ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 5, 1991 Математика

УДК 517.956

С. Г. ДАЛАЛЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ НЕСОКРАТИМОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ОБЪЕКТА В ОБЪЕДИНЕНИЕ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА НЕПРИВОДИМЫХ ПОДОБЪЕКТОВ

Главный результат — основная теорема § 6 о единственности несократимого разложения объекта в объединение конечного числа неприводимых подобъектов в категории с нулевыми морфизмами при некоторых дополнительных условиях и следствие из нее, охватывающие не только случай прямой суммы подобъектов и изоморфизма соответствующих неприводимых компонент (§ 7), но и изогению объекта произведению простых подобъектов как в случае абелевых многообразий ([5], теорема Пуанкаре о полной приводимости и следствия из нее).

§ 1. Решетка подобъектов

Морфизм из объекта X в объект Y будем обозначать $X\varphi Y$, а композицию морфизмов $X\varphi Y$ и $Y\psi Z$ — $\varphi\psi$. Если $\chi=\varphi\psi$, то χ делится на φ слева и на ψ справа.

Под подобъектом $K\varkappa X$ подразумевается класс эквивалентности мономорфизма $K\varkappa X$, под факторобъектом $\varkappa$ — класс эквивалентности эпиморфизма $X\varkappa K$. Классы всех подобъектов $\mathrm{P}(X)$ и факторобъектов $\mathrm{Q}(X)$ объекта X частично упорядочены с отношением порядка:

$$\varkappa<\nu \Leftrightarrow \varkappa \text{ делится на } \nu.$$

В частично упорядоченных классах $\mathrm{P}(X)$ и $\mathrm{Q}(X)$ существует наибольший элемент — тотальный подобъект и, соответственно, факторобъект, задаваемые тождественным морфизмом 1_X.

Если X — объект с конечными объединениями и (или) пересечениями подобъектов, соответственно, факторобъектов, то $\mathrm{P}(X)$, соответственно, $\mathrm{Q}(X)$ — решетка по объединениям и (или) пересечениям. Сквозной морфизм коамальгамы (т. е. расслоенного произведения) семейства подобъектов $(K_i\varkappa_i X,\ i\in I)$ задает их пересечение. Поэтому в категории с конечными (соотв., произвольными) коамальгамами любой объект X является объектом с конечными (соотв., произвольными) пересечениями. Более того, в категории с коамальгамами для всякого объекта X $\mathrm{P}(X)$ — полная решетка (это — простое следствие, напр. теоремы 6 на с. 20 [2]).

Образ подобъекта $K\varkappa X$ относительно морфизма $X\varphi Y$, то есть наименьший делящий $\varkappa\varphi$ подобъект $N\nu Y$, будем обозначать $\varkappa\varphi_p$. Если он существует для произвольного подобъекта $K\varkappa X$ (в частности, в категории с коамальгамами), определены изотонное отображение образа $P(X)\varphi_p P(Y)$ и функтор образа P_*, сопоставляющий объекту X его класс подобъектов $P(X)$, а морфизму φ — отображение образа φ_p.

Образ тотального подобъекта 1_X называется образом морфизма φ. Морфизм с тотальным образом называется простым. Эквивалентно, простым называется морфизм, любой правый мономорфный делитель которого — изоморфизм. Очевидно, правый делитель простого морфизма — простой морфизм.

Морфизм β называется дополнительным к образу ν подобъекта $\varkappa$ относительно морфизма φ, если $\beta\nu = \varkappa\varphi$. Дополнительный морфизм к образу определяется однозначно и всегда — простой. Более того, в категории с конечными коамальгамами:

(а) дополнительный морфизм делится на любой простой морфизм, делящий $\varkappa\varphi$ слева;

(б) если $\varkappa\varphi = \beta\nu$, где β — простой морфизм, а ν — мономорфизм, то подобъект ν является образом подобъекта $\varkappa$ относительно морфизма φ.

Прообраз подобъекта $N\nu Y$ относительно морфизма $X\varphi Y$, то есть наибольший из подобъектов $K\varkappa X$, удовлетворяющих равенству $\varkappa\varphi = \beta\nu$ при некотором морфизме $K\beta N$, обозначается $\nu\varphi^P$. Если $(\varkappa, \beta)$ — коамальгама пары (φ, ν), то, как нетрудно проверить, $\varkappa$ будет прообразом подобъекта ν относительно морфизма φ. Если прообразы подобъектов относительно морфизма $X\varphi Y$ существуют (в частности, в категории с конечными коамальгамами), определено изотонное отображение прообраза $P(Y)\varphi^P P(X)$. При этом сопоставления $X \to P(X)$ $\varphi \to \varphi^P$ определяют функтор прообраза P^*.

Простой морфизм $N\nu Y$ называется универсально простым, если при любом морфизме $X\varphi Y$ морфизм $K\varkappa X$ из пары $(\varkappa, \beta)$, задающей коамальгаму пары (φ, ν), является простым. При этом и $\varkappa$ — универсально простой морфизм.

Предложение 1. (а). *Для произвольных морфизма $X\varphi Y$ и подобъектов $\varkappa \in P(X)$ и $\nu \in P(Y)$ справедливы соотношения*

$$\varkappa\varphi_p\varphi^P \geqslant \varkappa, \quad \nu \geqslant \nu\varphi^P\varphi_p.$$

(б). В категории с конечными коамальгамами:

$$\varkappa\varphi_p\varphi^P = \varkappa, \text{ если } \varphi \text{ — мономорфизм;}$$

$$\nu\varphi_p\varphi^P = \nu, \text{ если } \varphi \text{ — универсально простой морфизм.}$$

Предложение 2. Пусть $(K_i\varkappa_i X,\ i \in I)$ — произвольное семейство подобъектов, $X\varphi Y$ — морфизм, для которого определено отображение прообраза φ^P, $N_i\nu_i Y$ — образ подобъекта $\varkappa_i$ относительно φ, $K\varkappa X$ — объединение семейства подобъектов $(\varkappa_i, i \in I)$. Тогда образ подобъекта $\varkappa$ относительно морфизма φ существует, если и только если существует объединение семейства подобъектов $(\nu_i,\ i \in I)$; при этом они совпадают. (Ср. [7], с. 72).

