ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 6. 1990 Математика

УДК 517.51

В. Г. ВЕРДИЕВ

МАКСИМАЛЬНОЕ И МИНИМАЛЬНОЕ РАСХОЖДЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ НУЛЕЙ ОДНОГО КЛАССА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

1°. Пусть $T_n(t)$—тригонометрический многочлен порядка n, имеющий $2n$ вещественных нулей в промежутке $[-\pi, \pi)$.

В данной статье будем обозначать через $x_1^t < x_2^t < \cdots < x_{2n}^t$ и $y_1^t < y_2^t < \cdots < y_{2n}^t$ соответственно нули)* тригонометрического многочлена $T_n(t)$ и его производной $T'_n(t)$, расположенные в промежутке $[-\pi, \pi)$.

Обозначим через $W_n(h)$ класс всех тригонометрических многочленов порядка n, которые удовлетворяют следующим трем условиям: любой тригонометрический многочлен $T_n(t) \in W_n(h)$ 1) имеет $2n$ простих нулей $x_1^t < x_2^t < \cdots < x_{2n}^t$ в промежутке $[-\pi, \pi)$ и удовлетворяет неравенствам

2) $$\max_{-\pi \leq t \leq \pi} |T_n(t)| \leq 1,$$

3) $$\min_{1 \leq i \leq 2n} \max_{x_i^t \leq t \leq x_{i+1}^t} |T_n(t)| \geq h,$$

где $$x_{2n+1}^t = x_1^t + 2\pi \text{ и } h \in (0,1].$$

Расхождение последовательных нулей $x_1^t < x_2^t < \cdots < x_{2n}^t$ тригонометрических многочленов $T_n(t)$ класса $W_n(h)$ будем характеризовать следующими величинами:

$$d_n[h] = \inf_{T_n(t) \in W_n(h)} \min_{1 \leq i \leq 2n} |x_i^t - x_{i+1}^t|$$

и

$$D_n[h] = \sup_{T_n(t) \in W_n(h)} \max_{1 \leq i \leq 2n} |x_i^t - x_{i+1}^t|,$$

где $$x_{2n+1}^t = x_1^t + 2\pi.$$

* В дальнейшем через x_i^t и y_j^t обозначены, соответственно, i-ый нуль и j-ый нуль тригонометрического многочлена и его производной, расположенные в порядке их возрастания в промежутке $[-\pi, \pi)$. Верхний индекс t при x_i^t и y_j^t означает, что x_i^t есть нуль тригонометрического многочлена $T_n(t)$ и y_j^t есть нуль его производной $T'_n(t)$.

Рассмотрим следующие вопросы: 1) достигаются ли $d_n[h]$ и $D_n[h]$ на тригонометрических многочленах из класса $W_n(h)$; 2) на каких тригонометрических многочленах из класа $W_n(h)$ они достигаются; 3) определить чему равны $d_n[h]$ и $D_n[h]$.

Многочлен $T_n(t) \in W_n(h)$, для которого достигается величина $d_n[h]$ или $D_n[h]$, будем называть экстремальным многочленом.

Ответы на вопросы 1)—3) для $D_n[h]$ даны в [1], для $d_n[h]$ получены в настоящей статье.

2°. Пусть длина отрезка $[a, b]$ равна l. Будем говорить, что совокупность периодических с периодом l непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{2n}$ образуют $\tilde{T}_{2n}$-систему на отрезке $[a, b]$ длиной l, если любой многочлен $P_n(t)=\sum_{k=0}^{2n} a_k \varphi_k(t)$ при $\sum_{k=0}^{2n} a_k^2>0$ и его производная $P'_n(t)=\sum_{k=0}^{2n} a_k \varphi'_k(t)$ могут иметь не более $2n$ нулей в промежутке $[a, b)$.

Тригонометрические функции $\{1, \sin t, \cos t, \cdots, \sin nt, \cos nt\}$ образуют $\tilde{T}_{2n}$-систему на отрезке $[-\pi, \pi]$ длиной 2π.

При доказательстве леммы 2 и теоремы 1 мы будем опираться на теорему A [2], [3] о существовании и единственности многочлена по $\tilde{T}_{2n}$-системе функций с данной последовательностью значений экстремумов и на теорему B [1] о движении нулей и точек экстремумов тригонометрического многочлена.

