ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 2, 1991 Математика

УДК 517.9

В. А. ДЕРКАЧ, М. М. МАЛАМУД

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ КЛАССА ФУНКЦИЙ КРЕЙНА-СТИЛТЬЕСА

Введение

В работе [1] М. Г. Крейн ввел класс функций Стилтьеса S. Впоследствии класс S изучался и использовался им в его исследованиях по проблеме Стилтьеса, теории спектральных функций струны и др., см. [1—6].

Авторами в [7] были введены более широкие классы оператор-функций $S_H^{\pm x}$ (см. определение в § 1), которые в формуле Крейна для обобщенных резольвент (см. [1, 8]) соответствуют самосопряженным расширениям (с выходом из основного пространства) неотрицательного оператора $A \geqslant 0$, имеющим на полуоси $(-\infty, 0)$ в точности x собственных чисел с учетом кратности (см. теоремы 5, 8 в [7]).

В настоящей работе дается описание оператор-функций $F(z) \in S_H^{\pm}$ в терминах их нулей и «полюсов». Наибольшую трудность представляет случай неограниченных оператор-функций, которые в отличие от функций того же класса, но со значениями в H, не обязательно конечно-мероморфны на $(-\infty, 0)$, могут не быть монотонными внутри интервала голоморфности и т. д. (см. примеры в § 4).

В работе авторов [9] дано применение полученных результатов к описанию обобщенных резольвент эрмитова оператора с лакунами, проблеме моментов и др.

Основные результаты статьи анонсированы в [10].

В работе используются следующие обозначения: H —гильбертово пространство; $[H]$ —совокупность ограниченных линейных операторов в H; $\mathbf{G}(H)$ —совокупность замкнутых линейных операторов A в H с плотной областью определения $D(A)$; $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ — спектр и резольвентное множество оператора A; $\sigma_p(A)$ и $\sigma_c(A)$ — точечный и непрерывный спектры оператора A; $E_A(\lambda) = E_A(\lambda - 0)$ и $E_E(a, b)$ — спектральная функция и спектральный проектор оператора $A = A^*$; $\mathbf{C}_+$ $(\mathbf{C}_-)$ — открытая верхняя (нижняя) полуплоскость.

Мы признательны М. Г. Крейну за внимание к работе.

§ 1. Определение и простейшие свойства оператор-функции классов $S^{\pm x}$

Определение 1. Оператор-функцию $F(z) = F^*(\bar{z})$ называют неванлинновой [4] или R-функцией [5, 6] и относят к классу R_H, если она голоморфна в $\mathbf{C}_+ \cup \mathbf{C}_-$ со значениями (при $z \in \mathbf{C}_+$) во множестве максимальных диссипативных операторов из $\mathbf{G}(H)$.

Совокупность R_H, пополненную несобственными (см. [8, 11]) элементами, обозначим $\widetilde{R}_H$. Таким образом, $\widetilde{R}_H$ — совокупность функций $\theta(z)=\theta^*(\bar{z})$, голоморфных в $\mathbf{C}_+\cup\mathbf{C}_-$, со значениями (при $z\in\mathbf{C}_+$) во множестве максимальных диссипативных линейных отношений в H. Как известно (см. [11]) неопределенная часть отношения $\theta(z)$ не зависит от z и отношение $\theta(z)$ представляется в виде

$$\theta(z)=\{\langle h_1,\ F_1(z)h_1+h_2\rangle:\ h_1\in D(F_1(z)),\ h_2\in H_2\},\tag{1}$$

где $H=H_1\oplus H_2$, $F_1(z)\in R_{H_1}$.

Следующие хорошо известные свойства оператор-функций класса R_H мы сформулируем в виде предложения.

Предложение 1. *Пусть* $F(z)\in R_H$, $z_0\in\mathbf{C}_+$. *Тогда*:

1) $\alpha=\bar{\alpha}\in\rho(F(z_0))\Rightarrow\alpha\in\rho(F(z))\ \forall z\in\mathbf{C}_+$;

2) $\alpha=\bar{\alpha}\in\sigma_p(F(z_0))\Rightarrow\alpha\in\sigma_p(F(z))\ \forall z\in\mathbf{C}_+$, $\ker(F(z)-\alpha)=$ $=\ker(F(z_0)-\alpha)$;

3) $\alpha=\bar{\alpha}\in\sigma_c(F(z_0))\Rightarrow\alpha\in\sigma_c(F(z))\ \forall z\in\mathbf{C}_+$;

4) $F(z_0)\in[H]\Rightarrow F(z)\in[H]\ \forall z\in\mathbf{C}_+$;

5) $h_j\in\ker(F(z_0)-\alpha_j)$, $(j=1,2)$ и $\alpha_1=\bar{\alpha}_1\neq\alpha_2=\bar{\alpha}_2\Rightarrow h_1\perp h_2$.

Определение 2 ([12]). Оператор-функцию $Q(z)=Q^*(\bar{z})$, голоморфную в $(\mathbf{C}_+\cup\mathbf{C}_-)\setminus\sigma_1$, где σ_1 — конечное множество, и принимающую значения в $[H]$, относят классу $N_\varkappa(H)$, если $\forall n\in Z_+$, $z_j\in\mathbf{C}_+$, $h_j\in H(1\leqslant j\leqslant n)$ квадратичная форма

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{(Q(z_j)h_j,\ h_k)-(h_j,\ Q(z_k)h_k)}{z_j-\bar{z}_k}\xi_j\bar{\xi}_k$$

имеет не более $\varkappa$ отрицательных квадратов и хотя бы для одного набора n, z_j, $h_j(1\leqslant j\leqslant n)$ точно $\varkappa$ отрицательных квадратов.

Определение 3. ([7]). Пусть $\varkappa\in Z_+$. Оператор-функцию $F(z)\in R_H$ со значениями в $[H]$ будем относить к классу $S_H^{+\varkappa}$ (соответственно $S_H^{-\varkappa}$), если $zF(z)\in N_\varkappa$ (соответственно $z^{-1}F(z)\in N_\varkappa$); произвольную оператор-функцию $F(z)\in R_H$ отнесем к классу $S_H^{\pm\varkappa}$, если $\forall n\in Z_+$, $\forall z_j\in\mathbf{C}_+$, $\forall h_j\in D(F(z_j))(1\leqslant j\leqslant n)$ квадратичная форма

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{z_j^{\pm1}(F(z_j)h_j,\ h_k)-\bar{z}_k^{\pm1}(h_j,\ F(z_k)h_k)}{z_j-\bar{z}_k}\xi_j\bar{\xi}_k\tag{2}$$

имеет не более $\varkappa$, и хотя бы для одного набора n, z_j, h_j точно $\varkappa$ отрицательных квадратов. Пополняя классы $S_H^{\pm\varkappa}$ несобственными элементами (1), получим классы $\widetilde{S}_H^{\pm\varkappa}$.

В случаях, не вызывающих недоразумения, будем писать $S^{\pm\varkappa}$ вместо $S_H^{\pm\varkappa}$, а при $\varkappa=0$ — $S^{\pm}$ вместо $S^{\pm0}$.

Пример. Если $F_j(z)\in S_H^{\varkappa_j}(j=1,2)$, то $F_1(z)\oplus F_2(z)\in S_{H\oplus H}^{\varkappa_1+\varkappa_2}$.

Так

$$F(z)=\begin{pmatrix} z+3 & 0 \\ 0 & (z+3)^{-1}\end{pmatrix} \in S^{1}\cap S^{-1}. \tag{3}$$

Определение 4. ([1, 4—6]). Функцию $F(z)$ относят к классу $(S)_H$, $((S)_H^{-1})$ Крейна—Стилтьеса, если $F(z)\in R_H$, голоморфна в $\mathbf{C}\setminus \mathbf{R}_+$ и $F(x)\geqslant 0$ $(F(x)\leqslant 0)$ при $x<0$.

Замечание 1. Если $F(z)\in R_H$ принимает значения в $[H]$ и допускает голоморфное продолжение* в окрестность точки $x_0=\bar{x}_0\in\mathbf{R}$, то в условии (2) можно полагать $z_k=x_0$, заменяя соответствующие слагаемые в (2) на слагаемые вида (4) (или (5) для функции класса $S_H^{-\varkappa}$ соответственно)

$$((x_0F'(x_0)+F(x_0))h_j,\ h_j)\,|\xi_j|^2, \tag{4}$$

$$x_0^{-2}(x_0F'(x_0)-F(x_0))\,h_j,\ h_j)\,|\xi_j|^2. \tag{5}$$

Отметим очевидные эквивалентности:

$$F(z)\in \tilde{S}_H^{\varkappa}\Leftrightarrow -F^{-1}(z)\in \tilde{S}_H^{-\varkappa}; \tag{6}$$

$$F(z)\in S_H^{\varkappa}\Leftrightarrow -F(1/z)\in S_H^{-\varkappa}; \tag{7}$$

$$F(z)\in \tilde{S}_H^{\varkappa}\Leftrightarrow -F(1/z)\in \tilde{S}_H^{-\varkappa}. \tag{8}$$

Предложение 2. *Если* $F(z^{\varkappa})\in(S_H^{\varkappa}(F(z)\in S_H^{\varkappa})$ *и* $s_0\in\mathbf{C}_+$, *то*

1) $\operatorname{cord}\{\sigma_p(F(z_0))\cap(-\infty,0)\}\leqslant\varkappa$ $(\operatorname{cord}\{\sigma_p(F(z_0))(\cap 0+\infty)\}\leqslant\varkappa)$, (9)

2) $\sigma_c(F(z_0))\cap(-\infty,0=\varnothing$ $\qquad(\sigma_c(F(z_0))\cap(0,+\infty)=\varnothing)$;

3) *Если же* $F(z)$ *голоморфна о точке* $x_0=\bar{x}_0<0$, *то*

$\dim E_{F(x_0)}(-\infty,0)H<\varkappa$ $(\dim E_{F(x_0)}(0,+\infty)H\leqslant\varkappa)$.

Доказательство. 1) Допустим, что $\bar{\alpha}_k=-\alpha_k\in\sigma_p(F(z_0))\cap n(-\infty,0)$, $h_k\in\ker(F(z_0)-\alpha_k)$, причем $k=1,2,\cdots,\varkappa+1$; $\alpha_k\neq\alpha_j$, при $k\neq j$, $\|h_k\|=1$. Тогда в силу предложения 1, $h_k\perp h_j\,(k\neq j)$. Полагая в (2) $n=\varkappa+1$, $z_j=z_0$ $(1\leqslant j<\varkappa+1)$, получим, что квадратичная форма

$$\sum_{1<j,\ k<\varkappa+1}(\alpha_j z_0-\alpha_k\bar{z}_0)(z_0-\bar{z}_0)^{-1}(h_j,h_k)\,\xi_j\bar{\xi}_k=\sum_{1<j<\varkappa+1}\alpha_j|\xi_j|^2\leqslant 0$$

имеет $\varkappa+1$ отрицательный квадрат, что противоречит условию $F(z)\in S_H^{\varkappa}$.

2) Если $\alpha\in\sigma_c(F(z_0))\cap(-\infty,0)$, то в силу свойства 3) предложения 1, $\alpha\in\sigma_c(F(z))\cap(-\infty,0)$ $(\forall z\in\mathbf{C}_+)$. Пусть h_j — ортнормированная квазисобственная последовательность оператора $F(i)$, соответствующая числу α, т. е. $F(i)h_j=\alpha h_j+g_j$ $(j=1,2,\cdots))$ $\lim\limits_{j\to\infty}\|g_j\|=0$.