Доказательство. Пусть $N\nu Y$ — образ подобъекта $\varkappa$ относительно φ. Из соотношений $\varkappa_i \leqslant \varkappa$ следует, что $\nu_i \leqslant \nu$. Рассмотрим подобъект $N'\nu'Y$, содержащий все ν_i, $i\in I$. Возьмем его прообраз x' относительно φ. Тогда в силу предложения 1 и изотонности отображения прообраза $x_i\leqslant x'$ при всех $i\in I$. Поэтому $x\leqslant x'$ и, следовательно, согласно предложению 1 и изотонности отображения образа $\nu\leqslant\nu'$. Таким образом, $\nu=\bigcup\limits_{i\in I}\nu_i$.

Обратно, предположим, что ν — объединение семейства подобъектов ν_i, $i\in I$ и $x'=\nu\varphi^P$. Тогда, как и выше $x\leqslant x'$, поэтому $x\varphi$ делится на ν. Пусть $N'\nu'Y$ — произвольный мономорфизм, делящий $x\varphi$. Тогда все $x_i\varphi$, $i\in I$ делятся на ν', значит $\nu_i\leqslant\nu'$ при всех $i\in I$, следовательно, и $\nu\leqslant\nu'$, то есть $\nu=x\varphi_P$.

Следствие. В категории с конечными коамальгамами образ объединения семейства подобъектов и объединение образов этих подобъектов существуют одновременно и совпадают.

Упорядоченная пара морфизмов (σ,φ) называется диагонализуемой (см. [6] или [7]), если

$$x\varphi=\sigma\nu\Rightarrow\exists\mu\mid\sigma\mu=x,\ \mu\varphi=\nu.$$

Предложение 3. В категории с конечными коамальгамами любая пара (σ,φ), состоящая из простого морфизма σ и мономорфизма φ, диагонализуема.

Доказательство. Пусть $x\varphi=\sigma\nu$ и $(\tilde\nu,\tilde\varphi)$ — коамальгама пары (φ,ν). Отметим, что $\tilde\varphi$ — мономорфизм. Существует морфизм ρ такой, что $\rho\tilde\nu=x$, $\rho\tilde\varphi=\sigma$. Так как σ — простой морфизм, из мономорфности $\tilde\varphi$ следует его изоморфность. Взяв $\mu=\tilde\varphi^{-1}\tilde\nu$, будем иметь $\sigma\mu=\rho\tilde\nu=x$, $\mu\varphi=\tilde\varphi^{-1}\tilde\nu\varphi=\nu$.

§ 2. Несократимое разложение объекта в объединение конечного числа неприводимых подобъектов

Подобъект ξ называется неприводимым, если

$$\xi=\zeta\cup\eta\Rightarrow\xi=\zeta \text{ или } \xi=\eta.$$

Объект X называется неприводимым, если его тотальный подобъект неприводим.

Объект X называется объектом конечной (ко) глубины или (ко) артиновым, если в решетке $P(X)$ (соотв., $Q(X)$) не существует бесконечной убывающей цепи подобъектов (соотв., факторобъектов) $\xi_1>\xi_2>\xi_3\cdots$. Объект X называется объектом конечной (ко) высоты или (ко) нетеровым, если в $P(X)$ (соотв., $Q(X)$) нет бесконечной возрастающей цепи подобъектов (соотв., факторобъектов) $\xi_1<\xi_2<\xi_3<\cdots$.

Разложение $\xi=\bigcup\limits_{i\in I}\xi_i$ подобъекта ξ в объединение подобъектов ξ_i называется несократимым, если для любого $j\in I$ $\xi\neq\bigcup\limits_{i\neq j}\xi_i$.

Предложение 4. Всякий артинов объект X обладает несократимым разложением в объединение конечного числа неприводимых подобъектов.

Доказательство. Если бы в каждом разложении $X = \bigcup_{i=1}^{n} \xi_i$ объекта X в объединение конечного числа своих подобъектов ξ_i существовал приводимый подобъект, то как нетрудно убедиться, объект X обладал бы бесконечной убывающей цепью подобъектов.

Всякое разложение в объединение подобъектов можно превратить в несократимое, если отбросить все „лишние" подобъекты, манкирование которых не меняет результата объединения.

Предложение 5. Если X — объект с дистрибутивной решеткой подобъектов и $X = \bigcup_{i \in I} \xi_i = \bigcup_{j \in J} \eta_j$ — несократимые разложения объекта X в обединение неприводимых подобъектов, то существует биекция $I \sigma J$ такая, что подобъекты ξ_i и $\eta_{\sigma(i)}$ совпадают при всех $i \in I$.

Доказательство. В силу дистрибутивности решетки $\mathbf{P}(X)$ $\xi_i = \xi_i \cap (\bigcup_{j \in J} \eta_j) = \bigcup_{j \in J} (\xi_i \cap \eta_j)$ для произвольного $i \in I$. Из неприводимости подобъекта ξ_i следует, что $\xi_i = \xi_i \cap \eta_j$ для некоторого $j = \sigma(i)$ из J, поэтому $\xi_i \leqslant \eta_{\sigma(i)}$. Аналогично найдется $i' \in I$ такое, что $\eta_{\sigma(i)} \leqslant \xi_{i'}$. По транзитивности $\xi_i < \xi_{i'}$, откуда вследствие несократимости разложения $\bigcup \xi_i$ должно быть $i = i'$ и $\xi_i = \eta_{\sigma(i)}$. Полученное сопоставление $i \to \sigma(i)$ определяет нужную биекцию.

§ 3. Равномерные морфизмы

В категории с нулевыми морфизмами $X 0_{XY} Y$ для любого объекта X классы подобъектов $\mathbf{P}(X)$ и факторобъектов $\mathbf{Q}(X)$ имеют наименьшие элементы: нулевой подобъект 0_{OX}, и нулевой факторобъект, 0_{XO}, где O в индексе означает нулевой объект.

Под ядром $\ker \varphi$ морфизма $X \varphi Y$ понимается как мономорфизм $K \varkappa X$, обнуливающий φ слева и делящий всякий морфизм, обнуливающий φ слева, так и класс эквивалентности этого мономорфизма, т. е. подобъект объекта X. Ядро морфизма $X \varphi Y$ — наибольший подобъект объекта X, имеющий нулевой образ относительно φ. Ядро произвольного мономорфизма $X \varphi Y$ существует и тривиально (то есть равно нулевому подобъекту 0_{OX}). В категории с конечными коамальгамами существует ядро любого морфизма $X \varphi Y$; им является прообраз нулевого подобъекта 0_{OY} относительно морфизма φ. Двойственно, под коядром $\operatorname{coke} r \varphi$ морфизма $X \varphi Y$ понимается и факторобъект объекта Y и любой представляющий его эпиморфизм. Корректно определяется также коядро произвольного подобъекта, любой представитель которого называется факторизацией по этому подобъекту. В категории с конечными амальгамами существуют факторизации по всем подобъектам.