Теорема A ([2], [3]). *Пусть* $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{2n}$ *образуют* $\tilde{T}_{2n}$ *-систему на* $[a, b]$, *и пусть даны положительные числа* $v_1, v_2, \cdots, v_{2n}$. *Тогда существуют на* $[a, b)$ *такая единственная система точек* $a \leqslant y_1^p < y_2^p < \cdots < y_{2n}^p < b$ *и такой многочлен* $P_n(t)$, *что* $P_n(y_k^p) = (-1)^k v_k$ *и* $P'_n(y_k^p)=0$ *при* $k=1, 2, \cdots, 2n$.

Теорема B ([1]). *Пусть* $P_n(t)$ *и* $Q_n(t)$ — *два тригонометрических многочлена порядка* n, *имеющие по* $2n$ *нулей в промежутке* $[-\pi, \pi)$.

Если $1<j<2n$, $y_1^p=y_1^q$ и

$$P_n(y_i^p)=Q_n(y_i^q)$$

при $i=1, 2, \cdots j-1, j+1, \cdots, 2n$,

$$P_n(y_j^p)>Q_n(y_j^q) \text{ при } Q_n(y_j^q)>0 \tag{1}$$

и

$$P_n(y_j^p)<Q_n(y_j^q) \text{ при } Q_n(y_j^q)<0,$$

то

$$y_2^p<y_2^q,\ y_3^p<y_3^q, \cdots, y_{j-1}^p<y_{j-1}^q,$$

$$y_{j+1}^q<y_{j+1}^p,\ y_{j+2}^q<y_{j+2}^p, \cdots, y_{2n}^q<y_{2n}^p,$$

$$x_1^p<x_1^q,\ x_2^p<x_2^q, \cdots, x_{j-1}^p \leqslant x_{j-1}^q \tag{2}$$

$$x_j^q < x_j^p,\ x_{j+1}^q < x_{j+1}^p, \cdots, x_{2n}^q < x_{2n}^p,$$
$$y_2^q - y_2^p < y_3^q - y_3^p < \cdots < y_{j-1}^q - y_{j-1}^p,$$
$$y_{j+1}^p - y_{j+1}^q > y_{j+2}^p - y_{j+2}^q > \cdots > y_{2n}^p - y_{2n}^q,$$
$$x_1^q - x_1^p < x_2^q - x_2^p < \cdots < x_{j-1}^q - x_{j-1}^p,$$
$$x_j^p - x_j^q > x_{j+1}^p - x_{j+1}^q > \cdots > x_{2n}^p - x_{2n}^q. \tag{3}$$

3° Лемма 1. *В классе $W_n(h)$ существует экстремальный тригонометрический многочлен $P_n(t)$, для которого нижняя грань $d_n[h]$ в классе $W_n(h)$ достигается, то есть*

$$d_n[h] = \inf_{T_n(t) \in W_n(h)} \min_{1 \le l \le 2n} |x_l^t - x_{l+1}^t| =$$
$$= \min_{T_n(t) \in W_n(h)} \min_{1 \le l \le 2n} |x_l^t - x_{l+1}^t| =$$
$$= \min_{1 \le l \le 2n} |x_l^p - x_{l+1}^p|,$$

где
$$x_{2n+1}^p = x_1^p + 2\pi \ \text{и}\ x_{2n+1}^t = x_1^t + 2\pi.$$

Доказательство. Нули $x_1^t < x_2^t < \cdots < x_{2n}^t$ тригонометрического многочлена $T_n(t) \in W_n(h)$ являются непрерывными функциями его коэффициентов. Коэффициенты тригонометрических многочленов из класса $W_n(h)$ ограничены в совокупности. Поэтому величина $d_n[h]$ достигается на некотором многочлене $P_n(t)$ из $W_n(h)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Существуют в классе $W_n(h)$ единственный тригонометрический многочлен $P_n(t)$ и в промежутке $[-\pi, \pi)$ единственная система чисел $-\pi = y_1^p < y_2^p < \cdots < y_{2n}^p < \pi$, для которых выполнены равенства*

$$P_n(y_i^p) = (-1)^{i-n+1} \ \text{при}\ i = 1, 2, \cdots, n,\ n+2, \cdots, 2n,$$
$$P_n(y_{n+1}^p) = h \ \text{и}\ P'_n(y_j^p) = 0 \ \text{при}\ j = 1, 2, \cdots, 2n, \tag{4}$$

