ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXI, № 1, 1986 Математика

УДК 517.95

А. О. ОГАНЕСЯН

ПОСТРОЕНИЕ ПАРАМЕТРИКСА ЗАДАЧИ КОШИ С ВЕСОМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Известно [1], что задача Коши для гиперболических уравнений (даже в случае, когда корни характеристического уравнения не только действительны, но и различны) с неограниченными коэффициентами не всегда корректно поставлена. Для таких уравнений оказывается естественной постановка задачи Коши с некоторыми весовыми функциями. Такие задачи изучались, например, в работах [2]—[5]. В этих работах доказывалась корректность задачи Коши в соответствующей весовой постановке. Задача Коши с весом для симметрических систем рассмотрена в [6].

В настоящей работе строится параметрикс задачи Коши с весом для уравнения второго порядка, главная часть которого является строго гиперболическим оператором, а младшие коэффициенты не ограничены в окрестности начальной гиперплоскости.

§ 1. Постановка задачи. Формулировка основного результата

Рассмотрим следующую задачу Коши с весом:

$$Pu \equiv D_t^2 u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) D_i D_j u + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x) D_i u +$$

$$+ \frac{1}{t} b(t,x) D_t u + \frac{1}{t^2} c(t,x) u = 0 \quad (0 < t < T,\ x \in R^n), \tag{1.1}$$

$$\left(\Phi(t,x) u - \sum_{k_1=1}^{N_1} F_{k_1}(f_1)(t,x) - \sum_{k_2=1}^{N_2} G_{k_2}(f_2)(t,x) \right)\Bigg|_{t=0} = f_1, \tag{1.2}$$

$$R(t,x) D_t \left(\Phi(t,x) u - \sum_{k_1=1}^{N_1} F_{k_1}(f_1)(t,x) - \sum_{k_2=1}^{N_2} G_{k_2}(f_2)(t,x) \right)\Bigg|_{t=0} = f_2,$$

где функции a_{ij}, a_i $(i, j=1,\cdots,n)$, b, c бесконечно дифференцируемы в $\overline{R}_+ \times R^n$, $f_l \in E'(R^n)$, $l=1, 2$, а весовые функции $\Phi(t,x)$, $R(t,x)$ и символы интегральных операторов Фурье F_{k_1} $(k_1=1,\cdots,N_1)$, G_{k_2} $(k_2=1,\cdots,N_2)$ определяются коэффициентами уравнения (1.1).

Предполагается, что существуют положительные числа γ_1, γ_2, такие, что

$$\gamma_1 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\xi_i\xi_j \leqslant \gamma_2 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \quad (x, \xi \in R^n). \tag{1.3}$$

Кроме того пусть

$$\operatorname{Im} \sum_{j=1}^{n} a_j(0, x)\xi_j / a(x, \xi) \text{ и } \operatorname{Im} b(0, x) \tag{1.4}$$

ограничены при $x \in R^n$, $\xi \in R^n \diagdown 0$, где

$$a(t, x, \xi) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\xi_i\xi_j\right)^{1/2}, \quad a(x, \xi) = a(0, x, \xi).$$

В дальнейшем, для избежания громоздкости изложения, подробно будет рассмотрен случай, когда $F_{k_1} = 0$ $(k_1 = 1, \cdots, N_1)$, $G_{k_2} = 0$ $(k_2 = 1, \cdots, N_2)$. Изучение задачи (1.1)—(1.2) в случае, когда $F_{k_1} \neq 0$, $G_{k_2} \neq 0$, проводится по аналогичной схеме с небольшой разницей в определении весовых функций $R(t, x)$, $\Phi(t, x)$ и пространства символов интегральных операторов Фурье, о чем будут сделаны замечания по ходу изложения.

Для формулировки основного результата введем некоторые обозначения. Обозначим через $s(x)$ один из корней уравнения

$$s^2 - (1 - ib(0, x))s - c(0, x) = 0, \tag{1.5}$$

и пусть

$$\beta(x) = ib(0, x) + 2s(x),$$

$$\mu_\sigma(x) = \frac{i\sigma}{2} \sum_{j=1}^{n} a_j(0, x)\xi_j / a(x, \xi) + \frac{1}{2}\beta(x) \quad (\sigma^2 = 1), \tag{1.6}$$

$$m(\sigma) = \sup_{x \in R^n, \xi \in R^n \diagdown 0} (-\operatorname{Re} \mu_\sigma).$$

Определение 1.1. Для действительных чисел m и k обозначим через $S^{m,k}$ пространство бесконечно дифференцируемых на $R_+ \times R^n \times R^n$ функций $p(t, x, \xi)$ таких, что для любого целого числа $l \geqslant 0$, мультииндексов α, δ, действительного числа $T > 0$ и компакта $K \subset R^n$ имеет место неравенство

$$|D_t^l D_x^\alpha D_\xi^\delta t^{-s(x)} p(t, x, \xi)| \leqslant c(1 + |\xi|)^{m - |\delta|}(|\xi|^{-1} + t)^{k - l} \tag{1.7}$$

для $x \in K$, $t \in (0, T)$, $|\xi| > 1$. Постоянная c зависит от l, α, δ, T, K.

Определение 1.1′. Для действительного числа k обозначим через S^k пространство бесконечно дифференцируемых на $R_+ \times R^n \times R^n$ функций $p(t, x, \xi)$ таких, что для любого целого числа $l \geqslant 0$, мультииндексов α, δ, действительного числа $T > 0$ и компакта $K \subset R^n$ имеет место неравенство

$$|D_t^l D_x^\alpha D_\xi^\delta p(t, x, \xi)| \leqslant c(1 + |\xi|)^{k - |\delta|}$$

для $x \in K$, $t \in (0, T)$, $|\xi| > 1$. Постоянная c зависит от l, α, δ, T, K.

