

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.64

Г. В. АГЕКЯН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ
ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА-ХОПФА

Пусть задано интегральное уравнение Винера-Хопфа

$$y(x) = \int_0^x K(x-t)y(t)dt + f(x), \quad 1 \leq x < \infty \quad (1)$$

с гладким ядром $K(x) \in L_1(0, \infty)$ и гладкой функцией $|f| \leq \text{const}$.

Очевидно, что для численного решения данного уравнения необходимо, на каком-то этапе решения, перейти приближенно к конечно-мерному случаю, например, от бесконечного интервала интегрирования к конечному (к усеченному уравнению).

Если такая замена сделана на начальном этапе, то задача сводится к численному решению уравнения Фредгольма II рода с разностным ядром на конечном отрезке

$$\tilde{y}(x) = \int_0^N K(x-t)\tilde{y}(t)dt + f(x), \quad 0 \leq x \leq N < +\infty. \quad (2)$$

В предположении однозначной разрешимости уравнения (1), т. е. при $1 - \hat{K}(\xi) \neq 0$, $\xi \in R^1$, ($\hat{K}$ — преобразования Фурье ядра K) при достаточно большом N и уравнения (2) однозначно разрешимо (см. [1]).

Численное решение уравнение (2) можно осуществить разными способами. В работе реализован следующий способ решения уравнения (2). Путем дискретизации уравнение (2) приближенно приведено к алгебраическому уравнению с блочно-теплицевой матрицей, а для решения последнего применен метод блочно-ортонормального разложения, развитый в работе [2].

Поясним, что этот подход к решению теплицевых систем, требующий несколько большего количества операций, чем известный метод Левинсона-Тренча (см. [3]), не требует обязательного для последнего требования невырожденности ведущих (блочных) подматриц. Метод реализован на конкретном уравнении

$$y(x) = \lambda \int_0^x e^{-|x-t|} y(t) dt + 1 - 2\lambda + \lambda e^{-x}, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (3)$$

Точным решением данного уравнения является функция $y(x) \equiv 1$. При $\lambda < 1/2$ уравнение, как легко проверить, однозначно разрешимо. Заменим это уравнение урезанным:

$$\tilde{y}_N(x) = \lambda \int_0^N e^{-[x-t]} \tilde{y}_N(t) dt + 1 - 2\lambda + \lambda e^{-x}. \quad (4)$$

Для дискретизации в m точках ($m=50; 100; 150; 200$) применена формула Гаусса (см. [4]) с дискретизацией в точках $t_1 = \frac{2N}{m}v$,

$$t_j = \left(1 - \frac{2N}{m}\right)v, \quad t_j = t_{j-2} + \frac{2N}{m} \quad (j > 2), \quad \text{где } v = 1/2 - \sqrt{3/6}.$$

Точность данного алгоритма равна $O(h^4)$ ($h = \frac{2N}{m}$, $m \rightarrow \infty$), сложность — $43,5 m^2 + O(m)$. Точное решение уравнения (4) следующее ($\lambda < 1/2$):

$$\tilde{y}_N(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x} + 1,$$

где

$$C_1 = \frac{(\mu + 1)^2 (\mu - 1)}{(\mu + 1)^2 e^{\mu N} - (\mu - 1)^2 e^{-\mu N}},$$

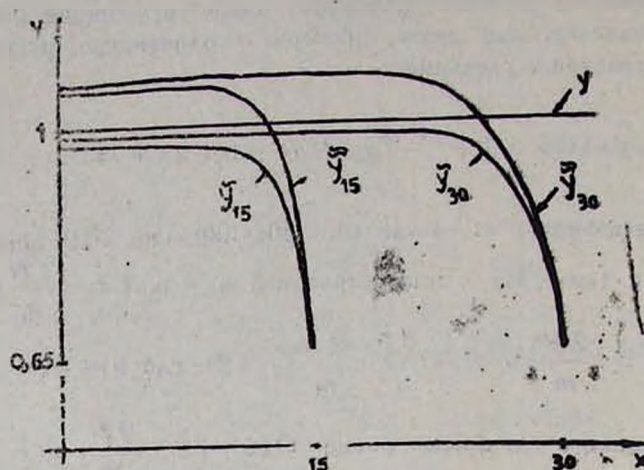
$$C_2 = \frac{(\mu - 1)^2 (\mu + 1)}{(\mu + 1)^2 e^{\mu N} - (\mu - 1)^2 e^{-\mu N}}, \quad \mu = \sqrt{1 - 2\lambda}.$$

Нетрудно видеть, что при $\lambda < 1/2$ $x \rightarrow N$ (в предположении $N \gg 1$) $\tilde{y}_N(x) \rightarrow \mu$. Как видим наибольшее отклонение от решения (1) $y_N(x) \equiv 1$ наблюдается в окрестности граничной точки $x = N$.