и многочлен $P_n(t)$ имеет вид

$$P_n(t) = \cos n \arccos \frac{\cos t - \cos^2 \alpha_n}{1 + \cos^2 \alpha_n}, \tag{5}$$

где

$$\alpha_n = \arccos \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2n} \arccos h\right) \ \text{и}\ 0 < h \le 1.$$

Доказательство. Согласно теореме А существуют в промежутке $[-\pi, \pi)$ единственная система чисел $-\pi = y_1^p < y_2^p < \cdots < y_{2n}^p < \pi$ и единственный тригонометрический многочлен $P_n(t)$ порядка n, определяемые равенствами (4). Поэтому многочлен $P_n(t)$ принадлежит классу $W_n(h)$.

Покажем, что многочлен $P_n(t) \in W_n(h)$, который удовлетворяет условиям леммы 2, имеет вид (5). Из структуры выражения

$$\cos n \arccos \frac{\cos t - \cos^2 \alpha_n}{1+\cos^2 \alpha_n} \tag{6}$$

видно, что (6) есть тригонометрический многочлен порядка n относительно t и числа $\{t_k\}_{k=1}^{2n}$, определяемые равенствами

$$t_k = \begin{cases} -\arccos\left(\cos^2 \alpha_n + (1+\cos^2 \alpha_n) \cos \dfrac{(n-k+1)\pi}{n}\right), \\ \text{при } k=1, 2, \cdots, n; \\ 0, \text{ при } k=n+1; \\ \arccos\left(\cos^2 \alpha_n + (1+\cos^2 \alpha_n) \cos \dfrac{(k-n-1)\pi}{n}\right), \\ \text{при } k=n+2, \cdots, 2n \end{cases}$$

во-первых, удовлетворяют неравенствам

$$-\pi = t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} < t_{n+2} < \cdots < t_{2n} < \pi$$

и, во-вторых, служат нулями производной по t тригонометрического многочлена (6), так как

$$\cos n \arccos \frac{\cos t_k - \cos^2 \alpha_n}{1+\cos^2 \alpha_n} = \begin{cases} (-1)^{n-k+1}, & \text{при } k=1, 2, \cdots, n, \\ h, & \text{при } k=n+1, \\ (-1)^{k-n-1}, & \text{при } k=n+2, \cdots, 2n. \end{cases}$$

Следовательно, числа $\{t_k\}_{k=1}^{2n}$ из промежутка $[-\pi, \pi)$ и тригонометрический многочлен (6) порядка n удовлетворяют условию леммы 2 и в силу единственности такого тригонометрического многочлена согласно теореме A имеем

$$y_k^p = t_k, \text{ при } k=1, 2, \cdots, 2n$$

и

$$P_n(t) = \cos n \arccos \frac{\cos t - \cos^2 \alpha_n}{1+\cos^2 \alpha_n}.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Числа* $x_1^p < x_2^p < \cdots < x_n^p < x_{n+1}^p < \cdots < x_{2n}^p$ *из промежутка* $[-\pi, \pi)$, *определяемые равенствами*

$$x_i^p = \begin{cases} -\arccos\left(\cos^2 \alpha_n + (1+\cos^2 \alpha_n) \cos \dfrac{(2n-2i+1)\pi}{2n}\right), \\ \text{при } i=1, 2, \cdots, n, \\ \arccos\left(\cos^2 \alpha_n + (1+\cos^2 \alpha_n) \cos \dfrac{(2i-2n-1)\pi}{2n}\right), \\ \text{при } i=n+1, n+2, \cdots, 2n, \end{cases} \tag{7}$$

являются простыми нулями тригонометрического многочлена

$$P_n(t)=\cos n \arccos\frac{\cos t-\cos^2\alpha_n}{1+\cos^2\alpha_n},$$

где $\alpha_n=\arccos \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2n}\arccos h\right)$ *и* $0<h\leqslant 1$.