Предложение 6. Любой представитель $Y \psi Z$ коядра произвольного морфизма $X \varphi Y$ является простым эпиморфизмом.

Доказательство. Эпиморфность ψ требуется по определению коядра. Если $\psi = \psi' \eta$, где η — мономорфизм, то $\varphi \psi' = 0$, поэтому существует морфизм η' такой, что $\psi' = \psi \eta'$. После подстановки и сокращения на эпиморфизм ψ справа получаем $\eta' \eta = 1$, откуда в силу мономорфности η и $\eta\eta' = 1$. Таким образом, η — изоморфизм и, следовательно, ψ — простой морфизм.

Отображения ядра и коядра антиизотонны в следующем смысле:

$$\chi = \varphi\psi \Rightarrow \ker\varphi \leqslant \ker\chi,\ \operatorname{coker}\psi \leqslant \operatorname{coker}\chi.$$

Предложение 7. *Для произвольного морфизма* $X\varphi Y$.

(а). $\ker\operatorname{coker}\varphi$ *делит* φ *справа*, $\operatorname{coker}\ker\varphi$ *делит* φ *слева;*

(б). $\operatorname{coker}\ker\operatorname{coker}\varphi = \operatorname{coker}\varphi$, $\ker\operatorname{coker}\ker\varphi = \ker\varphi$.

Мономорфизм и подобъект $K\varkappa X$ называются нормальными, если коядро $\varkappa$ существует и $\varkappa = \ker\operatorname{coker}\varkappa$. Двойственно определяются конормальные эпиморфизм и факторобъект. Согласно предложению 7 (ко) ядро любого морфизма является (ко) нормальным подобъектом (соотв., факторобъектом) при условии существования его коядра (соотв., ядра).

Отображения ядра и коядра задают взаимно обратные биекции между классами $P_0(X)$ нормальных подобъектов и $Q_0(X)$ конормальных факторобъектов объекта X. На биекции между $P_0(X$, и $Q_0(X)$ основан, так называемый, второй принцип двойственности (см. [3] для случая абелевых категорий). При действии второго принципа двойственности совпадают понятия коартиновости с нетеровостью и конетеровости с артиновостью.

Прообраз нормального подобъекта относительно произвольного морфизма является нормальным подобьектом. Аналогичное утверждение для образа нормального подобъекта относительно произвольного морфизма неверно, однако, как мы увидим в следующем параграфе, справедливо для являющихся равномерными морфизмами факторизаций при некоторых дополнительных условиях.

Морфизм $X\varphi Y$ называется (решеточно) равномерным по данному семейству подобъектов объекта X, если для любого подобъекта $K\varkappa X$ из этого семейства прообраз образа относительно морфизма φ существует и равен объединению этого подобъекта с ядром морфизма φ.

Морфизм $X\varphi Y$ называется равномерным, если он равномерен по семейству всех подобъектов объекта X.

Любой мономорфизм $X\varphi Y$ равномерен относительно произвольного семейства подобъектов объекта X в силу предложения 1 (б) и тривиальности ядра мономорфизма.

Предложение 8. (а). *Если композиция* χ *морфизма* $X\varphi Y$ *и мономорфизма* ψ *равномерна по некоторому семейству подобъектов объекта* X, *то и* φ *равномерен по этому семейству подобъектов.*

(б). *Композиция* χ *мономорфизма* $X\varphi Y$ *и равномерного по семейству подобъектов* $\mathbf{M}$ *объека* Y *морфизма* ψ *равномерна по семейству подобъектов* $\mathbf{N}$ *объекта* X, *образы которых относительно* φ *принадлежат семейству* $\mathbf{M}$, *если решетка* $\mathbf{P}(Y)$ *модулярна* (см. [4]).

Доказательство. (а). Согласно предложению 1 (б), примененному к мономорфизму φ, и функториальности $\mathbf{P}_*$ и $\mathbf{P}^*$ для произвольного подобъекта $\varkappa$ из заданного семейства подобъекта объекта X получаем

$$x\varphi_p\,\varphi^P = x\varphi_p\,\psi_p\,\psi^P\,\varphi^P = x\chi_p\,\chi^P = x \cup \ker\chi = x \cup \ker\varphi.$$

(б). Опять в силу функториальности отображений образа и прообраза, а также условия равномерности морфизма ψ по M для произвольного подобъекта x из N имеем

$$x\chi_p\,\chi^P = x\varphi_p\,\psi_p\,\psi^P\,\varphi^P = (x\varphi_p \cup \ker\psi)\,\varphi^P.$$

Поскольку φ — мономорфизм, последнее выражение равно $((x\varphi_p \cup \ker\psi) \cap \varphi)\,\varphi^P$, которое с использованием свойства модулярности решетки $\mathrm{P}(Y)$ преобразуется к виду $(x\varphi_p \cup (\ker\psi \cap \varphi))\,\varphi^P$. Опять из-за мономорфности φ в силу предложений 1 и 2, получаем

$$(x\varphi_p \cup (\ker\chi)\,\varphi_p)\,\varphi^P = (x \cup \ker\chi)\,\varphi_p\,\varphi^P = x \cup \ker\chi.$$

Прежде, чем перейти к следующему предложению, сделаем два замечания. Во-первых, для мономорфизма φ отображение прообраза определено в силу того, что $\mathrm{P}(Y)$ — решетка (в частности, по пересечениям). Во-вторых, если $\mathrm{M} = \mathrm{P}(Y)$, то, очевидно, $\mathrm{N} = \mathrm{P}(X)$.

Предложение 9. В категории с конечными коамальгамами образ $N\nu Y$ неприводимого подобъекта $K\varkappa X$ относительно равномерного морфизма $X\varphi Y$ неприводим, если решетка $\mathrm{P}(X)$ модулярна, а дополнительный морфизм τ, подчиняющийся равенству $\tau\nu = \varkappa\varphi$, универсально прост.