Пусть функции $\varphi_\sigma(t, x, \xi)$ $(\sigma^2 = 1)$ являются решениями следующих задач:

$$\varphi_{\sigma t} = \sigma\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\varphi_{\sigma x_i}\varphi_{\sigma x_j}\right)^{1/2}, \tag{1.8}$$

$$\varphi_\sigma|_{t=0} = \langle x, \xi \rangle. \tag{1.9}$$

Основным результатом работы является

Теорема 1.1. *Пусть* $0 < \operatorname{Re}\beta(x) < 1$, $\gamma = \sup\limits_{x \in R^n} \operatorname{Re}\beta(x)$ *и* $T > 0$ *достаточно мало. Тогда существуют символы*

$$\begin{aligned} &p_{1\sigma}(t, x, \xi) \in S^{m(\sigma)+\varepsilon,\, m(\sigma)+\varepsilon}, \\ &p_{2\sigma}(t, x, \xi) \in S^{m(\sigma)+\varepsilon+\gamma-1,\, m(\sigma)+\varepsilon}, \\ &\tilde{p}_{1\sigma}(t, x, \xi) \in S^{m(\sigma)+\varepsilon}, \\ &\tilde{p}_{2\sigma}(t, x, \xi) \in S^{m(\sigma)+\varepsilon+\gamma-1} \end{aligned} \tag{1.10}$$

(ε — *произвольное положительное число,* $(t, x, \xi) \in (0, T) \times R^n \times R^n$, $\sigma^2 = 1$) *такие, что*

$$E(f_1, f_2)(t, x) = \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{l=1}^{2} (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n \times R^n} e^{i[\varphi_\sigma - \langle y, \xi\rangle]} p_{2\sigma}(t, x, \xi) f_l(y)\, dy d\xi +$$

$$+ \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{l=1}^{2} \int\limits_{R^n \times R^n} e^{i[\varphi_\sigma - \langle y, \xi\rangle]} \tilde{p}_{l\sigma}(t, x, \xi) f_l(y)\, dy d\xi \tag{1.11}$$

является параметриксом задачи (1.1)—(1.2) *при* $\Phi(t, x) = t^{-s(x)}$, $R(t, x) = t^{\beta(x)}$, $F_{k_1} = 0$ $(k_1 = 1, \cdots, N_1)$, $G_{k_2} = 0$ $(k_2 = 1, \cdots, N_2)$, *то есть функция* $E(f_1, f_2)(t, x)$ *удовлетворяет уравнению* (1.1) *в* $(0, T) \times R^n$ *с точностью до функций из класса* $C^\infty((0, T) \times R^n)$ *и условиям* (1.2) *с точностью до функций из класса* $C^\infty(R^n)$.

Замечание 1.1. Если $k < \operatorname{Re}\beta(x) < k+1$, где $k \neq 0$ целое число, то F_{k_1}, G_{k_2}, вообще говоря, отличны от нуля (см. пример 2°).

Рассмотрим функцию

$$E_0(f_1, f_2)(t, x) = E_1(f_1)(t, x) + E_2(f_2)(t, x), \tag{1.12}$$

где

$$E_l(f_l)(t, x) = \sum_{\sigma=\pm 1} (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n \times R^n} e^{i[\varphi_\sigma - \langle y, \xi\rangle]} p_{l\sigma}(t, x, \xi) f_l(y)\, dy d\xi, \tag{1.13}$$

$$(l = 1, 2).$$

Подействуем оператором P на функцию $E_0(f_1, f_2)(t, x)$

$$PE_0(f_1, f_2)(t, x) = \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{l=1}^{2} (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n \times R^n} e^{i[\varphi_\sigma - \langle y, \xi\rangle]} \hat{P}_\sigma p_{l\sigma}(t, x, \xi) f_l(y)\, dy d\xi, \tag{1.14}$$

где

$$\hat{P}_\sigma = D_t^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x) D_i D_j + \frac{1}{t} b(t, x) D_t + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} a_i(t, x) D_i +$$

$$+ \frac{1}{t^2} c(t, x) - 2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x) \varphi_{\sigma x_i} D_j + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x) \varphi_{\sigma x_i x_j} +$$

$$+\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n} a_i(t, x)\varphi_{\sigma x_i}+\frac{1}{t}b(t, x)\varphi_{\sigma t}-i\varphi_{\sigma tt}+2\varphi_{\sigma t}D_t. \tag{1.15}$$

Обозначим через $\rho=(-1, 1,\cdots, 1)$ $(n+1)$-мерный вектор.

Определение 1.2. Функция $r(t, x, \xi)$ называется ρ-квазиоднородной порядка l, если

$$r(\lambda^{-1}t, x, \lambda\xi)=\lambda^{l}r(t, x, \xi)\quad(\lambda>0).$$

Функции $p_{l\sigma}$ ($l=1, 2$; $\sigma^2=1$) будем искать в виде формальных сумм ρ-квазиоднородных функций, порядок которых определяется в дальнейшем

$$p_{l\sigma}(t, x, \xi)=\sum_{k=0}^{\infty}p_{l\sigma}^{k}(t, x, \xi). \tag{1.16}$$

Разлагая коэффициенты операторов $\widehat{P}_\sigma$ $(\sigma^2=1)$ в формальные ряды по степеням t, представим их в виде

$$\widehat{P}_\sigma=\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{P}_\sigma^{k}, \tag{1.17}$$

где порядок ρ-квазиоднородности операторов $\widehat{P}_\sigma^{k}$ равен $2-k$. В частности

$$\widehat{P}_\sigma^{0}=D_t^2+2\sigma a(x, \xi)D_t+\frac{1}{t}b(0, x)D_t+\frac{1}{t}b(0, x)\sigma a(x, \xi)+$$

$$+\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n}a_i(0, x)\xi_i+\frac{1}{t^2}c(0, x). \tag{1.18}$$

В новых обозначениях функцию $PE_0(f_1, f_2)(t, x)$ можно записать в виде

$$PE_0(f_1, f_2)(t, x)=\sum_{\sigma=\pm 1}\sum_{l=1}^{2}(2\pi)^{-n}\int\limits_{R^n\times R^n}e^{i[\varphi_\sigma-\langle y, \xi\rangle]}\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k+j=s}\widehat{P}_\sigma^{k}\,p_{l\sigma}^{j}(t, x, \xi)f_l(y)\,dy\,d\xi. \tag{1.19}$$