Доказательство. Тригонометрический многочлен $P_n(t)$—четный, поэтому нули его $x_1^p<x_2^p<\cdots<x_n^p<x_{n+1}^p<\cdots<x_{2n}^p$ расположены в интервале $(-\pi, \pi)$ симметрично относительно нуля, то есть

$$-x_1^p=x_{2n}^p,\ -x_2^p=x_{2n-1}^p,\cdots,-x_n^p=x_{n+1}^p. \tag{8}$$

Следовательно, достаточно найти значения $x_{n+1}^p,\ x_{n+2}^p,\cdots,\ x_{2n}^p$. Приравниваем тригонометрический многочлен $P_n(t)$ к нулю и решаем полученное уравнение

$$\cos n \arccos\frac{\cos t-\cos^2\alpha_n}{1+\cos^2\alpha_n}=0.$$

Отсюда имеем

$$n\arccos\frac{\cos x_i^p-\cos^2\alpha_n}{1+\cos^2\alpha_n}=\frac{(2i-2n-1)\pi}{2},$$

где $i=n+1,\ n+2,\cdots.\ 2n,$ или

$$\frac{\cos x_i^p-\cos^2\alpha_n}{1+\cos^2\alpha_n}=\cos\frac{(2i-2n-1)\pi}{2n}.$$

Следовательно

$$x_i^p=\arccos\left((\cos^2\alpha_n+(1+\cos^2\alpha_n)\cos\frac{(2i-2n-1)\pi}{2n}\right),$$

где $i=n+1,\ n+2,\cdots,\ 2n$. Лемма 3 доказана.

Определение 1. *Будем говорить, что тригонометрический многочлен $M(t)$ эквивалентен тригонометрическому многочлену $N(t)$, если существуют два вещественных числа a и b такие, что $-\pi\leqslant b\leqslant\pi$ и $M(t)\equiv aN(t+b)$. В противном случае будем говорить, что тригонометрический многочлен $M(t)$ не эквивалентен тригонометрическому многочлену $N(t)$. Заметим, что если $M(t)$ эквивалентен $N(t)$, то*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 2n}|x_i^m-x_{i+1}^m|=\max_{1\leqslant i\leqslant 2n}|x_i^n-x_{i+1}^n|$$

и

$$\min_{1\leqslant i\leqslant 2n}|x_i^m-x_{i+1}^m|=\min_{1\leqslant i\leqslant 2n}|x_i^n-x_{i+1}^n|,$$

где $x_{2n+1}^m=x_1^m+2\pi$ и $x_{2n+1}^n=x_1^n+2\pi$.

Теорема. *Величины $d_n[h]$, $D_n[h]$ в классе $W_n[h]$ достигаются соответственно на тригонометрических многочленах*

$$P_n(t)=\cos n \arccos\frac{\cos t-\cos^2 \alpha_n}{1+\cos^2 \alpha_n},$$

$$Q_n(t)=h \cos n \arccos\frac{\cos t-\cos^2 \beta_n}{\sin^2 \beta_n},$$

а также на эквивалентных им тригонометрических многочленах из класса $W_n(h)$ и равны

$$d_n[h]=2 \arccos\left(\cos^2 \alpha_n+(1+\cos^2 \alpha_n)\cos\frac{\pi}{2n}\right), \tag{9}$$

$$D_n[h]=2\left(\pi-\arccos\left(\cos^2 \beta_n+\sin^2 \beta_n \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)\right), \tag{10}$$

где $\alpha_n=\arccos \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2n}\arccos h\right)$, $\beta_n=2 \operatorname{arctg}\sqrt[2n]{\frac{1}{h}-\sqrt{\frac{1}{h^2}-1}}$

и $0<h\leqslant 1$.

Доказательство. Согласно лемме 1 величина $d_n[h]$ в классе $W_n(h)$ достигается, покажем, что она достигается на многочлене $P_n(t)$ и на многочленах из класса $W_n(h)$, эквивалентных многочлену $P_n(t)$.

В зависимости от величины экстремальных значений многочлены из класса $W_n(h)$ разобьем на три подкласса W_1, W_2 и W_3 следующим образом. Тригонометрический многочлен $T_n(t)$ из класса $W_n(h)$ с экстремальными значениями $T_n(y_1^t)$, $T_n(y_2^t), \cdots$, $T_n(y_{2n}^t)$ в точках $-\pi\leqslant y_1^t<y_2^t<\cdots<y_{2n}^t<\pi$ отнесем к подклассу W_1, если

$|T_n(y_i^t)|=h$, $|T_n(y_j^t)|=1$, при $j=1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, 2n$ и $1\leqslant i\leqslant 2n$; отнесем к подклассу W_2, если $h<|T_n(y_j^t)|<1$ при $j=1, 2, \cdots, 2n$; отнесем к подклассу W_3 все те тригонометрические многочлены из класса $W_n(h)$, которые не вошли в подклассы W_1 и W_2. Из определения подклассов W_1, W_2 и W_3 следует, что подклассы W_1, W_2, W_3 попарно не пересекаются и $W_1 \cup W_2 \cup W_3=W_n(h)$.