Доказательство. Предположим, что $\nu = \alpha \cup \beta$ для некоторых подобъектов α и β объекта Y. Тогда $\alpha' \cup \beta' = 1_N$, где $\alpha' = \alpha\nu^P$, $\beta' = \beta\nu^P$. Взяв $\tilde{\alpha} = \alpha'\tau^P$ и $\tilde{\beta} = \beta'\tau^P$, согласно предложениям 1 и 2 и условию универсальной простоты τ будем иметь

$$(\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta})\,\tau_p = \alpha'\tau^P\,\tau_p \cup \beta'\tau^P\,\tau_p = \alpha' \cup \beta' = 1_N.$$

Так как $X\varphi Y$ — равномерный морфизм, а X — объект с модулярной решеткой подобъектов, согласно предложению 8 морфизмы $\varkappa\varphi = \tau\nu$ и, следовательно, τ равномерны. Последний морфизм к тому же простой, поэтому

$$1_K = 1_N\,\tau^P = (\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta})\,\tau_p\,\tau^P = \tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta} \cup \ker\tau.$$

Подобъекты $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, являясь прообразами подобъектов относительно τ, содержат ядро этого морфизма. Следовательно, получаем $\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta} = 1_K$. Ввиду неприводимости подобъекта $K\varkappa X$ либо $\tilde{\alpha} = 1$, либо $\tilde{\beta} = 1$, откуда вытекает, что по крайней мере один из морфизмов α' и β' делит простой морфизм τ, поэтому является изоморфизмом.

Предложение 10. Пусть $X = \bigcup\limits_{i \in I} \xi_i$ — несократимое разложение объекта X в объединение подобъектов ξ_i, $X\varphi Y$ — равномерный относительно семейства всевозможных объединений подобъектов ξ_i морфизм с ядром $\ker\varphi = \bigcup\limits_{i \in K} \xi_i$, для которого определено отображение обратного образа φ^P, а η_i, $i \in I$ — образы подобъектов ξ_i относительно

φ. Тогда образ η морфизма φ представляется в виде несократимого объединения подобъектов η_i, $i \in I \setminus K$.

Доказательство. Так как определено φ^P, согласно предложению 2 $\eta = 1_X \varphi_P = (\bigcup_{i \in I} \xi_i) \varphi_P = \bigcup_{i \in I} \eta_i$. Здесь все $\eta_i = 0$ при $i \in K$, потому что являются образами относительно φ таких подобъектов, которые лежат в ядре этого морфизма.

Предположим, что $\eta = \bigcup_{i \in J} \eta_i$, где $J \subset I \setminus K$. Тогда $\eta_i = (\bigcup_{i \in J} \xi_i) \varphi_P$ и в силу равномерности морфизма φ $1_X = \eta \varphi^P = (\bigcup_{i \in J} \xi_i) \bigcup \ker \varphi = \bigcup_{i \in J \cup K} \xi_i$.

Так как исходное разложение — несократимое, $J \cup K = I$. Таким образом, несократимо и разложение $\eta = \bigcup_{i \in I \setminus K} \eta_i$.

§ 4. Наследуемость свойств

Пусть X — произвольный объект, N — семейство подобъектов объекта X, $X \overset{\varphi}{\to} Y$ — некоторый морфизм, N_φ — семейство образов всех подобъектов из N относительно морфизма φ. Будем говорить, что свойство, которому удовлетворяет семейство подобъектов N, наследуется при морфизме φ, если семейство подобъектов N_φ также обладает этим свойством.

Предложение 11. В категории с конечными коамальгамами следующая совокупность свойства семейства подобъектов N объекта X наследуется при всех[1] факторизациях объекта X по подобъектам из семейства N.

(1). N — замкнутое относительно объединений семейство нормальных подобъектов объекта X.

(2). Факторизация объекта X по каждому подобъекту из семейства N существует и является универсально простым морфизмом, равномерным по семейству подобъектов N.

(3). Морфизм, дополнительный к образу любого подобъекта из N относительно факторизации по произвольному подобъекту из семейства N, является эпиморфизмом.

Доказательство. Пусть $R \rho X$ — произвольный подобъект семейства N, $X \varphi_\rho X_\rho$ — факторизация по нему, N_ρ — семейство образов подобъктов из N относительно φ_ρ. Их существование гарантируется условием (2). Проверим, что семейство подобъектов N_ρ объекта X_ρ удовлетворяет условиям (1)—(3).

В силу условия (2) и определения равномерного морфизма образы подобъектов из N относительно φ_ρ существуют. Так как N замкнуто относительно объединений, согласно следствию из предложения 2 N_ρ также будет замкнутым относительно объединений. Чтобы доказать нормальность образа $K_\rho x_\rho X_\rho$ подобъекта $K x X$ из семейства N относительно φ_ρ, надо убедиться в существовании факторизации по подобъекту x_ρ.

Для факторизаций φ_ρ, φ_x, $\varphi_{x \cup \rho}$ по подобъектам, соответствующим индексам, существуют морфизмы $\varphi^\rho_{x \cup \rho}$ и $\varphi^x_{x \cup \rho}$, однозначно определяемые равенствами $\varphi_{xUp} = \varphi_x \varphi^x_{xUp} = \varphi_p \varphi^p_{xUp}$. При этом φ^p_{xUp} — факторизация по подобъекту x_p.

Действительно, дополнительный морфизм δ^x_p к образу x_p подобъекта x относительно факторизации φ_p, подчиняющийся равенству $\delta^x_p x_p = x\varphi_p$, эпиморфен согласно условию (3). Поэтому из равенств $\delta^x_p x_p \varphi^p_{xUp} = x\varphi_x \varphi^x_{xUp} = 0$ следует, что $x_p \varphi^p_{xUp} = 0$.

В силу равномерности морфизма φ_p по N $x(\varphi_p)p(\varphi^p)^P = x_p(\varphi_p)^P = xUp$, поэтому существует морфизм γ, который в паре с xUp дает коамальгаму пары (φ_p, x_p).

Предположим, что $\varphi_p\eta = 0$. Тогда $(xUp)\varphi_p\eta = \gamma x_p\eta = 0$. Следовательно $\varphi_p\eta = \varphi_{xUp}\zeta$ для подходящего морфизма ζ. Подставляя $\varphi_{xUp} = \varphi_p\varphi^p_{xUp}$ и сокращая на эпиморфизм φ_p, получаем $\eta = \varphi^p_{xUp}\zeta$. Таким образом, φ^p_{xUp} — факторизация по подобъекту x_p.

Заметим, что φ^p_{xUp}, являясь правым делителем универсально простого морфизма φ_{xUp}, сам универсально прост. Так что для полного доказательства наследовательности свойства (2) осталось проверить равномерность факторизации φ^p_{xUp} по семейству подобъектов N_p.