Выберем функции $p_{l\sigma}^{j}$ так, чтобы они являлись решениями уравнений

$$\sum_{k+j=s}\widehat{P}_\sigma^{k}\,p_{l\sigma}^{j}(t, x, \xi)=0,\ s=0, 1,\cdots;\ \sigma^2=1;\ l=1, 2. \tag{1.20}$$

В частности, для функций $p_{l\sigma}^{0}$ получаем

$$\widehat{P}_\sigma^{0}p_{l\sigma}^{0}(t, x, \xi)=0. \tag{1.21}$$

Для того, чтобы функция $E_0(f_1, f_2)$ с точностью до гладких функций удовлетворяла бы условиям (1.2), достаточно, чтобы функции $p_{l\sigma}^{j}$ удовлетворяли следующим начальным условиям:

$$\left(\Phi(t, x)\sum_{\sigma=\pm 1}p_{1\sigma}^{0}(t, x, \xi)-\sum_{k_1=1}^{N_1}\varphi_{k_1}^{0}(t, x, \xi)\right)\Bigg|_{t=0}=1,$$

$$R(t, x)\sum_{\sigma=\pm 1}\left[\varphi_{\sigma l}\left(\Phi(t, x)\; p^0_{1\sigma}(t, x, \xi)-\sum_{k_1=1}^{N_1}\varphi^0_{k_1}(t, x, \xi)\right)+\right.$$
$$\left.+D_t\left(\Phi(t, x)\, p^0_{1\sigma}(t, x, \xi)-\sum_{k_1=1}^{N_1}\varphi^0_{k_1}(t, x, \xi)\right)\right]\Bigg|_{t=0}=0,$$
$$\left(\Phi(t, x)\sum_{\sigma=\pm 1}p^0_{2\sigma}(t, x, \xi)-\sum_{k_2=1}^{N_2}g^0_{k_2}(t, x, \xi)\right)\Bigg|_{t=0}=0, \tag{1.22}$$
$$R(t, x)\sum_{\sigma=\pm 1}\left[\varphi_{\sigma l}\left(\Phi(t, x)\, p^0_{2\sigma}(t, x, \xi)-\sum_{k_2=1}^{N_2}g^0_{k_2}(t, x, \xi)\right)+\right.$$
$$\left.+D_t\left(\Phi(t, x)\, p^0_{2\sigma}(t, x, \xi)-\sum_{k_2=1}^{N_2}g^0_{k_2}(t, x, \xi)\right)\right]\Bigg|_{t=0}=1,$$
$$\left(\Phi(t, x)\sum_{\sigma=\pm 1}p^j_{l\sigma}(t, x, \xi)-\sum_{k_l=1}^{N_l}\varphi^j_{k_l l}(t, x, \xi)\right)\Bigg|_{t=0}=0, \tag{1.23}$$
$$R(t, x)\sum_{\sigma=\pm 1}\left[\varphi_{\sigma l}\left(\Phi(t, x)\; p^j_{l\sigma}(t, x, \xi)-\sum_{k_l=1}^{N_l}\varphi^j_{k_l l}(t, x, \xi)\right)+\right.$$
$$\left.+D_t\left((\Phi(t, x)\; p^j_{l\sigma}(t, x, \xi)-\sum_{k_l=1}^{N_l}\varphi^j_{k_l l}(t, x, \xi)\right)\right]\Bigg|_{t=0}=0,$$
$$l=1, 2,\ j=1, 2, \cdots.$$

Таким образом, поведение функций $p^j_{l\sigma}$ при $t\to 0$ определяет весовые функции $\Phi(t, x)$, $R(t, x)$ и символы интегральных операторов Фурье F_{k_1} и G_{k_2}, которые имеют те же фазовые функции, что и операторы E_l $(l=1, 2)$.

Построение параметрикса проводится в два этапа:

1. Задача (1.1)—(1.2) сводится к задаче с неоднородным уравнением, правая часть которого вместе со всеми производными по t обращается в нуль по модулю $S^{-\infty}$ при $t=0$ и однородными начальными условиями.

2. Строится параметрикс редуцированной на первом этапе задачи.

§ 2. Построение решений одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений

Для изучения решений уравнений (1.21) рассмотрим уравнения

$$Q_\sigma u_\sigma(t)\equiv\left[D^2_t+\left(\frac{1}{t}\,b(0, x)+2\sigma\right)D_t+\frac{1}{t}\sum_{l=1}^{n}a_l(0, x)\,\xi_l/a(x, \xi)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{t}\,\sigma b(0, x)+\frac{1}{t^2}\,c(0, x)\right]u_\sigma(t)=0,\ \sigma^2=1. \tag{2.1}$$

Замечание 2.1. Легко видеть, что уравнения (2.1) после замены переменных $t=a(x, \eta)\,\tau$, $\xi=\dfrac{\eta}{a(x, \eta)}$ переходят в уравнения (1.21).