В подклассе W_2 величина $d_n[h]$ не может достигаться. Предполагая противное, допустим, что $d_n[h]$ достигается на некотором многочлене $R_n(t)\in W_2$, что есть

$$d_n[h]=\min_{1\leqslant j\leqslant 2n}|x_j^r-x_{j+1}^r|=x_{i+1}^r-x_i^r,$$

где $x_{2n+1}^r=x_1^r+2\pi$ и x_i^r и $x_{i\pm1}^r$ — последовательные нули тригонометрического многочлена $R_n(t)$, принадлежащие интервалу $(-\pi, \pi)$. Между двумя последовательными нулями x_i^r и x_{i+1}^r многочлена $R_n(t)\in W_2$ находится одна точка его экстремума y_{i+1}^r с экстремальным значением $R_n(y_{i+1}^r)$ таким, что

$$-1<R_n(y_{i+1}^r)<-h \text{ или } h<R_n(y_{i+1}^r)<1.$$

Для определенности будем считать, что $h < R_n(y^r_{i+1}) < 1$ в точке y^r_{i+1}. В классе $W_n(h)$ рассмотрим многочлен $S_n(t)$, эксремальные значения $S_n(y^s_1), S_n(y^s_2), \cdots, S_n(y^s_{2n})$, в точках экстремумов $-\pi \leqslant y^s_1 < y^s_2 < \cdots < y^s_{2n} < \pi$ которого связаны с экстремальными значениями $R_n(y^r_1), R_n(y^r_2), \cdots, R_n(y^r_{2n})$ в точках экстремумов $-\pi \leqslant y^r_1 < y^r_2 < \cdots < y^r_{2n} < \pi$ многочлена $R_n(t) \in W_2$ соотношениями

$$S_n(y^s_j) = R_n(y^r_j)$$

при $j=1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, 2n$, $S_n(y^s_i) = h < R_n(y^r_i)$, $S'_n(y^s_j) = 0$ при $j=1, 2, \cdots, 2n$ и $y^s_1 = y^r_1$. Согласно теореме А в классе $W_n(h)$ существует такой многочлен $S_n(t)$ и он единственный. Многочлены $R_n(t)$ и $S_n(t)$ удовлетворяют условиям (1) теоремы B. Поэтому, если x^s_i и x^s_{i+1} являются последовательными i-ым и $(i+1)$-ым нулями многочлена $S_n(t)$, принадлежащими интервалу $(-\pi, \pi)$, то согласно неравенствам (2) из теорамы B имеем $x^r_i < x^s_i$ и $x^s_{i+1} < x^r_{i+1}$;

отсюда следует

$$x^s_{i+1} - x^s_i < x^r_{i+1} - x^r_i = d_n[h],$$

а это противоречит допущению. Значит $d_n[h]$ на подклассе W_2 класса $W_n(h)$ не может достигаться.

Покажем, что $d_n[h]$ не может достигаться также на многочлнах из подкласса W_3 класса $W_n(h)$. Пусть, наоборот, величина $d_n[h]$ достигается на тригонометрическом многочлене $M_n(t) \in W_3$, то есть

$$d_n[h] = \min_{1 \leqslant j \leqslant 2n} |x^m_j - x^m_{j+1}| = x^m_{k+1} - x^m_k,$$

где $x^m_{2n+1} = x^m_1 + 2\pi$ и x^m_k и x^m_{k+1} — последовательные k-ый и $(k+1)$-ый нули многочлена $M_n(t)$, принадлежащие интервалу $(-\pi, \pi)$. Пусть $y^m_1 < y^m_2 < \cdots < y^m_{2n}$ — точки экстремума из промежутка $[-\pi, \pi)$ и $M_n(y^m_1), M_n(y^m_2), \cdots, M_n(y^m_{2n})$ — экстремальные значения многочлена $M_n(t) \in W_3$. Тогда хотя бы в одной точке экстремума y^m_l, $1 \leqslant l \leqslant 2n$, его экстремальное значение $M_n(y^m_l)$ должно удовлетворять наравенству

$$-1 < M_n(y^m_l) < -h \text{ или } h < M_n(y^m_l) < 1 \tag{11}$$

согласно определению подкласса W_3, которому принадлежит $M_n(t)$.