Полагая в квадратичной форме (2) $n=\varkappa+1$, $z_1=\cdots=z_{\varkappa+1}=i$, получим для нее выражение

---

* Как следует из теорем 1, 2, 4, $F(z)\in S^{\pm\varkappa}$ голоморфна во всех, кроме конечного ($<\varkappa$) числа точек левой полуоси.

$$\sum_{1<j,\,k<\varkappa+1}\left\{a\delta_{jk}+\frac{1}{2}g_{j+N},\ h_{k+N})+\frac{1}{2}\ h_{j+N},\ g_{k+N})\right\}\xi_j\ \xi_k,$$

из которого видна ее отрицательная определенность при достаточно больших N. Противоречие.

3) Пусть вначале $F(z)\in S^{+\varkappa}$ и принимает значения в $[H]$. Допустим, что $\alpha_k\in\sigma_p(F(x_0))\cap(-\infty,\ 0)$ и $0\neq h_k\in\ \ker\ (F(x_0)-\alpha_k)$ $(k=1,\ 2,\cdots,\ \varkappa+1)$. Полагая в (2) и (4) $n=\varkappa+1$, $z_j=x_0(j=1,\ 2,\cdots,$ $\varkappa+1)$ и учитывая, что $h_j\perp h_k(j\neq k)$ и $F'(x_0)>0$ при $x_0<0$, получим

$$\sum_{1<j,\,k<\varkappa+1}((x_0F'(x_0)+F(x_0))\,h_j,\ h_k)\,\xi_j\,\bar{\xi}_k=$$

$$=\sum_{1<j,\,k<\varkappa+1}x_0(F'(x_0)\,h_j,\,h_k)\,\xi_j\,\bar{\xi}_k+\sum_{1<k<\varkappa+1}\alpha_k\|h_k\|^2\,|\xi_k|^2<0.$$

Последнее неравенство противоречит условию $F(z)\in S^{+\varkappa}$. Утверждение $\sigma_c F(x_0))\cap(-\infty,\ 0)=\varnothing$ доказывается аналогично.

Общий случай оператор-функции $F(z)\in S_H^{+\varkappa}$, для которой $\overline{F(z_0)}\in$ $\overline{\in}[H]$, $z_0\in\mathbf{C}_+$ легко свести к изученному. Рассмотрим для этого наряду с $F(z)$ оператор-функцию $\Phi_\varepsilon(z)=-(F(z)-\varepsilon/z)^{-1}\in S^{-\varkappa}$ при $\varepsilon>0$ и уже принимающую значения в $[H]$. Утверждение 3) следует теперь из очевидной эквивалентности: $\lambda\in\sigma_i(F(x_0))\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=-(\lambda-\varepsilon/x_0)^{-1}\in$ $\in\sigma_i(\Phi_\varepsilon(x_0))$, $(i=p,\ c)$.

Замечание 2. Как видно из доказательства, вместо (9) получено боле сильное неравенство

$$\sum_{\alpha<0}\dim\ker(F(z)-\alpha)<\varkappa.$$

Предложение 3. *Классы* $S_H^{+0}=S_H^+$ *и* $S_H^{-0}=S_H^-$ *совпадают с классами Крейна—Стилтьеса* $(S)_H$ *и* $(S)_H^{-1}$ *соответственно.*

Доказательство. Докажем лишь совпадение классов S_H^+ и $(S)_H$. При $\varkappa=0$ формы (2) неотрицтельны, что в силу неравенства Шварца-Пика эквивалентно включению $zF(z)\in R_H$. Если $F(z)$ принимает значения в $[H]$, то в силу критерия* М. Г. Крейна [6] $F(z)\in$ $\in(S)_H\Leftrightarrow F(z)\in(R_H,\ zF(z)\in R_H$. Установим указанную эквивалентность в общем случае.

Если $F(z)\in(S)_H$, то $F(x)\geqslant0\ \forall x<0$ и, поэтому, $\forall x<$ $0\in\rho(F(x)-\varepsilon/x)$, $\varepsilon>0$. В силу критерия голоморфности неограниченной оператор-функции $F_\varepsilon(z)=F(z)-\varepsilon z^{-1}$ (см. [13, с. 461]) $0\in\rho(F_\varepsilon(z)$ при достаточно малых $(z-x)$ и, следовательно, в силу предложения 1 $F_\varepsilon^{-1}(z)\in[H]\ \forall z\in\mathbf{C}_+\setminus\mathbf{R}_+$. В силу критерия М. Г. Крейна: $-F_\varepsilon(z)^{-1}\in$ $\in(S)_H^{-1}\Rightarrow z^{-1}F_\varepsilon(z)^{-1}\in R_H\Rightarrow zF(z)\in R_H$, что, как легко видеть, эквивалентно условию $zF(z)\in R_H$.

Установим обратную импликацию: $F(z)\in S_H^+\Rightarrow F(z)\in(S)_H$. В силу предложения 2 $\forall\varepsilon>0$ $0\in\rho(F(z)+\varepsilon)$ $\forall z\in\mathbf{C}_+$, т. е. $F(z)+\varepsilon)^{-1}\in$

* Этот критерий доказан в [3, 6] лишь в скалярном случае ($\dim H=1$). Но его доказательство из [6] дословно переносится на оператор-функции $F(z)$ со значениями в $[H]$.

$\in [H]$. Но тогда из условия $zF(z) \in R_H$ следует, что $z(F(z) + \varepsilon) \in \in R_H \Rightarrow -z^{-1}(F(z)+\varepsilon)^{-1} \in R_H$ и в силу критерия М. Г. Крейна — $-(F(z)+\varepsilon)^{-1} \in (S)_H^{-1}$. Таким образом, $F(z)+\varepsilon \in (S)_H$ $\forall \varepsilon > 0$, т. е. $F(z) \in (S)_H$. Предложение доказано.

§ 2. Описание ограниченно-голоморфных оператор-функций классов S_H^{+z}

Займемся описанием множества ограничено-голоморфных в C оператор-функций класса S_H^*, т. е. оператор-функций $F(z) \in S_H^*$ таких, что $\exists z_0 \in C_+$, $F(z_0) \in [H]$. В этом случае $F(z) \in [H]$ $\forall z \in C_+$ и справедливо представление

$$F(z) = A + Bz + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2}\right) d\Sigma(t), \tag{10}$$

в котором $A = A^*$, $B \geqslant 0$; $A, B \in [H]$, а $\Sigma(t)$ — неубывающая оператор-функция, сильно непрерывная слева, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)^{-1} d\Sigma(t) \in [H]. \tag{11}$$

Пусть $F(z)$ голоморфна в интервале $(-\infty, t_0)$, $t_0 < 0$, т. е. носитель меры $d\Sigma(t)$ содержится в $[t_0, +\infty)$. Определим в этом случае конус $K_{-\infty}^{-}(F)$, полагая

$$K_{-\infty}^{-}(F) = \{h \in H: \lim_{x \downarrow -\infty} (F(x)h, h) < 0\} \tag{12}$$

и обозначим $\varkappa_{-\infty}^{-}(F)$ — максимальную размерность подпространства $L \subset K_{-\infty}^{-}(F) \cup \{0\}$. Легко видеть, что

$$\varkappa_{-\infty}^{-}(F) = \lim_{x \downarrow -\infty} \dim E_{F(x)}(-\infty, 0) \tag{13}$$

и, если $\varkappa_{-\infty}^{-}(F) < \infty$, то при достаточно больших $|x|$

$$\varkappa_{-\infty}^{-}(F) = \dim E_{F(x)}(-\infty, 0). \tag{14}$$

Пусть H_1 — такое подпространство в H, что $H_1 \cap K_{-\infty}^{-} = \varnothing$. Тогда, как следует из (10), $H_1 \subset \ker B$ и $\forall h \in H_1$ выполнены условия

$$\int_{t_0}^{\infty} (1+|t|)^{-1} d(\Sigma(t)h, h) < \infty, \tag{15}$$

$$\lim_{x \downarrow -\infty} (F(x)h, h) = (Ah, h) - \int_{t_0}^{\infty} \frac{t}{1+t^2} d(t)h, h) = (A_1 h, h) \geqslant 0 \tag{16}$$

и интегральное представление (10) принимает $\forall h \in H_1$ вид

$$(F(z)h, h) = (A_1 h, h) + \int_{t_0}^{\infty} (t-z)^{-1} d(\Sigma(t)h, h). \tag{17}$$

Число $\varkappa_{-\infty}^{-}$ $(<\infty)$ имеет простой спектральный смысл. Так как $\forall x<t_0\ F(x)<F(t_0)$, то при $\lambda>\|F(t_0)\|$ оператор-функция $(F(x)-\lambda)^{-1}<0$ и является монотонно убывающей. Поэтому существует $s-\lim_{x\downarrow-\infty}(F(x)-$ $-\lambda)^{-1}=R'(\lambda)$, являющийся псевдорезолевентной, нульпространство $H'=\ker R'(\lambda)$ и область значений $H''=R'(\lambda)H$ которой не зависят от λ (см. [13]). Пусть $F(-\infty)=R'(\lambda)|_{H''})^{-1}+\lambda I_{H''}$. Тогда $\varkappa_{-\infty}^{-}=$ $=\dim H'+\dim E_{F(-\infty)}(-\infty,\ 0)$.

Определение 5. (см. [14, 15]). Точка t_0 называется полюсом (нулем) первого порядка оператор-функции $F(z)$, голоморфной в проколотой окрестности точки t_0, если для всех вектор-функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, голоморфных в окрестности точки t_0 и удовлетворяющих условиям

$$F(z)\varphi(z)=\psi(z)\ (F(\psi(z)=\varphi(z)).\ \varphi(t_0)=0,\ \psi(t_0)\neq 0,$$

точка t_0 является для $\varphi(z)$ нулем первого порядка. При этом ее полюсной кратностью $\varkappa_0$ (нулевой кратностью r_0) называется размерность линеала $\{\chi(t_0):\chi(z)=(t_0-z)^{-1}\varphi(z)\}$. Если $F(z)$ голоморфна в точке t_0, то $r_0=\dim\ker F(t_0)$.

Подчеркнем, что $F(z)$ не определена, вообще говоря, в точке t_0 и может иметь в ней одновременно нуль и полюс. Так, в примере 3 § 1, $\varkappa_0(-3)=r_0(-3)=1$.

Следующее предложение, используемое в теореме 1, получено в [12] в скалярном случае, но дословно обобщается на случай оператор-функций.

Предварительно напомним, что оператор-функция $Q(z)\in N_\varkappa(H)$ может иметь (см. [12]) в $\mathbf{C}_+\cup\mathbf{C}_-$ не более конечного числа полюсов. Спектром $\sigma(Q(z))$ оператор-функции $Q(z)\in N_\varkappa$ называют множество, состоящее из ее полюсов и множества точек вещественной оси дополнительного к объединению интервалов, через которые $Q(z)$ голоморфно продолжается.

Предложение 4. ([12]). Если $Q_j(z)\in N_{\varkappa_j}(H)$, $j=1,\ 2$; $\sigma(Q_1(z))\cap$ $\cap\sigma(Q_2(z))=\varnothing$, то $Q_1(z)+Q_2(z)\in N_{\varkappa_1+\varkappa_2}(H)$.