Функции $u_\sigma(t)$ будем искать в виде $u_\sigma(t)=t^{s(x)}v_\sigma(t)$. Учитывая (1.5), (1.6), для функций $v_\sigma(t)$ получим

$$L_\sigma v_\sigma(t)\equiv\left[D_t^2+\frac{1}{t}(2\sigma t-i\beta(x)D_t-\frac{1}{t}2i\sigma\mu_\sigma\right]v_\sigma(t)=0. \qquad (2.2)$$

Замена переменной $t=\dfrac{i}{2\sigma}\tau$ сводит уравнения (2.2) к вырожденному гипергеометрическому уравнению [7]

$$\tau v_{\sigma\tau\tau}+(\beta-\tau)v_{\sigma\tau}-\mu_\sigma v_\sigma=0. \qquad (2.3)$$

Пусть $\beta(x)$ не является целым числом. Тогда оба корня уравнения (1.5) будут гладкими функциями переменной x. При $\sigma=1$ общее решение уравнения (2.2) можно записать в виде

$$v_1(t)=c_1\Phi(\mu_1,\beta;\ -2it)+c_2(-2it)^{1-\beta}\Phi(\mu_1-\beta+1,2-\beta;\ -2it), \qquad (2.4)$$

где $\Phi(\alpha,\varkappa;z)$ — функция Гумберта [7]. Следовательно

$$u_1(t)=t^{s(x)}[c_1\Phi(\mu_1,\beta;-2it)+c_2(-2it)^{1-\beta}\Phi(\mu_1-\beta+1,2-\beta;-2it). \qquad (2.5)$$

Из формулы (2.5) видно каким начальным условиям удовлетворяют решения уравнения (2.1). Так как выбор этих условий определяет начальные условия (1.2), то рассмотрим несколько примеров.

1°. Пусть $0<\mathrm{Re}\,\beta<1$. Тогда два линейно независимых решения уравнения (2.1)

$$u_{11}(t)=t^{s(x)}\Phi(\mu_1,\beta;\ -2it), \qquad (2.6)$$

$$u_{12}(t)=\frac{i}{1-\beta}t^{s(x)}\Phi(\mu_1-\beta+1,\ 2-\beta;\ -2it)\,t^{1-\beta}$$

удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$t^{-s(x)}u_{11}(t)|_{t=0}=1;\ t^{\beta(x)}D_t(t^{-s(x)}u_{11}(t))|_{t=0}=0;$$
$$t^{-s(x)}u_{12}(t)|_{t=0}=0;\ t^{\beta(x)}D_t(t^{-s(x)}u_{12}(t)|_{t=0}=1. \qquad (2.7)$$

2°. Пусть $N_2-N_1<\mathrm{Re}\,\beta<N_2-N_1+1$, где N_1, N_2 — произвольные неотрицательные целые числа. Тогда начальные условия на функции Au_{11} и Bu_{12} можно выбрать следующим образом:

$$\left(At^{-s(x)-N_1}u_{11}-A\sum_{q=0}^{N_1-1}\frac{1}{q!}\frac{d^q}{dt^q}\Phi(\mu_1,\beta;-2it)\Big|_{t=0}t^{q-N_1}\right)\Big|_{t=0}=1,$$

$$t^{-N_2+\beta(x)+N_1}D_t\Bigg(At^{-s(x)-N_1}u_{11}-$$
$$-A\sum_{q=0}^{N_1-1}\frac{1}{q!}\frac{d^q}{dt^q}\Phi(\mu_1,\beta;\ -2it)\Big|_{t=0}t^{q-N_1}\Bigg)\Big|_{t=0}=0,$$

$$\left(B\,t^{-s(x)-N_1}u_{12}-B\sum_{q=0}^{N_2-1}\frac{1}{q!}\frac{d^q}{dt^q}\Phi(\mu_1,\beta;-2it)\Big|_{t=0}t^{q+1-\beta-N_1}\right)\Big|_{t=0}=0,$$

$$t^{-N_2+\beta(x)+N_1}D_t\Big(Bt^{-s(x)-N_1}u_{12}-$$

$$-B\sum_{q=0}^{N_2-1}\frac{1}{q!}\frac{d^q}{dt^q}\Phi(\mu_1, \beta; -2it)\Big|_{t=0} t^{q+1-\beta-N_1}\Big)\Big|_{t=0}=1,$$

$$A=\frac{N_1!}{\frac{d^{N_1}}{dt^{N_1}}\Phi(\mu_1, \beta; -2it)\Big|_{t=0}},\quad B=\frac{(1-\beta)N_2!}{(N_2+1-\beta-N_1)\frac{d^{N_2}}{dt^{N_2}}\Phi(\mu_1, \beta; -2it)\Big|_{t=0}}.$$

Меняя местами функции u_{11} и u_{12}, можно получить другие начальные условия.

Так как в дальнейшем, для краткости изложения, подробно изучается случай 1°, будем считать, где надо, что выполнено условие $0<\operatorname{Re}\beta<1$. Преобразуем функции u_{11} и u_{12}, воспользовавшись известными соотношениями между вырожденными гипергеометрическими функциями $\Phi(\alpha, \varkappa; z)$ и $\Psi(\alpha, \varkappa; z)$. Учитывая, что $\mu_1+\mu_{-1}=\beta$ и $\Psi(\alpha, \varkappa, z)=z^{1-\varkappa}\Psi(\alpha-\varkappa+1, 2-\varkappa; z)$ получим

$$u_{11}(t)=t^{s(x)}\Big[\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\mu_{-1})}e^{-i\mu_1\pi}\Psi(\mu_1, \beta; -2it)+$$

$$+\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\mu_1)}e^{i\pi\mu_{-1}}e^{-2it}\Psi(\mu_{-1}, \beta; 2it)\Big],$$

$$u_{12}(t)=\frac{i}{1-\beta}t^{s(x)}\Big[\frac{\Gamma(2-\beta)}{(-2i)^{1-\beta}\Gamma(1-\mu_1)}e^{-i\pi(1-\mu_{-1})}\Psi(\mu_1, \beta; -2it)+$$

$$+\frac{\Gamma(2-\beta)}{(2i)^{1-\beta}\Gamma(1-\mu_{-1})}e^{i\pi(1-\mu_1)}e^{-2it}\Psi(\mu_{-1}, \beta; 2it)\Big].$$

Рассмотрим функции

$$w_1(t)=t^{s(x)}\sum_{\sigma=\pm1}c_{1\sigma}\psi_\sigma(t),$$
$$w_2(t)=t^{s(x)}\sum_{\sigma=\pm1}c_{2\sigma}\psi_\sigma(t), \tag{2.8}$$

где

$$c_{1\sigma}=\frac{\Gamma(\beta)}{2^{\mu_\sigma}\Gamma(\mu_{-\sigma})}e^{-i\mu_\sigma\pi/2},\quad c_{2\sigma}=\frac{i}{(1-\beta)}\frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(1-\mu_\sigma)2^{(1-\mu_\sigma)}}e^{-i\sigma(1-\mu_\sigma)\pi/2},$$

$$\psi_\sigma(t)=\Psi(\mu_\sigma, \beta; -2i\sigma t)2^{\mu_\sigma}e^{-i\pi\sigma\mu_\sigma/2}. \tag{2.9}$$

Непосредственные вычисления показывают, что функции $w_1(t)$ и $w_2(t)$ удовлетворяют тем же начальным условиям, что и функции $u_{11}(t)$, $u_{12}(t)$ соответственно. С другой стороны, функции $t^{s(x)}\psi_1(t)$ и $t^{s(x)}\psi_{-1}(t)$ являются решениями уравнений (2.1) при $\sigma=1$ и $\sigma=-1$ соответственно.