Ход дальнейших рассуждений зависит от взаимного расположения экстремальной точки y^m_l и последовательных нулей x^m_k, x^m_{k+1} многочлена $M_n(t)$. В промежутке $[-\pi, \pi)$ возможны следующие взаимные расположения y^m_l и $x^m_k < x^m_{k+1}$:

$$x^m_k < y^m_k < x^m_{k+1}, \text{ при } l=k \text{ и } l=1, 2, \cdots, 2n;$$

$$y^m_l < x^m_k < x^m_{k+1}, \text{ при } 1 \leqslant l < k \leqslant 2n;$$

$$x_k^m < x_{k+1}^m < y_l^m, \text{ при } 2 < k+1 \leqslant l \leqslant 2n.$$

В случае, когда $\qquad x_k^m < y_k^m < x_{k+1}^m$ при $l = k$,

повторяя для многочлена $M_n(t)$ рассуждения, проведенные выше относительно многочлена $K_n(t)$, получим, что величина $d_n[h]$ не может достигаться на многочлене $M_n(t) \in W_3$. Случаи $y_l^m < x_k^m < x_{k-1}^m$, при

$$1 \leqslant l \leqslant k < 2n \text{ и } x_k^m < x_{k+1}^m < y_l^m, \text{ при } 1 \leqslant k < l < 2n$$

с учетом неравенств (11) разбираются единообразно, поэтому мы ограничимся разбором случая, когда $y_l^m < x_k^m < x_{k+1}^m$, при $1 \leqslant l \leqslant k < 2n$ и $h < M_n(y_l^m) < 1$. По теореме A в классе $W_n(h)$ существует единственный тригонометрический многочлен $T_n(t)$, экстремальные значения $T_n(y_1^t)$, $T_n(y_2^t), \cdots$, $T_n(y_{2n}^t)$ в точках экстремумов $-\pi < y_1^t < y_2^t < < \cdots < y_{2n}^t < \pi$ которого связаны с экстремальными значениями $M_n(y_1^m)$, $M_n(y_2^m), \cdots$, $M_n(y_{2n}^m)$ многочлена $M_n(t) \in W_3$ следующим образом: $T_n(y_j^t) = M_n(y_j^m)$, при $j=1, 2, \cdots, l-1, \; l+1, \cdots, 2n$, $T_n(y_l^t) = h < M_n(y_l^m)$ и $y_1^t = y_1^m$. Многочлены $T_n(t) \in W_n(h)$ и $M_n(t) \in W_3$ удовлетворяют условиям (1) теоремы B. Следовательно, по теореме B в силу (3), нули x_k^m, x_{k+1}^m многочлена $M_n(t) \in W_3$ и нули x_k^t, x_{k+1}^t многочлена $T_n(t) \in W_n(h)$ удовлетворяют неравенствам

$$x_k^t - x_k^m > x_{k+1}^t - x_{k+1}^m \text{ или } x_{k+1}^t - x_k^t < x_{k+1}^m - x_k^m;$$

отсюда следует, что

$$d_n[h] = x_{k+1}^m - x_k^m > x_{k+1}^t - x_k^t,$$

поэтому допущение неверно, то есть $d_n[h]$ не может достигаться на подклассе W_3. Таким образом, мы показали, что $d_n[h]$ на многочленах из подклассов W_2 и W_3 класса $W_n(h)$ не может достигаться. Поэтому, если учесть лемму 1, то величина $d_n[h]$ достигается на подклассе W_1. Из проведенных выше рассуждений усматривается, что $d_n[h]$ достигается на многочлене $S_n(t)$ из класса $W_n(h)$ для нулей x_l^s и x_{l+1}^s из промежутка $[-\pi, \pi)$, у которого экстремальные значения $S_n(y_1^s)$, $S_n(y_2^s), \cdots$, $S_n(y_{2n}^s)$ в точках его экстремумов $-\pi \leqslant y_1^s < y_2^s < < \cdots < y_{2n}^s < \pi$ таковы, что

$$\begin{aligned} S_n(y_i^s) &= \pm(-1)^i, \text{ при } i = 1, 2, \cdots l-1, \; l+1, \cdots, 2n, \\ S_n(y_l^s) &= \pm(-1)^l h, \text{ при } i = l, \text{ где } 1 \leqslant l < 2n, \end{aligned} \tag{12}$$