Теорема 1. *Пусть* $F(z)\in R_H$ *и принимает значения в* $[H]$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. $F(z)\in S_H^\varkappa$;

2) $F(z)$ *голоморфна на левой полуоси за исключением конечного числа* $p\ (\leqslant\varkappa)$ *полюсов* $t_j\ (t_1<t_2<\cdots<t_p<0)$ *первого порядка и конечной полюсной кратности* $\varkappa_j=\varkappa_j(F)$, *причем*

$$\varkappa=\sum_{1\leqslant j\leqslant p}\varkappa_j(F)+\varkappa_{-\infty}^{-}(F). \tag{18}$$

Доказательство. 1°. Рассмотрим ядро квадратичной формы (2)

$$k(z,\ \zeta)=\frac{zF(z)-\bar\zeta F^*(\zeta)}{z-\bar\zeta}. \tag{19}$$

Форма (2) имеет $\varkappa$ отрицательных квадратов в точности тогда, когда $\forall z_j\in\mathbf{C}_+\ (1\leqslant j\leqslant n+1)$ действующий в H^{n+1} блочный оператор $K=(K(z_j,\ z_k))_{j,k=1}^{n+1}$, где

$$K(z_j, z_k) = A + B(z_j + \bar{z}_k) + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{t}{(t - z_j)(t - \bar{z}_k)} - \frac{t}{1+t^2} \right] d\Sigma(t) \quad (20)$$

имеет не более $\varkappa$, а при некоторых $\{z_j\}_{j=1}^{n+1}$ — точно $\varkappa$ отрицательных собственных значений, или, когда то же самое справедливо для оператора $G = M^*KM$, где

$$M = \begin{vmatrix} I_H & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_H \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots & I_H & 0 \\ -I_H & -I_H \cdots & -I_H & I_H \end{vmatrix}.$$

Оператор G, как следует из (20), имеет вид

$$G = \left| \begin{array}{c|c} \tilde{G} & \begin{array}{c} B(z_1 + z_{n+1}) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_1 - z_{n+1}}{t - z_1} \frac{t\, d\Sigma(t)}{|t - z_{n+1}|^2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ B(z_n + z_{n+1}) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_n - z_{n+1}}{t - z_n} \frac{t\, d\Sigma(t)}{|t - z_{n+1}|^2} \end{array} \\ \hline * & K(z_{n+1}, z_{n+1}) \end{array} \right|, \quad (21)$$

где

$$\tilde{G} = (G_{jk})_{j,k=1}^{n} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_j - z_{n+1}}{t - z_j} \cdot \frac{\bar{z}_k - \bar{z}_{n+1}}{t - \bar{z}_k} \cdot \frac{t\, d\Sigma(t)}{|t - z_{n+1}|^2} \right)_{j,k=1}^{n}. \quad (22)$$

2°. Пусть $F(z) \in S_H^{\varkappa}$. Покажем, что функция $\Sigma(t)$ из (10) имеет лишь конечное число $p\ (\leqslant \varkappa)$ точек роста на полуоси $(-\infty, 0)$. Действительно, допустим, что существуют точки $t_j \in (-\infty, 0)$ и векторы $h_j \in H (1 \leqslant j \leqslant p)$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_j)^{-2} d(\Sigma(t) h_j, h_j) = \infty. \quad (23)$$

Разобьем отрицательную полуось на непересекающиеся интервалы $\Delta_j\ (\ni t_j)$ и выберем константу $C > 0$ так, чтобы $\forall j \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, $j \leqslant p$

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \Delta_j} \left| \frac{t_j - i}{t - t_j} \right|^2 d(\Sigma_1(t) h_j, h_j) \leqslant C, \; d\Sigma_1(t) = \frac{|t|\, d\Sigma(t)}{1 + t^2}.$$

Тогда $\forall N \geqslant 2C$ можно выбрать точки $z_j = t_j + i\varepsilon_j\ (0 < \varepsilon_j < 1), 1 \leqslant j \leqslant p$ так, что

$$\int_{\Delta_j} |\varphi_j(t)|^2 d(\Sigma_1(t) h_j, h_j) = N \left(\varphi_j(t) = \frac{z_j - i}{t - z_j} \right).$$

Положив в (22) $z_{p+1}=i$, получим

$$(G_{jj}h_j,\ h_j)=\int\limits_{\mathbf{R}}|\varphi_j(t)|^2 t(1+t^2)^{-1}\,d(\Sigma(t)h_j,\ h_j)\leqslant-(N-C)\leqslant-\frac{N}{2} \tag{24}$$

$$(G_{jk},\ h_j,h_k)=\left|\int\limits_{\mathbf{R}}\varphi_j(t)\overline{\varphi_k(t)}\,d(\Sigma_1(t)\ h_j,\ h_k)\right|. \tag{25}$$

Разбивая интеграл в (25) на интегралы J_j, J_k, J_{jk} по множествам Δ_j, Δ_k, $\mathbf{R}\diagdown(\Delta_j\cup\Delta_k)$ и оценивая каждый, получим

$$J_j<\left(\int\limits_{\Delta_j}|\varphi_j(t)|^2\,d(\Sigma_1(t)h_j,\ h_j)\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\Delta_j}|\varphi_k(t)|^2\,d(\Sigma_1(t)h_k,\ h_k)\right)^{1/2}\leqslant(NC)^{1/2}. \tag{26}$$

Аналогично

$$J_k\leqslant(NC)^{1/2},\ J_{jk}\leqslant C\leqslant(NC)^{1/2}.$$

Таким образом, при $j\neq k$

$$|(G_{jk}h_j,\ h_k)|\leqslant 3(NC)^{1/2} \tag{27}$$

и поэтому при $r<m$ и достаточно большом N главный минор $G_r=G\begin{pmatrix}1, & 2,\cdots, & r\\ 1, & 2,\cdots, & r\end{pmatrix}$ матрицы $((G_{jk},\ h_j,\ h_k))_{j,k=1}^{p}$ имеет знак $(-1)^r$. В силу критерия Якоби матрица $((G_{jk},\ h_j,\ h_k))_{j,k=1}^{p}$ отрицательно определена и оператор G имеет не менее p отрицательных собственных значений, что возможно лишь при условии $p\leqslant\varkappa$.

Так же, как и в [6], из формулы

$$\operatorname{Im}F(\tau+i\eta)=\eta\left(B+\int\limits_{\mathbf{R}}\frac{d\Sigma(t)}{(t-\tau)^2+y^2}\right) \tag{28}$$

следует, что $\operatorname{Im}F(\tau+i\eta)\to0$ при $\eta\to0$ и $\tau<0$, $\tau\neq t_k$, $1\leqslant k\leqslant p$ Применяя формулу обращения

$$\Sigma(\tau_2)-\Sigma(\tau_1)=\frac{1}{\pi}\lim_{s\to0}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\operatorname{Im}F(\tau+is)\,d\tau, \tag{29}$$

получим, что $\Sigma(t)$—постоянная на интервалах полуоси $(-\infty,\ 0)$, не содержащих точек t_k, $1\leqslant k\leqslant m$. Следовательно, оператор-функция допускает представление

$$F(z)=A_0+Bz+\sum_{j=1}^{p}\frac{A_j}{t_j-z}+\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{t}{1+t^2}\right)d\Sigma(t), \tag{30}$$

в котором $A_j=\Sigma(t_j+0)-\Sigma(t_j)>0$, $A_0=A-\sum\limits_{j=1}^{p}t_jA_j(1+t_j^2)^{-1}$.

3°. Установим неравенства $\varkappa_j(F)<\varkappa(j<p)$. Из представления (30) и принципа минимакса видно, что $\dim E_{F(x)}(-\infty,\ 0)H\geqslant\dim A_jH$ при $x>t_j$ и достаточно близких к t_j. Осталось применить предложение 2. Аналогично неравенство $\varkappa_{-}^{-}(F) \leqslant \varkappa$ вытекает из равенства (13) и предложения 2.

4°. Остается доказать эквивалентность условия $F(z) \in S_H^{\varkappa}$ равенству (18). Заметим вначале, что условие 1) можно переписать в виде $Q(z) := zF(z) \in N_{\varkappa}(H)$, а оператор-функция $Q(z)$ допускает представление

$$Q(z) = \sum_{j=0}^{p} Q_j(z), \tag{31}$$

в котором $Q_j(z) = z(t_j - z)^{-1} A_j \ (j = 1, 2, \cdots, p)$,

$$Q_0(z) = A_0 z + Bz^2 + z \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\Sigma(t). \tag{32}$$

Легко видеть, что $Q_j(z) = -A_j + t_j (t_j - z)^{-1} A_j \in N_{\varkappa_j}$, $\sigma(Q_j(z)) = \{t_j\}$, $j \geqslant 1$.

Далее, так как $F_0(z) = z^{-1} Q_0(z) \in S^{\varkappa_0}$, то $Q_0(z) \in N_{\varkappa_0}$, где $\varkappa_0 \leqslant \varkappa$. Докажем, что $\varkappa_0 = \varkappa_{-}^{-}$. Для доказательства неравенства $\varkappa_0 \leqslant \varkappa_{-}^{-}$ следует установить, что ядро $K_0(z, \zeta) = (Q_0(z) - Q_0^*(\zeta))(z - \bar{\zeta})^{-1}$ имеет не более $\varkappa_{-}^{-}$ отрицательных квадратов. Это эквивалантно тому, что блочный оператор $K_0 = (K_0(z_j, z_k))_{j,k=1}^{n}$ имеет для всякого набора $z_j \in \mathbf{C}_+ (1 \leqslant j \leqslant n+1)$ не более $\varkappa_{-}^{-}$ отрицательных собственных значений. Последнее утверждение достаточно (см. п. 1°) доказать для блочного оператора

$$G^0 = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{G}^0 & \begin{array}{c} B(z_1 + z_{n+1}) + \int_0^{\infty} \frac{z_1 - z_{n+1}}{t - z_1} \cdot \frac{t}{|t - z_{n+1}|^2} \, d\Sigma(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ B(z_n + z_{n+1}) + \int_0^{\infty} \frac{z_n - z_{n+1}}{t - z_n} \, \frac{t}{|t - z_{n+1}|^2} \, d\Sigma(t) \end{array} \\ \hline * & K_0(z_{n+1}, z_{n+1}) \end{array} \right), \tag{21'}$$

где

$$\tilde{G}^0 = (G_{jk}^0)_{j,k=1}^{n} \left(\int_0^{\infty} \frac{z_j - z_{n+1}}{t - z_j} \cdot \frac{\bar{z}_k - \bar{z}_{n+1}}{t - \bar{z}_k} \, \frac{t \, d\Sigma(t)}{|t - z_{n+1}|^2} \right)_{j,k=1}^{n}. \tag{22'}$$

Из (12), (28) и (30) вытекает очевидное равенство: $K_{-}^{-}(F) = K_{-}^{-}(F_0)$. Пусть H_1 — подпространство H коразмерности $\varkappa_{-}^{-}$ такое, что $H_1 \cap K_{-}^{-} = \varnothing$. Достаточно показать, что на подпространстве $H^n \oplus H_1 \subset H^{n+1}$ оператор G^0 вида (21′) неотрицателен. Для этого на линеале Z вектор-функции вида

$$h(t) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n+1} \varphi_j(t) h_j \Big(h_j \in H, \ \varphi_j(t) =$$

$$= \frac{z_j - z_{n+1}}{t - z_j}, \ (1 \leqslant j \leqslant n); \ h_{n+1} \in H_1, \ \varphi_{n+1} \equiv 1 \Big)$$

введем квазискалярное произведение, полагая

$$(h^{(1)}(t),\ h^{(2)}(t))_L = \sum_{1 < j,\ k < n+1} \int_0^{\infty} \varphi_j(t)\, \overline{\varphi_k(t)}\, d\,(\Sigma_1(t)\, h_j^{(1)},\ h_k^{(2)}), \tag{33}$$

в котором $d\,\Sigma_1(t) = t|t - z_{n+1}|^{-2} d\Sigma\,(t)$. Интеграл $\int_0^{\infty} d\,(\Sigma_1(t) h_{n+1}^{(1)},\ h_{k+1}^{(2)})$, являющийся последним слагаемым в (33), сходится в силу неравенства (15), имеющего место $\forall h \in H_1$. Теперь с учетом включения $H_1 \subset \ker B$ и соотношений (22′), (33), ясно, что $\forall h_j \in H (1 \leqslant j < n)$ и $h_{n+1} \in H_1$ матрица $((G_{jk}^0 h_j,\ h_k))_{j,k=1}^{n+1}$ представляется в виде суммы двух матриц C_1 и C_2. Здесь C_1 — матрица Грамма (относительно скалярного произведения (33)) системы вектор-функций $\varphi_j(t) h_j \in Z\ (1 \leqslant j \leqslant n+1)$, т. е. $C_1 = ((\varphi_j(t) h_j,\ \varphi_k(t) h_k)_Z)_{j,k=1}^{n+1}$, а матрица C_2 имеет вид

$$C_2 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & (Ah_{n+1},\ h_{n+1}) - \int_0^{\infty} \frac{t}{1+t^2}\, d\,(\Sigma_1(t)\, h_{n+1},\ h_{n+1}) \end{array}\right] \geqslant 0$$

и неотрицательна, в силу (16) $\forall h_{n+1} \in H_1$.