Учитывая замечание 2.1, получим, что функции

$$p_{1\sigma}^0(t, x, \xi)=t^{s(x)}c_{1\sigma}\Psi(\mu_\sigma, \beta; -2i\sigma a(x, \xi)t), \tag{2.10}$$

$$p_{2\sigma}^0(t, x, \xi)=t^{s(x)}c_{2\sigma}\Psi(\mu_\sigma, \beta; -2i\sigma a(x, \xi)t)\cdot a(x, \xi)^{\beta-1} \tag{2.11}$$

являются решениями уравнений (1.21), которые удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$\sum_{\sigma=\pm1}t^{-s(x)}p_{1\sigma}^0\Big|_{t=0}=1, \tag{2.12}$$

$$t^{\beta(x)} \sum_{\sigma=\pm 1} [\varphi_{\sigma l}\, t^{-s(x)}\, p^0_{1\sigma} + D_t\,(t^{-s(x)}\, p^0_{1\sigma})]\Big|_{t=0} = 0,$$

$$\sum_{\sigma=\pm 1} t^{-s(x)}\, p^0_{2\sigma}\Big|_{t=0} = 0,$$

$$t^{\beta(x)} \sum_{\sigma=\pm 1} [\varphi_{\sigma l}\, t^{-s(x)}\, p^0_{2\sigma} + D_t\,(t^{-s(x)}\, p^0_{2\sigma})]\Big|_{t=0} = 1, \tag{2.13}$$

то есть условиям (1.22) с $\Phi(t, x) = t^{-s(x)}$, $R(t, x) = t^{\beta(x)}$,

$$\varphi^0_{k_1}(t, x, \xi) \equiv 0,\ k_1 = 1, \cdots, N_1;\ g^0_{k_2}(t, x, \xi) \equiv 0,\ k_2 = 1. \cdots, N_2.$$

Из уравнения (1.21) и начальных условий (2.12), (2.13) следует, что для $\lambda > 0$

$$p^0_{1\sigma}(\lambda^{-1} t, x, \lambda\xi) = \lambda^{-s(x)}\, p^0_{1\sigma}(t, x, \xi), \tag{2.14}$$

$$p^0_{2\sigma}(\lambda^{-1} t, x, \lambda\xi) = \lambda^{\beta(x) - s(x) - 1}\, p^0_{2\sigma}(t, x, \xi), \tag{2.15}$$

то есть функции $p^0_{1\sigma}$, $p^0_{2\sigma}$ являются ρ-квазиоднородными функциями порядка $-s(x)$ и $\beta(x) - s(x) - 1$ соответственно.

В уравнении (2.1) переменные x и $\xi/a(x, \xi)$ играют роль параметров. Обозначим через Ω многообразие, где меняются эти параметры. Пусть Σ—открытый сектор в $\mathbf{C} \setminus 0$ или на некоторой римановой поверхности над $\mathbf{C} \setminus 0$. Следуя [8], дадим

Определение 2.1. Для действительного числа ν обозначим через $O^\nu(\Sigma, \Omega)$ пространство функций $f(z, \omega)$, голоморфных по $z \in \Sigma$, бесконечно дифференцируемых по $\omega \in \Omega$, таких, что для любого дифференциального оператора Λ на Ω имеет место неравенство

$$|\Lambda f(z, \omega)| < c\,(1 + |z|)^\nu \tag{2.16}$$

для $z \in \Sigma'$, $|z| \geqslant 1$, $\omega \in K$. Здесь Σ' — любой замкнутый сектор в Σ, K — любой компакт в Ω, а постоянная c зависит от Σ', K, Λ.

Пусть функция $f(z, \omega)$ голоморфна в Σ и бесконечно дифференцируема в Ω, а $f^*(z, \omega)$—формальный ряд вида

$$f^*(z, \omega) = \sum_{j=0}^{J} (\log z)^j\, z^{\nu_j} \sum_{k=0}^{\infty} f_{jk}(\omega)\, z^{-k}. \tag{2.17}$$

Определение 2.2. Формальный ряд (2.17) называется асимптотическим представлением функции $f(z, \omega)$ в Σ, $f(z, \omega) \sim f^*(z, \omega)$, если для любого положительного целого числа N

$$f(z, \omega) - \sum_{j=0}^{J} (\log z)^j\, z^{\nu_j} \sum_{k=0}^{N} f_{jk}(\omega)\, z^{-k} \in O^{\varepsilon_N}(\Sigma, \Omega),$$

где $\lim\limits_{N \to \infty} \varepsilon_N = -\infty$.

Известно [7], что

$$\Psi(\alpha, x; z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\alpha)_n\,(\alpha - x + 1)_n}{n!}\, z^{-\alpha - n}, \tag{2.18}$$

где $-\dfrac{3}{2}\pi < \arg z < \dfrac{3}{2}\pi$, $(A)_n = \dfrac{\Gamma(A + n)}{\Gamma(A)}$.