Чтобы закончить доказательство наследуемости свойства (1), осталось проверить нормальность подобъекта x_p, то есть равенство $x_p = \ker \varphi^p_{xUp}$.

Предположим, что $\nu'\varphi^p_{xUp} = 0$ и рассмотрим коамальгаму (x', φ') пары морфизмов (φ_p, ν'). Поскольку $x'\varphi_{xUp} = \varphi'\nu'\varphi^p_{xUp} = 0$ и φ_{xUp} — факторизация по нормальному подобъекту xUp (который, следовательно, является его ядром), существует морфизм γ' такой, что, $x' = \gamma'(xUp)$.

Так как $\varphi'\nu' = \gamma'(xUp)\varphi_p = \gamma'\gamma x_p$, где φ' — простой морфизм (в силу универсальной простоты факторизации φ_p), а x_p — мономорфизм, ввиду свойства диагонализуемости пары (φ', x_p) существует морфизм σ такой, что $\sigma x_p = \nu'$. Тем самым $x_p = \ker \varphi^p_{xUp}$ и наследственность свойства (1) доказана.

Проверим наследственность условия (3). Пусть $N\nu X$ — произвольный подобъект семейства N, ν_p и ν_{pUx} — его образы относительно факторизаций φ_p и φ_{pUx}, соответственно, а δ^ν_p и δ^ν_{pUx} — соответствующие дополнительные простые эпиморфизмы. Так как $\delta^\nu_{pUx}\nu_{pUx} = \nu\varphi_{pUx} = \delta^\nu_p\nu_p\varphi^p_{pUx}$, в силу свойства минимальности дополнительного простого морфизма δ^ν_{pUx} к образу в категории с конечными коамальгамами имеем $\delta^\nu_{pUx} = \delta^\nu_p\delta'$ для некоторого морфизма δ', который, будучи правым дилителем простого эпиморфизма δ^ν_{pUx}, сам прост и эпиморфен. Подставляя последнее равенство в предыдущее и сокращая на эпиморфизм δ^ν_p справа, получаем равенство $\delta'\nu_{pUx} = \nu_p\varphi^p_{pUx}$, где δ' — простой морфизм, а ν_{pUx} — мономорфизм. Значит ν_{pUx} — образ ν_p относительно морфизма φ^p_{pUx} с дополнительным простым эпиморфизмом δ'.

Осталось завершить доказательство равномерности морфизма φ^p_{xUp} относительно семейства подобъектов N_p. Для произвольного подобъекта ν_p из N_p имеем

$$\nu_\rho(\varphi^\rho_{xU\rho})_P(\varphi^\rho_{xU\rho})^P = \nu(\varphi_\rho)_P(\varphi^\rho_{xU\rho})_P(\varphi^\rho_{xU\rho})^P(\varphi_\rho)^P(\varphi_\rho)_P,$$

потому что $(\varphi_\rho)^P(\varphi_\rho)_P = 1$ в силу универсальной простоты морфизма φ_ρ. Используя функториальность отображений образа и прообраза и равномерность морфизма $\varphi_{,U\rho}$, последнее выражение преобразуем к виду $(\nu U \times U\rho)(\varphi_\rho)_P$, которое согласно предложению 2 равно $\nu_\rho U x_\rho$. Предложение 11 доказано,

§ 5. Комбинаторное утверждение

Предложение 12. Пусть A — квадратная матрица порядка n. T — подмножество множества значений элементов a_{ij} матрицы A, удовлетворяющие следующим условиям:

(а) для любых попарно различных строк $i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}$ найдутся попарно различные столбцы $j_1, j_2, \cdots, j_{n-1}$ так, что $a_{i_k j_k} \in T$ при всех $k \in \overline{1;\ n-1}$;

(б) в каждом столбце матрицы A есть элемент со значением из T. Тогда

(в) существует подстановка σ степени n такая, что $a_{k\sigma(k)} \in T$ при всех $k \in \overline{1;\ n}$;

Доказательство. Прежде всего отметим, что условия (а)—(в) инвариантны относительно любых перестановок строк и столбцов, поэтому справедливость предложения 12 достаточно проверить для некоторой матрицы C, получаемой из A такой перестановкой.

Так как матрица A удовлетворяет условию (а), найдутся элементы $a_{rj_r} \in T$ при всех $r \in \overline{1;\ n-1}$ с $j_r \neq j_s$ при $r \neq s$. Согласно (б существует элемент $a_{ij_n} \in T$, где $j_n \neq j_r$ при всех $r \in \overline{1;\ n-1}$. Если $i = n$, подстановка $\sigma(r) = j_r$, $r \in \overline{1;\ n}$ будет удовлетворять условию (в). Далее будем предполагать, что $i < n$.

Из условия (а) следует, что найдется элемент $a_{nj} \in T$, причем согласно предыдущему можно считать, что $j \neq j_n$. В этом предположении j-тый столбец содержит два элемента из T: кроме a_{nj} еще a_{rj_r} при $r \leqslant n-1$ $j_r = j$. Если $j=j$, подстановка σ, определяемая равенствами $\sigma(r) = j_r$ при $r \in \overline{1;\ n-1}$, $r \neq i$, $\sigma(i) = j_n$ и $\sigma(n) = j_i$, будет удовлетворять условию (в). В дальнейшем предполагается, что $j \neq j_i$.

Переставим j-тый столбец на первое место, а j_i-тый и j_n-тый столбцы, содержащие T-значные элементы в i-той строке, на $(n-1)$-ое и n-ое места, а затем перестановкой строк полученную матрицу приведем к виду $C = (c_{rs})$ с T-значными элементами c_{11}, c_{nn} и $c_{r+1\ r}$, при $r \in \overline{1;\ n-1}$.

Обозначим через B_m подматрицу матрицы C, составленную из элементов, стоящих на пересечениях первых $m+1$ строк и первых m столбцов. Матрица $B = B_1$ удовлетворяет следующему условию:

(г) присоединением произвольного столбца, содержащего хотя бы один T-значный элемент, к B получается квадратная матрица, удовлетворяющая условию (в).