кроме того, ввиду замечания к определеню 1, $d_n[h]$ достигается также на многочленах из класса $W_n(h)$, эквивалентных многочлену $S_n(t)$. Многочлен $P_n(t)$ из класса $W_n(h)$ принадлежит подклассу W_1 и из определения подкласса W_1 класса $W_n(h)$ и определения 1 вытекает, что подкласс W_1 состоит только из многочленов класса $W_n(h)$, которые эквивалентны многочлену $P_n(t)$. Поэтому многочлен $S_n(t)\in \in W_1$, для которого выполнены равенства (12), эквивалентен многочлену $P_n(t)\in W_1$ и $d_n[h]$ достигается на тригонометрическом многочлене $P_n(t)$ для нулей x_n^p и x_{n+1}^p, другими словами, $d_n[h]=x_{n+1}^p-x_n^p$. Принимая во внимание равенства (7) и четность тригонометрического многочлена $P_n(t)$, для $d_n[h]$ получим

$$d_n[h]=2x_{n+1}^p=2\arccos\left(\cos^2\alpha_n+(1+\cos^2\alpha_n)\cos\frac{\pi}{2n}\right).$$

Тем самым мы показали, что в классе $W_n(h)$ величина $d_n[h]$ достигается на многочлене $P_n(t)$ и на всех многочленах из класса $W_n(h)$, эквивалентных многочлену $P_n(t)$, и значение величины $d_n[h]$ определяется равенством (9).

В [1] доказано, что величина $D_n[h]$ в классе $W_n(h)$ достигается на тригонометрическом многочлене $Q_n(t)$, на всех тригонометрических многочленах из класса $W_n(h)$, эквивалентных тригонометрическому многочлену $Q_n(t)$, и равна (10). Теорема доказана.

Следствие 1. *При любом $i=1, 2, \cdots, 2n-1$ разность $x_{i+1}^t-x_i^t$ между последовательными i-ым и $(i+1)$-ым нулями x_i^t и x_{i+1}^t любого тригонометрического многочлена $T_n(t)\in W_n(h)$ удовлетворяет следующим неравенствам:*

$$2\arccos\left(\cos^2\alpha_n+(1+\cos^2\alpha_n)\cos\frac{\pi}{2n}\right)\leqslant x_{i+1}^t-x_i^t\leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\pi-\arccos\left(\cos^2\beta_n+\sin^2\beta_n\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)\right),$$

где $\alpha_n=\arccos \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2n}\arccos h\right)$, $\beta_n=2\operatorname{arctg}\sqrt[2n]{\frac{1}{h}-\sqrt{\frac{1}{h^2}-1}}$,

$$0<h\leqslant 1 \text{ и } i=1, 2, \cdots, 2n-1.$$

Дагестанский государственный
университет им. Ленина

Поступила 16. VI. 1987

Վ. Գ. ՎԵՐԴԻԵՎ. Եռանկյունաչափական բազմանդամների մի դասի հաջորդական զրոների մաքսիմալ և մինիմալ շեղումները (*ամփոփում*)

Հոդվածում լուծված են էքստրեմալ խնդիրներ, որոնք կապված են որոշ եռանկյունաչափական բազմանդամների հաջորդական զրոների մաքսիմալ և մինիմալ շեղումների հետ

V. G. VERDIEV. *On maximal and minimal divergence of sequential zeros of trigonometrical polynomials* (summary)

In this article extremal problems connected with maximal and minimal divergence of sequential zeros of certain trigonometrical polynomials are solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Г. Вердиев*. О плотности множества точек максимального отклонения при наилучшем приближении непрерывных периодических функций, Изв. АН АрмССР, сер. матем., 10, № 5, 1975, 445—454.
2. *В. С. Виденский*. Существование и единственность решения одной интерполяционной задачи. Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций, Сб. научных трудов Ленинградского механического института, № 50, 1966, 29—41.
3. *В. С. Виденский*. О построении многочлена по данной последовательности его экстремумов, Современные проблемы теории аналитических функций, М., Наука, 1966, 62—64.