Отсюда

$$\psi_\sigma(t) \sim \psi_\sigma^*(t) = t^{-\mu_\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-n}, \ \Sigma = \left\{ t \in \mathbf{C} \setminus 0;\ |\arg t| < \frac{\pi}{2} \right\}, \tag{2.19}$$

где

$$a_n = \frac{(-1)^n (\mu_\sigma)_n (\mu_\sigma - \beta + 1)_n}{n!} 2^{\mu_\sigma} e^{-i\pi\sigma\mu_\sigma/2} (-2i\sigma)^{-\mu_\sigma - s}.$$

Из (1.20) следует, что функции $p_{l\sigma}^k$, $k > 1$, $l = 1, 2$ являются решениями неоднородных уравнений. Для изучения их решений докажем

Предложение 2.1. *Пусть для достаточно большого целого числа $N > 0$*

$$g(t, \omega) \in O^{-N}(\Sigma, \Omega).$$

Тогда уравнение

$$Q_\sigma v_\sigma \equiv \left[D_t^2 + \left(\frac{1}{t} b(0, x) + 2\sigma \right) D_t + \frac{1}{t} \sum_{l=1}^{n} a_l(0, x) \xi_l / a(x, \xi) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma}{t} b(0, x) + \frac{1}{t^2} c(0, x) \right] v_\sigma(t, \omega) = t^{s(x)} g(t, \omega) \tag{2.20}$$

имеет решение

$$t^{-s(x)} v_\sigma(t, \omega) \in O^{-N+1+\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$—произвольное число.

Доказательство. Подставим в уравнение (2.20) $v_\sigma(t, \omega) = t^{s(x)} w_\sigma(t, \omega)$. Получим

$$L_\sigma w_\sigma \equiv \left[D_t^2 + \frac{1}{t} (2\sigma t - i\beta(x)) D_t - \frac{1}{t} 2i\sigma\mu_\sigma \right] w_\sigma = g. \tag{2.21}$$

Соответствующее однородное уравнение имеет линейно независимые решения

$$z_{1\sigma}(t) = \Phi(\mu_\sigma, \beta; -2i\sigma t),$$

$$z_{2\sigma}(t) = \frac{1}{1-\beta} \Phi(1 - \mu_{-\sigma}, 2 - \beta; -2i\sigma t) t^{1-\beta},$$

детерминант Вронского $W(t)$ которых удовлетворяет начальному условию

$$t^{\beta(x)} W(t)|_{t=0} = 1.$$

С другой стороны

$$W'(t) = -\frac{i}{t} (2\sigma t - i\beta(x)) W.$$

Поэтому

$$W(t) = t^{-\beta(x)} e^{-2i\sigma t}.$$

Уравнение (2.21) имеет решение

$$w_\sigma(t, \omega) = -\int_{\infty}^{t} W(\tau)^{-1} [z_{1\sigma}(t) z_{2\sigma}(\tau) - z_{1\sigma}(\tau) z_{2\sigma}(t)] g(\tau, \omega) d\tau.$$

Выразим функции $z_{1\sigma}$ и $z_{2\sigma}$ через функции $\psi_\sigma(t)$

$$z_{1\sigma}(t) = c_{1\sigma}\psi_\sigma(t) + c_{1-\sigma}\psi_{-\sigma}(t)e^{-2i\sigma t},$$
$$z_{2\sigma}(t) = -ic_{2\sigma}\psi_\sigma(t) - ic_{2-\sigma}\psi_{-\sigma}(t)e^{-2i\sigma t}.$$

Поэтому

$$w_\sigma(t, \omega) = -\int\limits_{\infty}^{t} \tau^{\beta(x)}[(c_{1\sigma}c_{2-\sigma} - c_{1-\sigma}c_{2\sigma})\psi_\sigma(t)\psi_{-\sigma}(\tau) +$$
$$+ (c_{1-\sigma}c_{2\sigma} - c_{1\sigma}c_{2-\sigma})\psi_\sigma(\tau)\psi_{-\sigma}(t)e^{-2i\sigma(t-\tau)}]\, g(\tau, \omega)\, d\tau =$$
$$= w_{1\sigma}(t, \omega) + w_{2\sigma}(t, \omega).$$

Из (2.19) следует, что $w_{1\sigma} \in O^{-N+1+\varepsilon}(\Sigma, \Omega)$. Выбрав пути интегрирования так, чтобы

$$\operatorname{Im}\sigma t \leqslant \operatorname{Im}\sigma\tau,$$

получим, что $w_{2\sigma} \in O^{-N+1+\varepsilon}(\Sigma, \Omega)$. Следовательно, $w_\sigma \in O^{-N+1+\varepsilon}$.

Предложение 2.2. *Пусть функция $h(t, \omega)$ имеет в секторе Σ следующее асимптотическое представление:*

$$h(t, \omega) \sim t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} h_k t^{-k}, \quad h_0 \neq 0.$$

Тогда если $(\nu + \mu_\sigma + 1)$ не является неотрицательным целым числом, то уравнение

$$Q_\sigma v_\sigma(t, \omega) = t^{s(x)} h(t, \omega) \tag{2.22}$$

имеет решение $v_\sigma(t, \omega)$, такое, что

$$t^{-s(x)} v_\sigma(t, \omega) \sim t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} v_k t^{-k},$$

где

$$v_k = -\frac{1}{2i\sigma(\mu_\sigma + \nu + 1 - k)}\{h_k + (\nu - k + 2)(\nu - k + 1 + \beta)\, v_{k-1}\}, \tag{2.23}$$
$$k = 0, 1, \cdots,$$
$$v_{-1} = 0.$$

Доказательство. Если v_σ удовлетворяет уравнению (2.22), то функция $w_\sigma = t^{-s} v_\sigma$ будет решением уравнения

$$L_\sigma w_\sigma = h.$$

Обозначим

$$h^*(t, \omega) = t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} h_k t^{-k},$$
$$\overset{*}{w}_\sigma(t, \omega) = t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} v_k t^{-k+1}$$

и докажем, что $\overset{*}{w}_\sigma(t, \omega)$ является формальным решением уравнения

$$L_\sigma \overset{*}{w}_\sigma(t, \omega) = h^*(t, \omega). \tag{2.24}$$

Подстановка $h^*(t, \omega)$ и $\overset{*}{w}_\sigma(t, \omega)$ в уравнение (2.24) приводит к реккурентным соотношениям

$$-(\nu-k+2)(\nu-k+1)v_{k-1}-\beta(\nu-k+2)v_{k-1}-$$
$$-2i\sigma(\nu-k+1+\mu_0)v_k=h_k,\ k=0,\ 1,\cdots,$$

откуда следует (2.23).