Предположим, что и матрица $B = B_m$ удовлетворяет условию (г). Матрица C, полученная из матрицы A перестановкой строк и столбцов, удовлетворяет условию (а). Поэтому для строк $1, 2, \cdots, n-1$. можно найти соответстйующие попарно различные столбцы $j_1, j_2, \cdots, j_{n-1}$ так, что c_{kj_k} T-значны при всех $k \in \overline{1;\ n-1}$. В частности, найдется T-значный элемент c_{rs} с $r < m+1$ и $s \geqslant m+1$.

Случай 1: $s \leqslant n-2$. Переставив s-тый столбец с $(m+1)$-ым столбцом, затем $(m+2)$-ую строку, с $s+1$-ой строкой,получим матрицу в ида C, у которойуже под матрица B_{m+1} будет удовлетворять условию (г) Проверим.

Присоединим к матрице B_{m+1} $(m+2)$-й столбец с T-значным элементом $b_{t\ m+2}$. Если $t = m+2$, так как матрица B_m удовлетворяет условию (г), найдется подстановка σ порядка $m+1$ с T-значными элементами $c_{i\sigma(i)}$ при всех $i \in \overline{1;\ m+1}$. Определим подстановку τ порядка $m+2$, положив $\tau(i) = \sigma(i)$ при $i \in \overline{1;\ m+1}$ и $\tau(m+2) = m+2$.

Если $t \in \overline{1;\ m+1}$, опять воспользовавшись тем, что матрица B_m удовлетворяет условию (г), найдем подстановку σ порядка $m+1$ такую, что $c_{i\sigma(i)}$ T-значны при $i \in \overline{1;\ m+1}$, $i \neq t$ и $\sigma(t) = m+2$. В этом случае подстановку τ порядка $m+2$ определим условиями; $\tau(i) = \sigma(i)$ при $i \in \overline{1;\ m+1}$ и $\tau(m+2) = m+1$. В обоих случаях по построению $c_{i\tau(i)}$ T-значны при всех $i \in \overline{1;\ m+2}$. Таким образом, матрица B_{m+1} удовлетворяет условию (г).

Указанным способом увеличивая размеры матрицы B пока имеем дело со случаем 1, придем к случаю 2.

Случай 2: $s \geqslant n-1$. Так как матрица B_m удовлетворяет условию (г), найдется подстановка τ порядка $m+1$ такая, что $c_{i\tau(i)}$ T-значны при всех $i \in \overline{1;\ m+1}$, $i \neq r$ и $\sigma(r) = s$. Определим подстановку σ порядка n условиями: $\sigma(i) = \tau(i)$ при $i \in \overline{1;\ m+1}$ и $\sigma(i) = i-1$ при $i \in \overline{m+2;\ n-1}$. Подстановка σ будет удовлетворять условию (в).

§ 6. Основная теорема

Теорема. *Пусть объект X категории с нулевыми морфизмами и конечными коамальгамами допускает несократимые разложения $\bigcup_{i=1}^{m} \xi_i$ и $\bigcup_{j=1}^{n} \eta_j$ в объединения непреводимых подобъектов ξ_i и η_j. Предположим, что всевозможные объединения подобъектов ξ_i и η_j существуют и семейство $\mathbf{N}$ этих объединений удовлетворяет условиям (1)—(3) предложения 11 и, кроме того, ненулевые образы неприводимых подобъектов ξ_i и η_j относительно факторизаций по подобъектам семейства $\mathbf{N}$ неприводимы. Тогда $m = n$ и при некоторой биекции индексов σ образы подобъектов ξ_i и $\eta_{\sigma(i)}$ относительно факторизаций $\overline{\varphi}_i$ по подобъекту $\bigcup_{k \neq i} \xi_k$ совпадают.*

Доказательство проводится индукцией по числу подобъектов в несократимом разложении.

Если $m=1$, то из равенства $\xi_1=\bigcup_{j=1}^{n}\eta_j$ в силу неприводимости ξ_1 следует, что $\xi_1=\eta_j$ для некоторого j, поэтому ввиду несократимости разложения $\bigcup_{j=1}^{n}\eta_j$ имеем $n=1$.

Пусть $i_1, i_2, \cdots, i_m$ — произвольная перестановка чисел $1, 2, \cdots, m$. Рассмотрим факторизацию $X\varphi_{i_m}U$ по подобъекту ξ_{i_m}, образы u_i, v_j подобъектов ξ_i, η_j относительно морфизма φ_{i_m} (они существуют согласно условию (2)). Так как факторизация φ_{i_m} — простой морфизм, в силу предложения 2 $U=\bigcup_{i=1}^{m}u_i=\bigcup_{j=1}^{n}v_j$. Из последнего разложения м... -но выделить несократимое разложение $U=\bigcup_{j\in J}v_j$, отбросив все лиш-ние подобъекты, не влияющие на результат объединения. Разложе.. е $U=\bigcup_{k=1}^{m-1}u_{i_k}$ будет несократимым согласно предложению 10. Из предположений теоремы следует, что подобъекты u_i и v_j последних разложений неприводимы.

Всевозможные объединения подобъектов u_i и v_j существуют на основании условия (1) и предложения 2. Семейство N′ всех таких объединений удовлетворяет условиям (1)—(3) согласно свойству наследуемости этих условий (предложение 11). Из доказательства этого же предложения известно, что факторизация ψ по любому подобъекту семейства N′ в композиции с φ_{i_m} является факторизацией по некоторому подобъекту семейства N. В силу функториальности отображения образа ненулевые образы неприводимых подобъектов u_i и v_j относительно факторизаций по подобъктам класса N′ неприводимы, потому что совпадают с образами неприводимых подобъектов ξ_i и η_j относительно факторизации по подобъекту из семейства N.

По предположению индукции J состоит из $m-1$ элемента и образы подобъектов u_{i_k} и v_{j_k}, где $j_k\in J$ и $j_k\neq j_l$ при $k\neq l$, относительно факторизации $\bar\psi_{i_k}$ по нормальному подобъекту $\bigcup_{i\neq i_k}u_i$ совпадают при всех $k\in\overline{1; m-1}$. Воспользовавшись равенством $\bar\varphi_k=\varphi_n\bar\psi_{i_k}$ и функториальностью отображения образа, получим, что

(а) для произвольных попарно различных $i_1, i_2, \cdots, i_{m-1}\in\overline{1; m}$ существуют такие попарно различные $j_1, j_2, \cdots, j_{m-1}\in J$, что образы ξ_{i_k} и η_{j_k} относительно факторизаций $\bar\varphi_{i_k}$ совпадают при всех $k\in\overline{1; m-1}$.