Итак, неравенство $\varkappa_0 \leqslant \varkappa_{-\infty}^{-}(F_0)\, \varkappa_{-\infty}^{-}(F)$ установлено. Обратное неравенство $\varkappa_{-\infty}^{-}(F) = \varkappa_{-\infty}^{-}(F_0) \leqslant \varkappa_0$вытекает из п. 3° и включения $F_0(z) \in S^{\varkappa_0}$. Таким образом, $\varkappa_0 = \varkappa_{-\infty}^{-}(F_0) = \varkappa_{-\infty}^{-}(F)$.

Для завершения доказательства остается заметить, что в силу (32) $\operatorname{supp} \Sigma(t) = \sigma(Q_0(z)) \subset [0,\ \infty)$ и применить предложение 4, из которого и вытекает равенство 18. Теорема доказана.

§ 3. Неограниченные оператор-функции классов $S_H^{\pm\varkappa}$

Напомним, что неравенство $A > B\ (> c_0 I)$ для полуограниченных снизу самосопряженных операторов A и B означает, что $D(\mathrm{T}_A) \subset D(\mathrm{T}_B)$ и $\mathrm{T}_A[f] > \mathrm{T}_B[f]\ \forall f \in D(\mathrm{T}_A)$. Здесь T_A — квадратичная форма, ассоциированная с оператором A, причем $D(\mathrm{T}_A) = D((A - c_0 I)^{1/2})$. Аналогично, неравенство $A = A^* > B = B^*$ для операторов полуограниченных сверху означает, что $D(\mathrm{T}_A) \supset D(\mathrm{T}_B)$ и $\mathrm{T}_A(f) \geqslant \mathrm{T}_B[f]$.

Предложение 5. *Для оператор-функции* $F(z) \in S_H^{-\varkappa}$ $(E(z) \in S_H^{+\varkappa})$ *справедливы утверждения:*

а) $F(z)$ *допускает аналитическое продолжение на отрицательную полуось за исключением конечного числа точек* $a_1 < a_2 < \ldots < a_p < 0$;

б) *существуют точки* * $b_1 < b_2 < \ldots < b_m < 0$ *такие, что в каждом из интервалов* $(-\infty,\ b_1),\ (b_1,\ b_2), \cdots,\ (b_m,\ 0)$ *оператор-функция* $F(z)$ *не только аналитична, но и монотонно возрастает.*

---

* Совокупность $\{b_j\}_1^m$ содержит совокупность $\{a_k\}_1^p$ но, как показывают примеры (см. § 4), вообще говоря, $m > p$, т. е. оператор-функция $F(z) \in S^{-\varkappa}$ может быть голоморфной внутри интервала, не будучи монотонной в нем.

Доказательство: а) Рассмотрим оператор-функцию $\Phi_\varepsilon(z) = -(F(z)+\varepsilon z)^{-1} \in S^{\cdot \varkappa}$ и принимающую значения в $[H]$. На основании теоремы 1 $\Phi_\varepsilon(z)$ допускает голоморфное продолжение в $(-\infty, 0) \setminus \{t_j\}_{j=1}^n$, $(n<\varkappa)$. В каждом из промежутков* $(-\infty, t_1], (t_1, t_2], \cdots, (t_n, 0]$ оператор-функция $\Phi_\varepsilon(z)$ имеет конечное число $(\leqslant \varkappa)$ нулей $a_k (k=1, 2, \cdots, p)$, что следует, например, из предложения 2 и результата из [13, с. 464]. Следовательно, $\forall x \in (-\infty, 0) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{p} a_k\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n} t_j\right)$ существует $\Phi_\varepsilon^{-1}(x) \in G(H)$. Доопределим $F(z)$ в точках указанного множества, полагая

$$F(x) = -\Phi_\varepsilon^{-1}(x) - \varepsilon x. \tag{34}$$

Утверждение а) следует из (34) и критерия голоморфности неограниченной оператор-функции [13, с. 461], если заметить, что в точках t_j, не совпадающих с $a_k \forall k \leqslant n$, функцию $F(x)$ можно доопределить аналогично (34) при подходящем выборе $\varepsilon>0$, а нули $\{a_k\}_1^p$ функции $\Phi_\varepsilon(z)$ не зависят от ε.

б). Рассмотрим скалярную функцию

$$d(x) = \dim E_{\Phi_\varepsilon(x)}(-\infty, 0), \tag{35}$$

определенную $\forall x<0$, $x \neq t_j (1 \leqslant j \leqslant n)$. В силу предложения 2, $d(x)$ конечна, а в силу монотонности $\Phi_\varepsilon(x)$ на интервалах (t_j, t_{j+1}), $1 \leqslant j \leqslant n$ функция $d(x)$ имеет внутри каждого из них лишь конечное число точек разрыва $b'_k (1 \leqslant k \leqslant n_1)$. Поясним, что возможные разрывы $d(x)$ внутри (t_j, t_{j+1}) обусловлены не только прохождением собственных значений $\lambda_k(x) \in \sigma(\Phi_\varepsilon(x)) \cap (-\infty, 0)$ через ноль, но и возможным поглощением их непрерывным спектром соответствующих операторов (см. § 4). Положим $m = n + n_1 \{b_j\}_1^m = \{b'_k\}_1^{n_1} \cup \{t_j\}_1^n$ и покажем, что точки b_j — искомые. Пусть $[x_1, x_2] \subset (b_j, b_{j+1})$, $(1 \leqslant j \leqslant m)$. Так как, согласно предложению 2 отрицательный спектр оператора $\Phi_\varepsilon(x)$ конечен (с учетом кратности) $\forall x \in [x_1, x_2]$, то собсвенные числа $\lambda_j(\Phi_\varepsilon(x)) < 0$, $(1 \leqslant j \leqslant r \leqslant \varkappa)$ непрерывно (и даже аналитически (см. [13, с. 464])) зависят от x. Поэтому $\exists \delta > 0$, что $\lambda_j(\Phi_\varepsilon(x)) < -\delta$, $(\forall x \in [x_1, x_2], \forall j < r)$. Следовательно, $\exists C > 0$, что $CI_H - F(x) > 0$ $\forall x \in [x_1, x_2]$. Значит $\exists (C - F(z))^{-1} \in R_H$ и принимает значения в $[H]$ и голоморфна в замкнутом интервале $[x_1, x_2]$ и стало быть, монотонно возрастает на нем. Но тогда: $(C - F(x_2))^{-1} > (C - F(x_1))^{-1} > 0 \Rightarrow F(x_1) > F(x_2)$, что и требовалось доказать.

Замечание 3. Множество $\{b'_k\}_1^{n_1}$, как легко видеть, не зависит от ε, чего нельзя сказать о множестве $\{t_j\}_1^n$. Ясно, что множество $\{b_j\}_1^m$ можно уменьшить, удалив из него те t_j, которые не будут полюсами $\Phi_\varepsilon(z)$ при другом наборе $\varepsilon > 0$.

Монотонность $F(z) \in S_H^{\varkappa}$ на интервалах $(-\infty, b_1)$ и $(b_m, 0)$ (см. предложение 5) и неравенства $\dim E_{F(x)}(0, +\infty)H < \varkappa$ (см. предложение 2) позволяют определить для $F(z) \in S_H^{\varkappa}$ числа

* Отметим, что некоторые из $a_k (1 < k < p)$ могут совпадать с $t_j (1 < j < n)$.

$$\varkappa^{+}_{-\infty}(F)=\lim_{x\downarrow-\infty}\operatorname{card}\{\sigma(F(x))\cap(0,+\infty)\}=\lim_{x\downarrow-\infty}\dim(E_{F(x)}(0,+\infty)H)\in\mathbf{Z}_{+},$$
$$\varkappa_{0}^{+}(F)=\lim_{x\uparrow0}\operatorname{card}\{\sigma(F(x))\cap(0,+\infty)\}=\lim_{x\uparrow0}\dim(E_{F(x)}(0,+\infty)H)\in\mathbf{Z}_{+}. \tag{36}$$

Теорема 2. *Пусть $F(z)\in R_H$, голоморфна на отрицательной полуоси за исключением точек $a_k(1\leqslant k\leqslant n<\infty)$ и $\exists z_0\in\mathbf{C}_+$, что $0\in\sigma_c(F(z_0))$. Тогда $F(z)\in S_H^{-\varkappa}$ если и только если:*

а) *$F(z)$ имеет конечное число нулей $t_1<t_2<\cdots<t_p<0$ первого порядка и конечной нулевой кратности $r_j=r_j(F)$, $(1\leqslant j\leqslant p)$;*

в) *$F(z)$ монотонна в некотором интервале $(-\infty,t_0)$, $t_0<0$ и $\varkappa^{+}_{-\infty}(F)<\infty$;*

с) *справедливо равенство*

$$\varkappa=\varkappa^{+}_{-\infty}+\sum_{j=1}^{p}r_j(F).$$

Доказательство. Для $F(z)\in S^{-\varkappa}$ утверждения а) и в) доказаны в предложении 5. Для доказательства с) рассмотрим $\Phi(z)=-F(z)^{-1}\in S^{\varkappa}$. Т.к. $0\overline{\in}\sigma_c(F(z_0))$, то $0\overline{\in}\sigma_c(F(z))\ \forall z\in\mathbf{C}_+$ (предложение 1). Поэтому в силу (1) $H=H_1\oplus H_2$, $\Phi(z)=\Phi_1(z)\oplus\Phi_-$, где $\Phi_-=\{\langle0,h\rangle: h\in H_2\}$ неопределенная часть (не зависящая от $z\in\mathbf{C}_+$) отношения $\Phi(z)$. Применим к $\Phi_1(z)\in S_{H_1}^{\varkappa}$ и принимающей значения в $[H]$ теорему 1 и заметим, что нули t_j функции $F(z)$ и только они будут полюсами $\Phi_1(z)$ первого порядка, причем нулевая кратность $r_j(F)$ функции $F(z)$ в точке t_j совпадает с $\varkappa_j(\Phi_1)$ — полюсной кратностью $\Phi_1(z)$ в той же точке t_j. Кроме того, $\varkappa^{+}_{-\infty}(F)=\varkappa^{-}_{-\infty}(\Phi_1)$, что следует при достаточно больших $|x|$ из равенств

$$\varkappa^{+}_{-\infty}(F)=\dim E_{F(x)}(0,+\infty)=\dim F_{-\Phi_1(x)}(0,+\infty)=\varkappa^{-}_{-\infty}(\Phi_1)).$$

Для доказательства теоремы 4 нам понадобится следующий результат, более общий вариант которого доказан авторами в [9, 16].

