057.
12. *M. M. Dzhrbashyan, V. M. Martirosyan*. Integral representations for some classes of functions holomorphic in a strip or in a halfplane, Anal. Math., 12, № 3, 1986, 191—212.
13. *А. О. Карапетян*. Некоторые вопросы интегральных представлений в многомерном комплексном анализе. Кандидатская диссертация, Ереван, 1987.
14. *А. О. Карапетян*. Интегральные представления в трубчатых областях, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 23, № 1, 1988, 91—96.
15. *S. Saitoh*. Fourier—Laplace transform and Bergman Spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 102, № 4, 1988, 985—992.
16. *А. Э. Джрбашян, А. О. Карапетян*. Интегральные неравенства между сопряженными плюригармоническими функциями в многомерных областях, Изв. АН Арм.ССР, Математика, 23, № 3, 1988, 216—236.