Пусть теперь

$$h(t,\ \omega)=t^{\nu}\sum_{k=0}^{N}h_k t^{-k}+H_N(t,\ \omega),$$

где $H_N(t,\ \omega)\in O^{\varepsilon_N}(\Sigma,\ \Omega)$, $\varepsilon_N\to-\infty$ при $N\to\infty$ и

$$w_0(t,\ \omega)=t^{\nu}\sum_{k=0}^{N}v_k t^{-k+1}+w_N(t,\ \omega).$$

Тогда

$$L_0 w_N(t,\ \omega)=H_N(t,\ \omega)+(\nu-N+1)(\nu-N)v_N t^{\nu-N+1}+$$
$$+\beta(\nu-N+1)v_N t^{\nu-N+1}.$$

Из предложения 2.1 легко получить, что

$$w_N(t,\ \omega)\in O^{\varepsilon'_N}(\Sigma,\ \Omega),$$

где

$$\varepsilon'_N=\max(\varepsilon_N+1+\varepsilon,\ \operatorname{Re}\nu-N+1).$$

Аналогичным образом доказываются и два следующих утверждения, которые приведем без доказательства.

Предложение 2.3. *Пусть $h(t,\ \omega)$ такая же функция, что и в предложении 2.2, а $m=\nu+\mu_0+1$ является неотрицательным целым числом. Тогда уравнение (2.22) имеет решение $v_0(t,\ \omega)$, такое, что*

$$t^{-s(x)}v_0(t,\ \omega)\sim t^{\nu}\sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{\infty}v_k t^{-k}+v_m\psi_0(t)\ln t,$$

где

$$v_k=\frac{1}{2i\sigma(k-m)}[h_k+(\nu-k+2)(\nu-k+1+\beta)v_{k-1}],\ k=0,\cdots,\ m-1,v_{-1}=0,$$

$$v_m=-\frac{1}{2i\sigma}[h_m+(\nu-m+2)(\nu-m+1+\beta)v_{m-1}],$$

$$v_{m+j}=\frac{1}{2ij\sigma}[h_{m+j}+(\nu-m-j+2)(\nu-m-j-1+\beta)v_{m+j-1}-$$
$$-v_m[a_{j-1}(2m-2\nu-2j-\beta-3)-2i\sigma a_j]],\ j\geqslant 1,$$

а a_j — коэффициенты асимптотического разложения функции $\psi_0(t)$.

Предложение 2.4. *Пусть $\overset{*}{h}_l(t,\ \omega)$, $l=0,\ 1,\ \cdots,\ L$ — формальные ряды вида*

$$\overset{*}{h}_l(t,\ \omega)=t^{\nu_l}\sum_{k=0}^{\infty}h_{lk}t^{-k},$$

а функция $h(t,\ \omega)$ в секторе Σ имеет следующее асимптотическое представление:

$$h(t,\ \omega)\sim\sum_{l=0}^{L}(\log t)^l\,\overset{*}{h}_l(t,\ \omega).$$

Тогда уравнение (2.22) *имеет решение* $v_\sigma(t, \omega)$ *такое, что*

$$t^{-s(x)} v_\sigma(t, \omega) \sim \sum_{l=0}^{L} \sum_{j=0}^{l+1} c_{l+1-j}^{l} (\log t)^{l} \psi_\sigma^{*}(t) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{L} \sum_{j=0}^{l} (\log t)^{j} t^{\nu_l} \sum_{k=0}^{\infty} w_{l-j,k}^{l} t^{-k+1},$$

где $c_{l+1-j}^{l} = 0$, *когда* $\nu_l + \mu_\sigma + 1$ *не является неотрицательным целым числом.*

Замечание 2.2. Из предложения 2.4, (2.8) и (2.19) следует, что, грубо говоря, решение v_σ уравнения

$$Q_\sigma v_\sigma = O(t^{\nu+\varepsilon+s})$$

имеет порядок

$$v_\sigma = O(t^{\nu+s+\varepsilon+1}) + \sum_{\sigma=\pm 1} O(t^{-\operatorname{Re}\mu_\sigma+s+\varepsilon})$$

при $t \to \infty$ в секторе Σ.

§ 3. Построение функций $p_{l\sigma}^{k}(t, x, \xi)$ $(l = 1, 2;\ k = 1, 2, \cdots;\ \sigma^2 = 1)$

Функции $p_{l\sigma}^{k}(t, x, \xi)$ $(l=1, 2;\ k=1, 2, \cdots;\ \sigma^2=1)$ определим как решения уравнений (1.20), удовлетворяющих начальным условиям (1.23) с $\Phi(t, x) = t^{-s(x)}$, $R_\sigma^{j}(t, x) = t^{\beta(x)}$, $\varphi_{2,l}^{j}(t, x, \xi) \equiv 0$, $j = 1, 2, \cdots$, $k_l = 1, \cdots, N_l$

Обозначим

$$r_{l\sigma}^{k,\,j-k}(t, x, \xi) = \widehat{P}_\sigma^{k} p_{l\sigma}^{j-k}(t, x, \xi), \tag{3.1}$$

$$r_{l\sigma}^{j}(t, x, \xi) = -\sum_{k=1}^{j} \widehat{P}_\sigma^{k} p_{l\sigma}^{j-k}(t, x, \xi). \tag{3.2}$$

Тогда уравнения (1.20) запишутся в виде

$$\widehat{P}_\sigma^{0} p_{l\sigma}^{k}(t, x, \xi) = r_{l\sigma}^{k}(t, x, \xi). \tag{3.3}$$