Теорема 3 [9, 16]. *Пусть $\alpha\geqslant-\infty$, $\beta<\infty$, $\mathbf{T}_x$ — монотонно убывающее при $x\in[\alpha,\beta]$ семейство плотно определенных (в гильбертовом пространстве H) замкнутых симметричных форм, равномерно ограниченных снизу: $\mathbf{T}_x\geqslant C$, $T(x)=T^*(x)$ — оператор, ассоциированный с $\mathbf{T}_x$. Пусть к тому же $\mathbf{T}_x$ удовлетворяет условиям:*

а) *$\forall x_1<x_2\in(\alpha,\beta)$ $\exists C_{x_1,x_2}$ такая, что*

$$\mathbf{T}_{x_1}[f]-\mathbf{T}_{x_2}[f]>C_{x_1,x_2}\|f\|^2\quad\forall f\in D(\mathbf{T}_{x_1})\subset D(\mathbf{T}_{x_2});$$

б) *оператор-функция $T(x)$ непрерывна в $[\alpha,\beta]$ в смысле равмноерной резольвентной сходимости.*

Тогда, если $\dim E_{T(\beta)}(-\infty,0)H<\infty$, то

$$\dim E_{T(\beta)}(-\infty,0)H-\dim E_{T(\alpha)}(-\infty,0)H=\sum_{x\in(\alpha,\beta)}\dim\ker T(x).$$

Теорема 4. *Пусть $F(z)\in S_H^{-\varkappa}$. Тогда:*

1) *$\exists b_1<b_2<\cdots<b_m<0$ такие, что $F(z)$ голоморфна и монотонна в интервалах $(-\infty,b_1)$, $(b_1,b_2),\cdots,(b_{m-1},b_m)$, $(b_m,0)$;*

2) $\forall x \in (-\infty, 0)$, $x \neq b_j$, $(1 \leqslant j \leqslant m)$ $\operatorname{card}\{\sigma(F(x)) \cap (0, +\infty)\} \leqslant \varkappa$;

3) *если* $\varkappa_j = \varkappa_j(F)$, $(1 \leqslant j \leqslant m)$ — *число таких положительных собственных чисел операторов* $F(x)$, $(x \in (b_{j-1}, b_j))$, *занумерованных с учетом кратности в порядке убывания, для которых*

$$\lim_{x \uparrow b_j} \lambda_{kj}(F(x)) = +\infty \quad (k = 1, 2, \cdots, \varkappa_j), \tag{37}$$

а

$$\varkappa_{m+1} = \varkappa_{m+1}(F) = \lim \operatorname{card}\{\sigma(F(x)) \cap (0, +\infty)\}, \tag{37'}$$

то справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^{m+1} \varkappa_j(F) = \varkappa. \tag{38}$$

Обратно, если $F(z) \in R_H$ *и удовлетворяет условиям* 1) — 3), *то* $F(z) \in S_H^{\varkappa}$.

Доказательство: а). Для $F(z) \in S^{-\varkappa}$ утверждения 1) и 2) доказаны в предложениях 4 и 2. Докажем 3). Заметим, что если $F(z) \in R_H$, то $\forall N > 0$ верна эквивалентность: $G_N(z) = F(z) + Nz \in S^{-\varkappa} \Leftrightarrow F(z) \in S^{-\varkappa}$. Добавлением Nz (N — достаточно большое) к $F(z)$ можно добиться того, чтобы для $G_N(z)$ все положительные собственные значения $\lambda_{kj}(G_N(x))$ операторов $G_N(x)$ $(x < 0)$ удовлетворяли условиям:

$$\lim_{x \uparrow b_j} \lambda_{kj}(G_N(x)) = +\infty, \ \lim_{x \downarrow b_{j-1}} \lambda_{kj}(G_N(x)) < 0 \ (1 \leqslant j \leqslant m;\ 1 \leqslant k \leqslant \varkappa_j). \tag{39}$$

Учитывая строгую монотонность оператор-функции $G_N(x)$, применим к ней в каждом из интервалов $(-\infty, b_1)$, $(b_1, b_2), \cdots, (b_{m-1}, b_m)$, b_m, 0, теорему 3. При достаточно малом $\delta > 0$ с учетом (39) получим (считая $b_0 = -\infty$):

$$\sum_{x \in (b_{j-1}, b_j)} \dim\ker G_N(x) = \dim E_{G_N(b_j-\delta)}(0, +\infty) = \varkappa_j(G_N) = \varkappa_j(F), \tag{40}$$

ибо $\dim E_{G_N(b_{j-1}+\delta)}(0, +\infty) = 0$ $(\Leftrightarrow G_N(b_{j-1}+\delta) < 0)$ в силу (39). Так как, кроме того $\lim\limits_{x \uparrow 0} \lambda_k(G_N(x)) = \lim\limits_{x \uparrow 0} \lambda_k(F(x))$, то

$$\sum_{x \in (b_m, 0)} \dim\ker G_N(x) = \dim E_{G_N(\delta)}(0, +\infty) = \varkappa_{m+1}(G_N) = \varkappa_{m+1}(F). \tag{41}$$

Учитывая включение $G_N(z) \in S^{-\varkappa}$, равенства (40), (41), $\varkappa^{+}_{-\infty}(G_N) = 0$ и условие $0 \in \rho(G_N(z))$ при $z \in \mathbb{C}_+$, получим из теоремы 2 соотношение

$$\varkappa = \sum_{x<0} \dim\ker G_N(x) + \varkappa^{+}_{-\infty}(G_N) = \sum_{j=1}^{m+1} \varkappa_j(G_N) = \sum_{j=1}^{m+1} \varkappa_j(F),$$

доказывающее (38).

б) Если $F(z)$ удовлетворяет условиям 1)—3), то $G_N(z) = F(z) + Nz$ также им удовлетворяет $\forall N > 0$. Поэтому включение $F(z) \in S^{-\varkappa}$ следует из (39)—(41) и теоремы 2. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $F_1(z) \in R_H$, $F_2(z) \in S_H^{-}$ и удовлетворяет условиям: а) $F_2(x) \in [H]$ $\forall x < 0$, б) $F_2(0) = s - \lim_{x \uparrow 0} F_2(x) = 0$. Тогда верна эквивалентность $F_1(z) \in S_H^{-\varkappa} \Leftrightarrow F_1(z) + F_2(z) \in S_H^{-\varkappa}$.

Доказательство следует из теоремы 4 и очевидных соотношений:

$$\varkappa_j(F_1 + F_2) = \varkappa_j(F_1)(1 \leqslant j \leqslant m), \quad \varkappa_0^+(F_1 + F_2) = \varkappa_0^+(F_1).$$

Замечание 4. Для оператор-функций $F(z) \in S_H^{\varkappa}$ и принимающих значения в $[H]$, числа $\varkappa_j(F)$, определенные в теореме 3, очевидно совпадают с полюсными кратностями $\varkappa_j(F)$ (в смысле определения 5) оператор функции $F(z)$ в точках b_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$. Далее, $\varkappa_{m+1}(F)$ из теоремы 4 совпадает с числом $\varkappa_0^+(F)$ из (36), а также с минимальной размерностью подпространств, принадлежащих конусу

$$K_0^+ = K_0^+(F) = \{h: \lim_{x \uparrow 0}(F(x)h, h) > 0\}. \tag{42}$$

Поэтому равенство (38) принимает вид

$$\varkappa = \varkappa_0^+(F) + \sum_{j=1}^{p} \varkappa_j(F),$$

является полным аналогом равенства (18) из теоремы 1.

Для оператор-функций $F(z) \in S_H^{+\varkappa}$ также справедливы аналоги теорем 2 и 4. Приведем их (без доказательства), заметив вначале, что в силу предложений 2 и 5 для $F(z) \in S_H^{+\varkappa}$ корректно определены числа

$$\varkappa_{-\infty}^-(F) = \lim_{x \uparrow 0} \operatorname{card}\{\sigma(F(x)) \cap (-\infty, 0)\} = \lim_{x \uparrow 0} \dim E_{F(x)}(-\infty, 0)H,$$

$$\varkappa_0^-(F) = \lim_{x \uparrow 0} \operatorname{card}\{\sigma(F(x)) \cap (-\infty, 0]\} = \lim_{x \uparrow 0} \dim E_{F(x)}(-\infty, 0]H.$$

Теорема 5. *Пусть $F(z) \in R_H$, голоморфна на отрицательной полуоси за исключением точек a_k $(1 \leqslant k \leqslant n < \infty)$ и $0 \in \sigma_c(F(z_0))$ при некотором $z_0 \in \mathbf{C}_+$. Тогда $F(z) \in S_H^{+\varkappa}$ если и только если:*

а) *$F(z)$ имеет конечно число нулей $t_1 < t_2 < \ldots < t_p < 0$ первого порядка и конечной нулевой кратности $r_k(F)$, $1 \leqslant k \leqslant p$;*

в) *$F(x)$ монотонна в некотором интервале $(t_0, 0)$ и $\varkappa_0^-(F) < \infty$;*

с) *справедливо равенство*

$$\varkappa = \varkappa_0^-(F) + \sum_{k=1}^{p} r_k(F).$$

Теорема 6. *Пусть оператор-функция $F(z) \in S_H^{+\varkappa}$. Тогда:*

1) *$\exists b_1 < b_2 < \cdots b_m < 0$ такие, что $F(z)$ голоморфна и монотонна в интервалах $(-\infty, b_1)$, $(b_1, b_2), \cdots, (b_{m-1}, b_m)$, $(b_m, 0) \equiv b_m, b_{m+1})$;*

2) $\dim E_{F(x)}(-\infty, 0)H \leqslant \varkappa$ $\forall x \in (-\infty, 0)$, $x \neq b_j$, $(1 \leqslant j \leqslant m)$;

3) *если $\varkappa_j(F)$ — число таких отрицательных собственных чисел оператора $F(x)$, $(x \in (b_{j-1}, b_j))$, занумерованных с учетом кратности в порядке возрастания, для которых*

$$\lim_{x \downarrow b_j} \lambda_{jk}(F(x)) = -\infty, \quad (1 \leqslant j \leqslant m, \ 1 \leqslant k \leqslant \varkappa_j),$$

то справедливо равенство

$$\varkappa = \varkappa_{-\infty}^{-}(F) + \sum_{j=1}^{m} \varkappa_j(F).$$

Обратно, если $F(z) \in R_H$ *и удовлетворяет условиям* 1) — 3), *то* $F(z) \in S_H^{+\varkappa}$.