Взяв прообраз равенства $U=\bigcup_{j\in J}v_j=(\bigcup_{j\in J}\eta_j)(\varphi_{i_n})_P$ относительно равномерного морфизма φ_{i_n} с ядром ξ_{i_n}, получим

$$X=(\bigcup_{j\in J}\eta_j)\cup\xi_{i_n}. \qquad (*)$$

Поэтому образ объекта X относительно факторизации по нормальному подобъекту $\eta_J = \bigcup_{j\in J} \eta_j$, с одной стороны равен образу ξ'_{i_n} подобъекта ξ_{i_n}, а с другой стороны, объединению $\bigcup_{l\in J} \eta'_l$ образов η'_l подобъектов η_l.

Предположим, что $\xi'_{i_n} = 0$. Тогда $\eta'_l = 0$ и, следовательно, $\eta_l \leqslant \eta_J$ при всех $l \overline{\in} J$, потому что η_J в силу нормальности является ядром своей факторизации. Но тогда вследствие несократимости разложения $X = \bigcup_{j=1}^{n} \eta_j$ имеем $J = \overline{1; n}$, откуда согласно индуктивному предположению на J получаем $n = m - 1$.

Если подобъект ξ'_{i_n} — ненулевой, то он согласно предположениям теоремы неприводим, поэтому $\xi'_{i_n} = \eta'_r$ при некотором $r \overline{\in} J$ и, следовательно, $\eta'_l \leqslant \eta'_r$ при всех $l \in J$. Перейдя к прообразам относительно факторизации по подобъекту η_J, в силу равномерности этого морфизма и изотонности отображения прообраза получим, что $\eta_J \cup \eta_l \leqslant \eta_J \cup \eta_r$ при всех $l \overline{\in} J$. Из этих соотношений следует, что $X = \eta_J \cup \eta_r$ и в силу несократимости разложения $X = \bigcup_{j=1}^{n} \eta_j$ получаем $J \cup \{r\} = \overline{1, n}$. Вместе с индуктивным предположением это дает $m = n$. Таким образом, в любом случае $n \leqslant m$. По соображениям симметрии аналогично $m \leqslant n$. Итого $m = n$.

Заметим, что теперь равенство (*) можно переписать в виде $X = \left(\bigcup_{j\neq r} \eta^j\right) \cup \xi_{i_n}$. Опять воспользовавшись соображениями симметрии между разложениями $X = \bigcup_{i=1}^{n} \xi_i = \bigcup_{j=1}^{n} \eta_j$, получаем:

(б) для произвольного $s \in \overline{1; n}$ найдется $r \in \overline{1; n}$, удовлетворяющее условию $X = \left(\bigcup_{l\neq r} \xi_l\right) \cup \eta_s$; при этом образы подобъектов ξ_r и η_s относительно факторизации $\overline{\varphi}_r$ по подобъекту $\bigcup_{l\neq r} \xi_l$ совпадают.

Построим квадратную матрицу $A = (a_{ij})$ инциденции разложения $X = \bigcup_{i=1}^{n} \xi_i$ относительно разложения $X = \bigcup_{j=1}^{n} \eta_j$, положив $a_{ij} = 1$, если образы подобъектов ξ_i и η_j относительно факторизации $\overline{\varphi}_i$ совпадают, и $a_{ij} = 0$, в противном случае. Доказанные выше свойства (а) и (б) влекут выполнение условий (а) и (б) предложения 12. Поэтому согласно свойству (в) этого предложения $\xi_i(\overline{\varphi}_i)_P = \eta_{\sigma(i)}(\overline{\varphi}_i)_P$ при всех $i \in \overline{1; n}$ для некоророй подстановки σ.

Следствие. Если в категории с нулевыми морфизмами, конечными коамальгамами все подобъекты объекта X нормальны, образуют модулярную решетку и существуют факторизации по ним, являющиеся универсально простыми равномерными морфизмами с универсально простыми дополнительными эпиморфизмами к образам подобъектов относительно этих факторизаций, то при любом несократимом разложении $X = \bigcup_{i=1}^{m} \xi_i = \bigcup_{j=1}^{n} \eta_j$ в объединения конечного числа неприводимых подобъектов $m = n$ и $\xi_i (\overline{\varphi}_i)_p = \eta_{\sigma(i)} (\overline{\varphi}_j)_p$ для некоторой подстановки σ.

Достаточно к теореме применить предложение 9.

§ 7. Прямая сумма подобъектов

Объединение $X_I \xi_I X$ семейства подобъектов $(X_i \xi_i X,\ i \in I)$ будем называть суммой этого семейства, если

$$\varkappa_i^I \alpha = \varkappa_i^I \beta \ \forall i \in I \Rightarrow \alpha = \beta,$$

где $(X_i \varkappa_i^I X_I)$ — семейство морфизмов, однозначно определяемых равенствами $\varkappa_i^I \xi_I = \xi_i$. Прямая сумма $\xi_I = \bigoplus_{i \in I} \xi_i$ определяется дополнительным условием

$$\forall (X_i \eta_i Y,\ i \in I) \exists (X_I \eta Y,\ \varkappa_i \eta = \eta_i \ \forall i \in I.$$

Таким образом, если $\xi_I = \bigoplus_{i \in I} \xi_i$, то $(X_i \varkappa_i^I X_I)\ i \in I)$ — копроизведение (сумма) семейства объектов $(X_i,\ i \in I)$. Обратно, если в категории с нулевыми морфизмами $(X_i \xi_i X,\ i \in I)$ — копроизведение семейства объектов $(X_i,\ i \in I)$, то все ξ_i — мономорфизмы и X является объединением семейства подобъектов $(\xi_i,\ i \in I)$.

Объект X называется кохопфовым, если любой простой эпиморфизм $X \xi X$ является изоморфизмом. Очевидно, любой коартинов объект кохопфов. В категории со вторым принципом двойственности всякий нетеров объект кохопфов.

Предложение 13. Если в условиях теоремы § 6 X — кохопфов объект и $X = \bigoplus_{i=1}^{m} \xi_i = \bigoplus_{j=1}^{n} \eta_j$, причем всевозможные объединения подобъектов ξ_i являются суммами, то $m = n$ и для подходящей подстановки σ подобъекты $X_i \xi_i X$ и $Y_{\sigma(i)} \eta_{\sigma(i)} X$ изоморфны, т. е. существуют изоморфизмы $Y_{\sigma(i)} \tau_i X_i$ при всех $i \in \overline{1n}$.