Ниже изображены графики функций $y(x) \equiv 1$ (точное решение уравнения (3)), $\tilde{y}_N(x)$ (решение уравнения (4)) и $\tilde{y}_N(x)$ (численное решение уравнения (4)) для $\lambda=0,3$ и $N=15; 30$. Шаг дискретизации равен 0,3. Заметим, что для наглядности показан лишь качественный характер графиков, масштаб по оси y растянут примерно в 75 раз по отношению к масштабу по оси x , расстояние между графиками несколько искажено (увеличено).

Как видим $\tilde{y}_N(x)$ является хорошим приближением $\tilde{y}_N(x)$ (средняя относительная погрешность в данном случае составляет для $N=15$ и $N=30$ соответственно $2,2614 \cdot 10^{-2}$ и $2,3474 \cdot 10^{-2}$). Но сдвиг от $y(x)$ и для $\tilde{y}_N(x)$ и для $\tilde{y}(x)$ начинает возрастать при приближении точки x к N и достигает примерно величины 0,35. Сравнение функций $y(x)$ и $\tilde{y}_N(x)$ уже дает среднюю относительную погрешность для $N=15$ и $N=30$, соответственно $8,0126 \cdot 10^{-2}$ и $5,9203 \cdot 10^{-2}$.

Отметим, что в данном случае увеличение значения N не уменьшает сдвига функции $\tilde{y}_N$ от функции $y(x)$ в точке $x=N$. Это ожидаемо,



так как такой результат верен для функции $\tilde{y}_N(x)$, к которой при $N \rightarrow \infty$ стремится $\tilde{y}(x)$.

Рассмотрим зависимость поведения функции $\tilde{y}_N(x)$ от числа точек дискретизации m как по отношению $y(x)$, так и по отношению $\tilde{y}_N(x)$. В нижеследующей таблице через δ_1 обозначена среднеквадратическая относительная величина разности $\tilde{y}_N - y_N$ на отрезке $[0, N]$, при $N=15; 30$, через δ_2 — разности $y - \tilde{y}_N$.

$N \backslash m$	15		30	
	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2
50	$9,5598 \cdot 10^{-2}$	$1,0488 \cdot 10^{-1}$	$5,2637 \cdot 10^{-1}$	$5,1431 \cdot 10^{-1}$
100	$2,2614 \cdot 10^{-2}$	$8,0126 \cdot 10^{-2}$	$9,9675 \cdot 10^{-2}$	$1,0423 \cdot 10^{-1}$
150	$9,9564 \cdot 10^{-3}$	$8,1766 \cdot 10^{-2}$	$4,2365 \cdot 10^{-2}$	$6,5251 \cdot 10^{-2}$
200	$5,5832 \cdot 10^{-3}$	$8,2773 \cdot 10^{-2}$	$2,3474 \cdot 10^{-2}$	$5,9203 \cdot 10^{-2}$

Таким образом, при применении квадратурных формул высокой точности (в данном случае формулы Гаусса точности $O(h^4)$, h — шаг дискретизации) нет нужды для решения уравнения Винера-Хопфа брать слишком малый шаг дискретизации, поскольку уже решение $\tilde{y}_N$ усеченного уравнения отличается от точного. Можно рекомендовать также при необходимости нахождения решения уравнения (1) на отрезке $[0, A]$ брать N несколько больше A . Строго говоря, наличие явления наибольшего отклонения в окрестности конечной точки $x=N$ будет проверено нами в дальнейшем на численных экспериментах с ядрами K различных типов (если не удастся доказать это теоретически).

В заключение заметим, что при $\|K\|_{L_1} < 1$ полученное численное решение y можно уточнить обычным итерационным методом, полагая $y(x) = f(x)$, $x > N$. Скажем, в рассмотренном численном примере можно было ожидать уменьшения ошибки при однократной итерации в 0,6 раз. Реально улучшение при численном обсчете соответствовало уменьшению ошибки примерно в 0,8 раз.

Институт математики АН

Армения

Поступила 6. VIII. 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, М., Наука, 1971.
2. Г. В. Азекян, А. Б. Нерсисян. Блочнo-ортогональное разложение матриц теплоцва типа и быстрое решение некоторых интегральных уравнений. Деп. в Арм.НИИИТИ № 64-Ар.89.1989.
3. В. В. Воеводин, Е. Е. Тиртышников. Вычисления с теплоццевыми матрицами, В кн.: Вычислительные процессы и системы, Вып. 1. М., Наука, 1983, 124—267.
4. И. П. Мысовских. Лекции по методам вычислений. М., Физматгиз, 1962.