§ 4. Некоторые дополнительные свойства и примеры

1. Неограниченные оператор-функции $F(z) \in S_H^{+\varkappa}$, как видно из приводимых ниже примеров, не обладают многими привычными свойствами функций тех же классов, но принимающих значения в $[H]$. Так, они не обязаны быть конечно-мероморфными на полуоси $(-\infty, 0)$, могут не быть монотонными внутри интервала аналитичности, не иметь на $(-\infty, 0)$ ни нулей, ни полюсов и т. д. Изучать их можно, например, аппроксимируя $F(z) \in S_H^{+\varkappa}$ функциями $F_\varepsilon(z) \in S_H^{+\varkappa}$ уже принимающими значения в $[H]$. Один из способов такой аппроксимации содержит

Предложение 6. *Пусть* $F(z) \in S_H^{-\varkappa}$, $\varepsilon > 0$,

$$F_\varepsilon(z) = \left((F(z) + \varepsilon z)^{-1} + \frac{\varepsilon}{z}\right)^{-1}. \tag{43}$$

Тогда:

1) $F_\varepsilon(z) \in S_H^{-\varkappa}$ *и принимает значения в* $[H]$;

2) *если* Ω — *область аналитичности* $F(z)$ *и* $z_0 \in \Omega$, *то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(z_0) f = F(z_0) f \ \forall f \in D(F(z_0)); \tag{44}$$

3) $$R - \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(z_0) = F(z_0) \ \ \forall z_0 \in \Omega, \tag{45}$$

4) $F_\varepsilon(z)$ *имеет ровно* $\varkappa$ *нулей и* $\varkappa$ *полюсов (с учетом кратности)*;

5) $\exists s - \lim\limits_{x \uparrow 0} F_\varepsilon(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} (F_\varepsilon(x) h, h) = -\infty \ \forall h \in H$.

Доказательство. 1) Следует из очевидных импликаций:

$$F_\varepsilon(z) \in S^{-\varkappa}, \ \varepsilon > 0 \Rightarrow F(z) + \varepsilon z \in S^{-\varkappa} \Rightarrow -(F(z) + \varepsilon z)^{-1} \in S^{+\varkappa},$$

$$(F(z_0) + \varepsilon z_0)^{-1} \in [H], \ z_0 \in \mathbb{C}_+ \Rightarrow -(F(z) + \varepsilon z)^{-1} - \frac{\varepsilon}{z} \in S^{+\varkappa} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_\varepsilon(z) \in S^{-\varkappa} F_\varepsilon(z_0) \in [H].$$

2) Пусть $z_0 \in \mathbb{C}_+$

$$\Phi_{z_0}(\varepsilon) = \frac{z_0}{\varepsilon}\left(F(z_0) + z_0\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^{-1}.$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Phi_{z_0}^{-1}(\varepsilon) g = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{z_0}\left(F(z_0) + z_0\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)\right) g = g \ \forall g \in D(F(z_0)),$$

$$|\Phi_{z_0}(\varepsilon)| \leqslant |z_0| \cdot |\operatorname{Im} z_0|^{-1} (\varepsilon^2 + 1)^{-1} < |z_0| (\operatorname{Im} z_0)^{-1}, \tag{46}$$

ибо $F(z_0)$ диссипативен. Теорема 1.5 из [13, с. 534] позволяет в силу (46) сделать заключение $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Phi_{z_0}(\varepsilon)F(z_0)f=f\ \forall f\in D(F(z_0))$, из которого с учетом равенства

$$F_\varepsilon(z)f=\Phi_{z_0}(\varepsilon)(F(z_0)+\varepsilon z_0)f=\Phi_{z_0}(\varepsilon)f+\varepsilon z_0\Phi_{z_0}(\varepsilon)f$$

и следует (44) при $z_0\in\mathbb{C}_+$. Доказательство для $z_0\in\mathbb{C}_-$ аналогично. При $z_0=\bar z_0=x_0\in\Omega$ следует заметить, что $F_\varepsilon(x_0)$ определен в силу предложения 1 корректно для всех, кроме конечного числа, $\varepsilon>0$ и воспользоваться спектральным разложением полуограниченного сверху оператора $F_\varepsilon(x_0)$.

Заметим, что из (44) следует $s-R-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}F_\varepsilon(z)=F(z)$, что однако, слабее утверждения 3).

3. Пусть $z_0\mathbb{C}_+$, $\zeta\in\mathbb{C}_+$. Тогда

$$(F_\varepsilon(z_0)-\zeta)^{-1}-(F(z_0)-\zeta)^{-1}=\left(\left((F(z_0)+\varepsilon z_0)^{-1}+\frac{\varepsilon}{z_0}\right)^{-1}-\zeta\right)^{-1}-$$

$$-(F(z_0)-\zeta)^{-1}=\frac{\varepsilon}{z_0-\varepsilon\zeta}[F(z_0)(F(z_0)+\varepsilon z_0)-z_0^2](F(z_0)-\zeta)^{-1}\Bigg[F(z_0)+$$

$$+\frac{\varepsilon z_0^2-\varepsilon^2\zeta z_0-\zeta z_0}{z_0-\varepsilon\zeta}\Bigg]^{-1}=\frac{\varepsilon}{z_0-\varepsilon\zeta}F(z_0)\left[F(z_0)+\frac{\varepsilon z_0^2-\varepsilon^2\zeta z_0-\zeta z_0}{z_0-\varepsilon\zeta}\right]^{-1}+$$

$$+\frac{\varepsilon(\varepsilon z_0+\zeta)}{z_0-\varepsilon\zeta}\left[F(z_0)-\frac{z_0}{\varepsilon z_0+\zeta}\right](F(z_0)-\zeta)^{-1}\left[F(z_0)+\frac{\varepsilon z_0^2-\varepsilon^2\zeta z_0-\zeta z_0}{z_0-\varepsilon\zeta}\right]^{-1}.$$

Полагая здесь $\zeta=-z_0$, воспользуемся оценками, легко вытекающими из известной оценки диссипативного оператора $F(z_0)$:

$$\left\|\left(F(z_0)+\frac{z_0(\varepsilon^2+\varepsilon+1)}{\varepsilon+1}\right)^{-1}\right\|\leqslant\frac{\varepsilon+1}{(\varepsilon^2+\varepsilon+1)\operatorname{Im}z_0},$$

$$\left\|F(z_0)\left(F(z_0)+\frac{z_0(\varepsilon^2+\varepsilon+1)}{\varepsilon+1}\right)^{-1}\right\|\leqslant 1+|z_0|\cdot(\operatorname{Im}z_0)^{-1}.$$

$$\left\|\left(F(z_0)-\frac{1}{\varepsilon-1}\right)(F(z_0)+z_0)^{-1}\right\|\leqslant 1+[|z_0|(1-\varepsilon)+1][(1-\varepsilon)\operatorname{Im}z_0]^{-1}.$$

В результате получим

$$\left\|(F_\varepsilon(z_0)+z_0)^{-1}-(F(z_0)+z_0)^{-1}\right\|\leqslant\frac{\varepsilon}{|z_0|(1+\varepsilon)}\left(1+\frac{|z_0|}{\operatorname{Im}z_0}\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon}\left[1+\frac{|z_0|(1-\varepsilon)+1}{(1-\varepsilon)\operatorname{Im}z_0}\right]\frac{\varepsilon+1}{(\varepsilon^2+\varepsilon+1)\operatorname{Im}z_0}=\tag{47}$$

$$=\varepsilon\left(\frac{\operatorname{Im}z_0+|z_0|}{|z_0|\cdot\operatorname{Im}z_0}+\frac{\operatorname{Im}z_0+|z_0|+1}{(\operatorname{Im}z_0)^2}+o(\varepsilon)\right).$$

Теперь при $z_0\in\mathbb{C}_+$ (46) следует из (47). Доказательство при $z_0\in\mathbb{C}_-$ и $z_0=\bar z_0=x_0<0$ аналогично.

4)—5). Согласно предложению 4, $\exists\, b_1<0$ такое, что в интервале $(-\infty, b_1)$ функция $F(z)$ аналитична и монотонна. Поэтому $\exists x_0=$

$=x_0(\varepsilon)<b_1$ такое, что $F(x)+\varepsilon x<0$ при $x\in(-\infty, x_0]$ и $\forall f\in D(T_{F(x_0)})=D[F(x_0)]$

$$\lim_{x\downarrow-\infty} T_{F(x)}[f]+\varepsilon x\|f\|^2)=-\infty. \quad (48)$$

Из (48) легко следует, что $s-\lim_{x\downarrow-\infty}(F(x)+\varepsilon x)^{-1}=0$. Далее, для $G_\varepsilon(z)=-(F(z)+\varepsilon z)^{-1}-\frac{\varepsilon}{z}$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon)<0$, что $G_\varepsilon(x)>0$ при $x\in(-\infty, 1/\delta)\cup(\delta, 0)$ и

$$\lim_{x\uparrow 0}(G_\varepsilon(x)f, f)=+\infty\ \forall f\in H\setminus\{0\},$$

$$s-\lim_{x\downarrow-\infty} G_\varepsilon(x)=0. \quad (49)$$

Из (49) получим

$$\lim_{x\downarrow-\infty} T_{F_\varepsilon(x)}[f]=\lim_{x\downarrow-\infty}(F_\varepsilon(x)f, f)=-\infty\ \forall f\in H\setminus\{0\}, \quad (50)$$

$$s-\lim_{x\uparrow 0} F_\varepsilon(x)=s-\lim_{x\uparrow 0}(-G_\varepsilon^{-1}(x))=0. \quad (51)$$

Из $(50)\Rightarrow K_0^+(F_\varepsilon)=\varnothing$, $\varkappa_0^+(F_\varepsilon)=0$, а из $(51)-K_{-\infty}^{\pm}(F_\varepsilon)=\{0\}\Rightarrow\varkappa_{-\infty}^{\pm}=0$ здесь $K_0^+(F_\varepsilon)$, $K_{-\infty}^{\pm}(F_\varepsilon)$ соответствующие) конусы функции $F_\varepsilon(z)$. Утверждение 5) следует из (50), (51), а 4) — из теорем 2 и 4, ибо $\varkappa_0^+(F_\varepsilon)=\varkappa_{-\infty}^{\pm}(F_\varepsilon)=0$.

Замечание 5. С помощью оператор-функций $F_\varepsilon(z)$ вида (43) можно, не используя теорему 3, вывести теорему 4 из теоремы 1. Остановимся лишь на выводе утверждения 3), т. е. равенства (38), считая утверждения 1) и 2) доказанными для $F(z)\in S_H^{-\varkappa}$. Рассмотрим для этого оператор-функцию $F_\varepsilon(z)\in S_H^{-\varkappa}$ и принимающую значения в $[H]$. В силу предложения 6 $F_\varepsilon(z)$ имеет в точности $\varkappa$ полюсов на $(-\infty, 0)$- и $\varkappa_0^+(F_\varepsilon)=\varkappa_{-\infty}^{\pm}(E_\varepsilon^-)=0$. Покажем, что из этого следует наличие в точности $\varkappa$ собственных значений $\lambda_{kj}(F(x))\geqslant 0$, удовлетворяющих соотношениям (37)—(38).