Доказательство. Согласно теореме § 6 $m = n$ и найдется подстановка σ такая, что образы ξ_i и $\eta_{\sigma(i)}$ относительно факторизации $\overline{\varphi}_i$ по подобъекту $\bigoplus_{k \neq i} \xi_k$ совпадают. Поменяв индексы подобъектов η_j, можно считать, что σ — тождественная подстановка. В качестве факторизации $\overline{\varphi}_i$ можно взять морфизм $X \overline{\varphi}_i X_i$, однозначно определяемый условиями $\xi_i \overline{\varphi}_i = 1$ и $\xi_j \overline{\varphi}_i = 0$ при $j \neq i$. Действительно, если $\overline{\xi}_i = \bigcup_{j \neq} \xi_j$ есть сумма объединяемых подобъектов и $\varkappa_j$ — удовлетворяющие равенствам $\varkappa_j \overline{\xi}_i = \xi_j$ морфизмы, то $\overline{\xi}_i \overline{\varphi}_i = 0$, потому что $\varkappa_j 0 = \xi_j \overline{\varphi}_i = \varkappa_j \overline{\xi}_i \overline{\varphi}_i$ для всех $j \neq i$. Более того, если $\overline{\xi}_i \psi = 0$, то $\xi_j \psi = \varkappa_j \overline{\xi}_i \psi = 0$ при всех $j \neq i$. Поэтому для композиции $\overline{\varphi}_i \xi_i \psi$ имеем $\xi_j \overline{\varphi}_i \xi_i \psi = 0 = \xi_j \psi$

при всех $j \neq i$ и $\xi_i \bar{\varphi}_i \xi_i \psi = \xi_i \psi$. Поскольку X — сумма подобъектов ξ_j, $j \in \overline{1n}$, получаем $\psi = \bar{\varphi}_i \xi_i \psi$.

Так как $\xi_i \bar{\varphi}_i = 1$, образ подобъекта ξ_i относительно рассмотренной факторизации $\bar{\varphi}_i$ тотален. Поскольку образы подобъектов ξ_i и η_i относительно $\bar{\varphi}_i$ совпадают, существует дополнительный простой эпиморфизм $Y_i \tau_i X_i$, удовлетворяющий равенству $\tau_i = \eta_i \bar{\varphi}_i$.

По определению прямой суммы $X = \bigoplus_{i=1}^{n} \eta_i$ для семейства морфизмов $(Y_i \tau_i \xi_i X,\ i \in \overline{1n})$ существует единственный морфизм $X \xi X$ такой, что $\eta_i \xi = \tau_i \xi_i$.

Проверим, что ξ — простой морфизм. Предположим, что $\xi = \alpha\beta$ с мономорфным β и (β_i, γ_i) — коамальгама пары (ξ_i, β). Так как $\tau_i \xi_i = \eta_i \alpha\beta$ для любого $i \in \overline{1n}$, существует единственный морфизм ζ_i, удовлетворяющий равенствам $\zeta_i \beta_i = \tau_i$, $\zeta_i \gamma_i = \eta_i \alpha$. Из первого равенства в силу простоты морфизма τ_i и мономорфности β_i следует, что β_i—изоморфизм. Тогда $\xi_i = \beta_i^{-1} \gamma_i \beta$, т. е. $\xi_i < \beta$. Поскольку эти соотношения выполняются для всех $i \in \overline{1n}$ и $X = \bigcup_{i=1}^{n} \xi_i$, получаем, что β — изоморфизм.

Теперь покажем, что ξ — эпиморфизм. Если $\xi u = \xi v$, то для любого $i \in \overline{1n}$ $\eta_i \xi u = \eta_i \xi v$, следовательно, $\tau_i \xi_i u = \tau_i \xi_i v$. Из эпиморфности морфизмов τ_i вытекает, что $\xi_i u = \xi_i v$. Точно так же, как и выше, получаем $u = v = \xi_i v$. Так как эти равенства выполняются для всех $i \in \overline{1n}$ и $X = \bigoplus_{i=1}^{n} \xi_i$, получаем, что $u = v$.

В силу кохопфовости объекта X простой эпиморфизм $X \xi X$ будет изоморфизмом. Поэтому из равенства $\tau_i \xi_i = \eta_i \xi$ следует, что τ_i — мономорфизм. Поскольку к тому же τ_i — простой морфизм, он будет изоморфизмом, что и требовалось доказать.

Предложение 13 является аналогом теоремы Крулля—Ремака—Шмидта ([3]) о единственности разложения в прямую сумму неразложимых подобъектов инъективных объектов в абелевых категориях, распространенную Атьей ([1] или [3]) на произвольные объекты абелевой категории с некоторым условием конечности.

Ереванский государственный университет Поступила 5.VI.1991

Ս. Հ. ԴԱԼԱՅԱՆ. Օբյեկտի վերջավոր թվով չբերվող ենթաօբյեկտների միավորման տեղբնտաելի վերլուծության միակության մասին (ամփոփում)

Դիտարկվող արդյունքը՝ որոշակի լրացուցիչ պայմանների բավարարող գրոյական մորֆիզմներով կատեգորիայում օբյեկտի՝ վերջավոր թվով չբերվող ենթաօբյեկտների անկրճատելի վերլուծության միակության մասին թեորեմն է, որը ընդգրկում է ինչպես ենթաօբյեկտների ուղիղ գումարին իզոմորֆության, այնպես նաև իզոգենության դեպքերը։

S. H. DALALYAN. *On unequeness of minimal decomposion of object to the unicn of finite number of irreducible subobjects* (summary)

Main result is theorem about uniqueness of minimal decomposition of object to the union of finite number of irreducible subobjects in the category with zero morphisms with some complementary conditions which embrace both cases: the case of isomorphism of direct sum of subobjects and the case of isogenie.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Atiyah M. F.* On the Krull—Schmidt theorem with application to sheaves, Bull Soc. Math. France, 84 (1956), 307—317.
2. *Биркгоф Г.* Теория решеток, М., Наука, 1984.
3. *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов, М., Мир, 1972.
4. *Гретцер Г.* Общая теория решеток, М, Мир, 1982.
5. *Lang S.* Abelian Varieties, Interscience Pub., New York, 1959.
6. *Ringel C.* Diagonalisierungspaare I u II, Math. Z., 117, № 1—4 (1970), 249—266 u 122, № 1 (1971), 10—32.
7. *Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г.* Основы теории категорий, М., Наука, 1974.