Пусть $\lambda_{kj}(F(x))\geqslant 0$ $(j=1, 2,\cdots, m+1;\ k=1, 2,\cdots, \varkappa_j)$ те собственные значения оператора $F(x)$, для которых выполнены соотношения (37), (37′). Оператор $F_\varepsilon(x)$ имеет те же собственные функции) что и $F(x)$, а его собственные значения $\lambda_{kj}(F_\varepsilon(x))$ связаны с $\lambda_{kj}(F(x)$, равенствами

$$\lambda_{kj}(F_\varepsilon(x))=x[\lambda_{kj}(F(x)+\varepsilon x][x(1+\varepsilon^2)+\varepsilon(\lambda_{kj}(F(x))]^{-1}. \quad (52)$$

При достаточно малом $\varepsilon>0$ каждое из уравнений

$$f_{kj}(x)=x(1+\varepsilon^2)+\varepsilon\lambda_{kj}(F(x))=0\ (j=1, 2,\cdots, m;\ k=1, 2,\cdots, \varkappa_j)$$

имеет одно решение $x_{kj}\in(b_{j-1}, b_j)$, ибо

$$\lim_{x\uparrow b_j} f_{kj}(x)=+\infty,\ \lim_{x\downarrow b_{j-1}} f_{kj}(x)<0.$$

Точки x_{jk} как раз будут полюсами оператор-функции $F_\varepsilon(z)$ с полюсной кратностью $\varkappa(G_\varepsilon(x_{jk}))=\dim\ker(Fx_{jk})-\lambda_{kj}(F(x_{jk}))$. Поэтому

$$\sum_{x\in(b_{j-1}, b_j)}\varkappa(F_\varepsilon(x))=\varkappa_j(F)=\varkappa_j,\ (j=1, 2,\cdots, m), \quad (53)$$

т. е. в каждом интервале (b_{j-1}, b_j) функция $F_\varepsilon(x)$ имеет точно $\varkappa_j$ полюсов. Аналогично в силу (37) каждое из уравнений

$$f_{k,0}(x) = x(1+\varepsilon^2) + \varepsilon\lambda_{k,m+1}(F(x)) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, \varkappa_{m+1})$$

имеет в $(b_m, 0)$ единственное решение, если ε достаточно мало, ибо $\lim\limits_{x\uparrow 0} f_{k0}(x) > 0$ и $\lim\limits_{x\downarrow b_m} f_{k0}(x) < 0$. Отсюда

$$\sum_{x\in(b_m, 0)} \varkappa(F_\varepsilon(x)) = \varkappa_0^+(F) = \varkappa_{m+1}(F). \tag{54}$$

Из (52) видно, что других полюсов на полуоси $(-\infty, 0)$ оператор-функция $F_\varepsilon(z)$ не имеет. А так как $\varkappa_0^+(F_\varepsilon) = 0$ (предложение 6), то в силу теоремы 1

$$\sum_{x\in(-\infty, 0)} \varkappa(F_\varepsilon(x)) = \varkappa.$$

Из этого равенства с учетом (53), (54) и следует (38).

2. В этом пункте мы рассмотрим некоторые примеры функций $F(z) \in S_H^+$, демонстрирующие некоторые их свойства.

Пример 1. Пусть $H = L_2[0, 1]$, $(Af)(t) = tf(t)$, $Bf = (f, g)$, $g(t) \in L_2[0, 1]$, $\|g\| = 1$, $g(t) \neq 0$ $\forall t \in [0, 1]$. В силу теоремы 1 и замечания 4

$$F(z) = Az + B \in S_H^{-1},$$

ибо $\varkappa_0^+(F) = 1$ и $F(z)$ — ограниченно-голоморфна в $\mathbf{C}$. Покажем, что $F(z)$ не имеет нулей на $(-\infty, 0)$. Пусть $z = x < 0$, $0 \neq f \in \ker(F(x) - \lambda)$, $\lambda = \lambda(x) < 0$, т. е.

$$(F(x)f)(t) = xtf(t) + \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt\, g(x) = \lambda(x) f(x). \tag{55}$$

Из (55)

$$f(t) = Cg(t)(\lambda(x) - xt)^{-1}, \quad C = (f, g) \neq 0. \tag{56}$$

Так как $\lambda(x)/x > 0$ и $f(t) \in L_2[0, 1]$, то из (53) получаем: $\dfrac{\lambda(x)}{x} > 1$.

Умножив (56) скалярно на $g(t)$, получим

$$\int_0^1 |g(t)|^2 (\lambda(x) - xt)^{-1}\, dt = 1. \tag{57}$$

Но $\dfrac{\lambda(x)}{x} > 1 \Rightarrow \lambda(x) - xt < 0$ $\forall t \in [0, 1]$, что противоречит (57). Итак, $x < 0$, $\lambda(x) \leqslant 0 \Rightarrow \ker(F(x)) - \lambda(x)) = 0$, т. е. $0 \in \sigma_p(F(x))$ $\forall x < 0$.

Далее, $\sigma_c(F(x)) = [x, 0]$ $\forall x < 0$, $\operatorname{card}\sigma_p = \operatorname{card}(F(x)) = \{\sigma(F(x)) \cap \cap (0, \infty)\} = 1$ и единственное положительное собственное число $\lambda(x) = \lambda(F(x))$ находится из уравнения

$$\int_0^1 |g(t)|^2 \left(1 - \frac{xt}{\lambda(x)}\right)^{-1} dt = \lambda(x). \tag{58}$$

Из (58) легко вывести, используя теорему Лебега, что

$$\lim_{x\uparrow 0}\lambda(x)=1,\ \lim_{x\downarrow-\infty}\lambda(x)=0.$$

Этот пример интересен по следующим обстоятельствам:

а) хотя $0\in\sigma_c F(z)\ \forall z\in\mathbf{C}_+$ заключения теоремы 2 выполнены $\varkappa^{+}_{-\infty}(F)=1$, а нулей на полуоси $(-\infty, 0)$ $F(x)$ не имеет:

б) если для $F(x)\in S^{-\varkappa}(F(z)\in S^{+\varkappa})$ определить аналогично (12) конус $K^{+}_{-\infty}(F)$ $(K^{-}_{0}(F))$

$$K^{+}_{-\infty}(F)=\{h\in H:\lim_{x\downarrow-\infty}(F(x)h,h)\geqslant 0\},\ (K^{-}_{0}(F)=\{h\in H:$$

$$:\lim_{x\uparrow 0}(F(x)h,h)\leqslant 0\}),\qquad(59)$$

то в рассматриваемом примере $K^{+}_{-\infty}(F)=\{0\}$, хотя $\varkappa^{+}_{-\infty}(F)=1$, т. е, аналоги равенств (13) и (14) в этом случае отсутствуют.

Аналогично для $F(z)=-\dfrac{1}{z}A-B\in S^{+1}$, $K^{-}_{0}(F)=\{0\}$, хотя $\varkappa^{-}_{0}(F)=1$.

Пример 2. Пусть $H=L_2[0,1]$, $\alpha=\bar{\alpha}$, $F_\alpha(z)$ — оператор $-d^2/dt^2$ с граничными условиями: $u(0)=0$, $(z+\alpha)\,u'(1)-(u)(1)=0$. Легко видеть, что $F(z)\in R_H$ и, как показано в [13, с. 462], голоморфна всюду в расширенной плоскости $\mathbf{C}$. При $\alpha\leqslant 0$ $F_\alpha(z)\in S^{+0}$. Если $\alpha>0$, $\sigma_c(F_\alpha(z))=$ $=\varnothing$ и $\forall x\in(-\alpha,1-\alpha)$ $\operatorname{card}\sigma_p(F_\alpha(x))\cap(-\infty,0)=1$ и $\sigma_p(F_\alpha(x))\cap$ $\cap(-\infty,0)=\varnothing$ $\forall x\in\mathbf{R}\setminus(\alpha,1-\alpha)$. Единственное отрицательное собственное число $\lambda_\alpha(x)=\lambda(F_\alpha(x))<0$ оператора $F_\alpha(x)$ при $x\in(-\alpha,1-)$, удовлетворяет условиям:

$$\lim_{x\uparrow 1-\alpha}\lambda_\alpha(x)=0,\ \lim_{x\downarrow-\alpha}\lambda_\alpha(x)=-\infty.\qquad(60)$$

Далее, $\dim\ker F(1-\alpha)=1$, а при $z\neq 1-\alpha$ $\exists F^{-1}(z)\in[H]$. Поэтому из (60) и теоремы 6 получаем $F_\alpha(z)\in S^{+1}$, $(\alpha>0)$, причем принадлежность S^{+1} достигается при $0<\alpha\leqslant 1$ за счет равенства $\varkappa^{-}_{0}(F_\alpha)=1\alpha$. вытекающего из (60), а при $\alpha>1$ — из-заналичия однократного нуля функции $F_\alpha(z)$ в точке $x_0=1-\alpha<0$, ибо $\varkappa^{-}_{0}(F_\alpha(x))=0$ при $\alpha>1$.

Этот пример интересен по ряду причин. Во-первых, $F_\alpha(z)$ голоморфна на всей оси, что невозможно для $(\mathrm{const}\neq)F(z)\in S^{+\varkappa}_{H}$ и принимающих значения в $[H]$. Во-вторых, $F_\alpha(z)$ теряет монотонность в точке $x=-\alpha$, оставаясь голоморфной в ней. Действительно, $D[F(-\alpha)]=D(\mathrm{T}_{F(-\alpha)})=\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2}[0,1]=\{f\in W^{1}_{2}:f(0)=f(1)=0\}$, в то время, как при $x\neq-\alpha$ $(D[F(x)]=D(\mathrm{T}_{F(x)})=W^{1}_{2,0}[0,1]=\{f\in W^{1}_{2}:f(0)=$ $=0\}$. В третьих, при $\alpha=1$ $\lim_{x\uparrow 0}\mathrm{T}_{F_1(x)}[f]\geqslant 0$, причем $\lim_{x\uparrow 0}\mathrm{T}_{F_1(x)}[f]=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(t)=t)$, т. е. $K^{-}_{0}(F)=\{Ct\}$ и $\dim K^{-}_{0}(F)=1$. Далее, для $G(z)=$ $=-F_1^{-1}(z)\in S^{-1}$ и, как в примере 1, $0\in\sigma_c(G(z))$ $\forall z\in\mathbf{C}_+$ и заключение с) теоремы 6 для $G(z)$ не выполнено. Действительно, $G(z)$ не имеет нулей на $(-\infty,0)$ и $\varkappa^{+}_{-\infty}(G)=0$, ибо $\dim E_{F(x)}(0,+\infty)H=0$, $\forall x\in(-\infty,-1)$.

Пример 3. Пусть $H = L_2[0, 1]$ и оператор-функция $G(z)$ определена соотношениями $G(z) = KG_1(z)K^*$, где $(Kf)(x) = xf(x)$, $G_1(z)f = (1+z)Pf-(I-P)f, (Pf)(x) = \int_0^1 f(t)\,dt$. Тогда, в силу теоремы 4 $G_1(z)$' а вместе с ней и $G(z)$, принадлежит классу S_H^{-1}. При $x \in (-1, 0)$ имеет единственное положительное собственное значение $\lambda(x)$, которое находится из соотношения $\sqrt{\lambda(x)}\operatorname{arctg}\sqrt{\lambda(x)} = \frac{1+x}{2+x}$. Ясно также, что $\lambda(x) \to 0$ при $x \to -1$ и $G(x) \leqslant 0$. при $x \leqslant -1$; $\sigma_c(G(x)) = [-x^2, 0]$, $x < 0$. Заметим, однако, что $0 \overline{\in} \sigma_p(G(x))$, так как уравнение

$$(2+z)\int_0^1 xtf(t)\,dt - x^2f(x) = 0$$

не имеет решений $f(x)$, лежащих в $L_2[0, 1]$, что наряду с примером 2 показывает существенность условия $0 \in \sigma_c(G(z_0))$ при $z_0 \in \mathbb{C}_+$.

Рассмотрим оператор-функцию $F(z) = -G^{-1}(z) \in S_H^{-1}$. Здесь $h \in D(F(z)) \Leftrightarrow \exists f(x) \in H$, такая, что $(2+z)\int_0^1 xtf(t)(dt - x^2f(x) = -h(x)$.

Ясно, что $\int_0^1 |h(t)|\,t^{-1}\,dt < \infty$ $\forall h \in D(F(z))$. Таким образом, при $z \neq -1$.

$$h \in D(F(z)) \Leftrightarrow F(z)\,h = \frac{h(x)}{x^2} - \frac{2+z}{1+z}\int_0^1 \frac{h(t)}{tx}\,dt \in L_2[0, 1];$$

$$h \in D[F(-1)] \Leftrightarrow F(-1)\,h = \frac{h(x)}{x^2} \in L_2[0, 1], \quad \int_0^1 \frac{h(t)}{t}\,dt = 0.$$

Из определения $F(z)$ следует, что она голоморфна при $x<0$, но не является монотонной, так как $F(x)>0$ при $x<-1$ и $\sigma_p(F(x)) = \{-\lambda^{-1}(x)\}$ $\forall x \in (-1, 0)$. Отметим еще, что $\forall x \neq -1$ $D[F(x)] = \{h : h(x), x^{-1}h(x) \in L_2\} = D$ и не зависит от x, а $D[F(-1)] = \left\{h \in D : \int_0^1 t^{-1}\,h(t)\,dt = 0\right\} \subset D$, $D[F(-1)] \neq D$.

3. В этом пункте мы приведем одно предложение, обобщающее хорошо известный результат для положительно определенных операторов. Его можно, например, использовать при доказательстве предложения 5 и теоремы 4.

Предложение* 7. *Пусть* $A = A^*$, $B = B^* \in \mathbf{C}(H)$, $0 \in \rho(A) \cap \cap \rho(B)$. *Если* $\dim E_A(-\infty, 0)H = \dim E_B(-\infty, 0)H < \infty$ *или* $\dim E_A(0, +\infty)H = \dim E_B(0, +\infty)H < \infty$, *то верна импликация* $A \geqslant B \Rightarrow A^{-1} \leqslant B^{-1}$.

Доказательство. Пусть $A = J|A| = |A|^{1/2} J|A|^{1/2}$, $B = J_1|B_1| = |B|^{1/2} J_1 |B|^{1/2}$ — полярные представления операторов A и B. Так как $\dim E_A(-\infty, 0)H = \dim E_B(-\infty, 0)H$, то $J_1 = U^*JU$, где $U(\in [H])$ унитарен. Тогда $B = B_1^* JB_1$, где $B_1 = U|B|^{1/2}$ и условие $A \geqslant B$ эквивалентно такому: $(J|A|^{1/2}f, |A|^{1/2}f) \geqslant (JB_1 f, B_1 f)$ $\forall f \in D(|A|^{1/2})$. Отсюда видно, что оператор $Q = B_1|A|^{-1/2}$ будет J-сжатием, т. е. $Q \in H]$ и $Q^*JQ \leqslant J$, а значит таковым будет и Q^* (см. [17]), ибо $\dim E_J(-\infty, 0)H = n < \infty$. Но тогда $QJQ^* \leqslant J \Leftrightarrow Q^{-1} J(Q^*)^{-1} \geqslant J$, т. е. $(Jf, f) \leqslant \leqslant (J(Q^*)^{-1}f, (Q^*)^{-1}f)$, откуда $(JU|B|^{-1/2}|A|^{1/2}f, U|B|^{-1/2}|A|^{1/2}f) \geqslant J(f, f)$ $\forall f \in H \Leftrightarrow (JU|B|^{-1/2}g, U|B|^{-1/2}g) \geqslant (J|A|^{-1/2}g, |A|^{-1/2}g)$ $\forall g \in H \Leftrightarrow \Leftrightarrow (B^{-1}g, g) \geqslant (A^{-1}g, g)$ $\forall g \in H$. Предложение доказано.

Замечание 6. Импликация: $A \geqslant B \Rightarrow A^{-1} \leqslant B^{-1}$ в случае $\dim E_A(0)H = \dim E_B(0)H = \infty$, вообще говоря, неверна. Действительно, отправляясь от $A = |A|^{1/2} J|A|^{1/2}$, выберем J-сжатие Q так, чтобы Q^* не являлся J-сжатием (это возможно, ибо $\dim E_J(0)H = \infty$). Полагая $B = |A|^{1/2} Q^*JQ|A|^{1/2}$, получим искомый контрпример.

4. Напомним определение классов $S_H^{+\varkappa}(\alpha, \beta)$ оператор-функций, введенных авторами в [7] для описания некоторых классов обобщенных резольвент эрмитова оператора с лакунами.

Определение 6. Оператор-функцию $F(z) \in R_H$ будем относить к классу $S_H^{+\varkappa}(\alpha, \beta)$ $(S_H^{-\varkappa}(\alpha, \beta))$, если $\omega(z)F(z) \in R_H(\omega^{-1}(z) \in R_H)$, где $\varkappa \in \mathbf{Z}_+$, $\omega(z) = (z-\beta)(z-\alpha)^{-1}$, $-\infty < \alpha < \beta < \infty$.

Для классов $S_H^{\pm\varkappa}(\alpha, \beta)$ справедливы аналоги теорем 1, 2 и 4—6. Приведем формулировку лишь аналога теоремы 4.

Теорема 7. *Пусть* $F(z) \in S_H^{-\varkappa}(\alpha, \beta)$. *Тогда:*

1). $\exists \alpha = b_0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_m < \beta$ *такие, что* $F(z)$ *голоморфна и монотонна в интервалах* $(\alpha, b_1), (b_1, b_2), \cdots, (b_{m-1}, b_m), (b_m, \beta)$;

2). $\forall x \in (\alpha, \beta)$, $x \neq b_j$, $(1 \leqslant j \leqslant m)$ $\operatorname{card} |\sigma(F(x)) \cap (0, +\infty)| \leqslant \varkappa$;

3). *Если* $\varkappa_j = \varkappa_j(F)$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ — *число таких положительных собственных значений оператора* $F(x)$, $x \in (b_{j-1}, b_j)$, *занумерованных с учетом кратности в порядке убывания, для которых*

$$\lim_{x \uparrow b_j} \lambda_{kj}(F(x)) = +\infty$$

и

$$\varkappa_{m+1} = \varkappa_{m+1}(F) = \lim_{x \uparrow \beta} \operatorname{card} |\sigma(F(x)) \cap (0, +\infty)| = \varkappa_\beta^+,$$

то справедливо равенство

---

* Ю. Л. Шмульян сообщил авторам, что предложение 7 независимо получено им в работе, находящейся в печати.

$$\varkappa = \sum_{j=1}^{m+1} \varkappa_j(F) = \sum_{j=\ast}^{m} \varkappa_j(F) + \varkappa_\beta^+ .$$

Обратно, если $F(z) \in R_H$ *и удовлетворяет условиям* 1)—3), *то* $F(z) \in S_H^{-\varkappa}(\alpha, \beta)$.

Доказательство вытекает из теоремы 4 и очевидной эквивалентности:

$$F(z) \in S_H^{-\varkappa} = S_H^{\varkappa}(-\infty, 0) \Leftrightarrow F\left(\frac{z-\beta}{z-\alpha}\right) \in S_H^{-\varkappa}(\alpha, \beta).$$

Московский инженерно-строительный институт
Донецкий политехнический институт

Поступила 1. VIII. 1988

Վ. Ա. ԴԵՐԿԱՉ, Մ. Մ. ՄԱԼԱՄՈՒԴ. Կրեյն-Ստիլտեսի ֆունկցիաների մի դասի ընդհանրացման մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում ուսումնասիրվում են հեղինակների կողմից ավելի վաղ ներմուծված $S_H^{\pm\varkappa}$ *դասեր, որոնք հանդիսանում են* C_+*-ում* $F(z)$ *անալիտիկ օպերատոր-ֆունկցիաներ ոչ բացասական կեղծ մասով և որոնց համար* $z^{\pm 1} F(z) \in N_\varkappa$:

Այն դեպքում, երբ $\varkappa = 0$, $S_\varkappa^{\pm 0}$ *դասերը համընկնում են հայտնի Կրեյն-Ստիլտեսի դասերի հետ։* $F(z) \in N$ *օպերատոր-ֆունկցիաների զրոների և բևեռների տերմիններով ստացված են նրանց պատկանելության հայտանիշներ նշված դասերին։*

V. A. DERKACH, M. M. MALAMUD. *On generalization of the Krein—Stilties class of functions* (summary)

The paper deals with introduced by the same authors (see Soviet Math. Dokl.—1987, vol. 35, № 2) classes $S_H^{\pm\varkappa}$ of analytic in C_+ operator—valued functions $F(z)$ with nonnegative imaginary part carhacterised by the $z^{\pm 1} F(z) \in N_\varkappa$. If $\varkappa = 0$ the classes $S_H^{\pm 0}$ are identical to the Krein—Stilties classes. In terms of zeros and poles of operator-valued functions $F(z) \in N$ the criteria that they belong to the discribed classes are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Крейн.* О резольвентах эрмитова оператора с индексом дефекта (n, n), ДАН СССР, 1946, 52, № 8, 657—660.
2. *М. Г. Крейн.* Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля, ДАН СССР, 1951, 76, № 1, 21—24.
3. *М. Г. Крейн.* Об одном обобщении исследований Стилтьеса, ДАН СССР, 87, № 6, 1962, 881—884.
4. *Н. И. Ахиезер.* Классическая проблема моментов, М., Физматгиз, 1961.
5. *Ф. Аткинсон.* Дискретные и непрерывные граничные задачи, М., Мир, 1968.
6. *М. Г. Крейн, А. А. Нудельман.* Проблема моментов Маркова и экспериментальные задачи, М., Наука, 1973.
7. *В. А. Деркач, М. М. Маламуд.* О функции Вейля и эрмитовых операторах с лакунами, ДАН СССР, 1987, 293, № 5, 1041—106.
8. *Ш. Н Саакян.* К теории резольвент симметрического оператора с бесконечными дефектными числами, ДАН АрмССР, 1965, 41, № 4, 1269—1272.
9. *В. А. Деркач, М. М. Маламуд.* Обобщенные резольвенты и граничные задачи для эрмитовых операторов с лактунами, Киев, 1988, 64 с. Препринт института математики АН УССР, 88, 59.

10. *В. А. Деркач, М. М. Маламуд.* О некоторых классах аналитических оператор-функций с неотрицательной мнимой частью, ДАН УССР, серия А. 1989, № 3.
11. *М. Г. Крейн, Г. Лангер.* О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве $\Pi_\varkappa$, Функцион. анализ, 1971, т. 5, № 3, 54—69.
12. *M. G. Krein, H. Langer.* Über einige Fortsetzungprobleme die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren in Raume $\Pi_\varkappa$ zusammenhangen, Math. Nachr., 1977-77, 187–236.
13. *Т. Като.* Теория возмущений линейных операторов. М., Мир, 1972.
14. *С. Г. Крейн. В. П. Трофимов.* О кратности характеристической точки голоморфной оператор-функции, Матем. исследования, 1970, т. 5, № 2, 105—114.
15. *И. Ц. Гохберг, Е. И. Сигал* Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше, Матем. сб., 1971, т .84. 607—630
16. *В. А. Деркач, М. М. Маламуд.* Функция Вейля эрмитова оператора, Киев, 1988, 52 с. Деп. в Укр. НИИНТИ, № 779-УК-88.
17. *Ю. П. Гинзбург.* О J-нерастягивающих оператор-функциях, ДАН СССР, 1957, 117, № 2. 171—173.