Предложение 3.1. *Для* $j = 0, 1, \ldots$

$$p_{1\sigma}^{j} \in S^{m(\sigma)+\varepsilon,\, m(\sigma)+j+\varepsilon}, \quad r_{1\sigma}^{k,\,j-k} \in S^{m(\sigma)-3+\varepsilon,\, m(\sigma)+j-1+\varepsilon}, \tag{3.4}$$

$$p_{2\sigma}^{j} \in S^{m(\sigma)+\varepsilon+\gamma-1,\, m(\sigma)+j+\varepsilon}, \quad r_{2\sigma}^{k,\,j-k} \in S^{m(\sigma)-4+\varepsilon+\gamma,\, m(\sigma)+j+\varepsilon}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть $j = 0$. Из (2.10) и асимптотического поведения функции $\Psi(\alpha, \varkappa; z)$ (2.19) следует, что на любом компакте $K \subset R^n$

$$|t^{-s(x)} p_{1\sigma}^{0}(t, x, \xi)| \leqslant c\,(a(x, \xi)\, t)^{m(\sigma)}.$$

Отсюда с учётом условия

$$a(x, \xi) \leqslant c\,|\xi|$$

получаем

$$|t^{-s(x)} p_{1\sigma}^{0}(t, x, \xi)| \leqslant c\,(1 + |\xi|)^{m(\sigma)} (|\xi|^{-1} + t)^{m(\sigma)}. \tag{3.6}$$

Дифференцируя (2.10) и (2.19) по соответствующим переменным, получаем

$$|D_t^l D_x^\alpha D_\xi^\beta t^{-s(x)} \overset{0}{p}_{1\sigma}(t, x, \xi)| \leqslant c(1+|\xi|)^{m(\sigma)-|\beta|+\varepsilon}(|\xi|^{-1}+t)^{m(\sigma)+\varepsilon-l}.$$

Аналогично из (2.11) и (2.19) следует оценка

$$|D_t^l D_x^\alpha D_\xi^\beta t^{-s(x)} \overset{0}{p}_{2\sigma}(t, x, \xi)| \leqslant c(1+|\xi|)^{m(\sigma)+\gamma-1+\varepsilon-|\beta|}(|\xi|^{-1}+t)^{m(\sigma)+\varepsilon-l}.$$

Согласно определению 1.1 $\overset{0}{p}_{1\sigma} \in S^{m(\sigma)+\varepsilon,\, m(\sigma)+\varepsilon}$, $\overset{0}{p}_{2\sigma} \in S^{m(\sigma)+\gamma-1+\varepsilon,\, m(\sigma)+\varepsilon}$.

Теперь докажем, что

$$t^{-s(x)} \overset{j}{p}_{1\sigma}(t, x, \omega) = c_j t^{-\mu_\sigma+j}(1+o(1)), \tag{3.7}$$

$$t^{-s(x)} r_{1\sigma}^{k,\, j-k}(t, x, \omega) = c_{jk} t^{-\mu_\sigma+j-1}(1+o(1)), k=1,\cdots, j, \tag{3.8}$$

где $\omega = \xi/a(x, \xi)$, $t \in \Sigma$, $o(1) = O^{\varepsilon-1}(\Sigma, \Omega)$, $\varepsilon > 0$—произвольное число.

Для $j=0$ (3.7) следует из (2.10) и (2.19). Для $j=k=1$ (3.8) следует из (3.1) и из вида оператора $\widehat{P}_\sigma^1$ в (1.17). Пусть (3.7) выполнено для $j < J$. Тогда из вида операторов $\widehat{P}_\sigma^k$ в (1.17) и (3.1) для $k=1,\cdots, J$ имеем

$$t^{-s(x)} r_{1\sigma}^{k,\, J-k}(t, x, \omega) = c_k' t^{k-1}(1+o(1))\, c_{J-k} t^{-\mu_\sigma+J-k}(1+o(1)) =$$
$$= c_{Jk} t^{-\mu_\sigma+J-1}(1+o(1)),$$

то есть (3.8) для $j=J$ и $k=1,\ldots, J$. Из (3.2), (3.3), предложения 2.4 и замечания 2.2 следует (3.7) для $j=J$.

Так как порядок ρ-квазиоднородности операторов $\widehat{P}_\sigma^k$ равен $2-k$ а функций $\overset{0}{p}_{1\sigma}$ — $(-s(x))$, то из уравнений (1.20) следует, что порядок ρ-квазиоднородности функций $\overset{j}{p}_{1\sigma}(t, x, \xi)$ равен $-s(x)-j$, функций $r_{1\sigma}^{k,\, j-k}$ — $(-2-s(x)-j)$. Поэтому

$$\overset{j}{p}_{1\sigma}(t, x, \xi) = [a(x, \xi)]^{-s(x)-j}\, \overset{j}{p}_{1\sigma}(a(x, \xi)\, t, x, \xi/a(x, \xi)),$$

$$r_{1\sigma}^{k,\, j-k}(t, x, \xi) = [a(x, \xi)]^{-2-s(x)-j}\, r_{1\sigma}^{k,\, j-k}(a(x, \xi)\, t, x, \xi/a(x, \xi)).$$

Отсюда с учетом (3.7) получаем

$$|t^{-s(x)} \overset{j}{p}_{1\sigma}(t, x, \xi)| = a(x, \xi)^{-j}[t\, a(x, \xi)]^{-s(x)}|\overset{j}{p}_{1\sigma}(a(x, \xi)\, t, x, \xi/a(x, \xi))| \leqslant$$
$$\leqslant c(1+|\xi|)^{m(\sigma)}(|\xi|^{-1}+t)^{m(\sigma)+j}.$$

Аналогично

$$|t^{-s(x)} r_{1\sigma}^{k,\, j-k}(t, x, \xi)| \leqslant c(1+|\xi|)^{m(\sigma)-3}(|\xi|^{-1}+t)^{m(\sigma)+j-1}.$$

Дифференцируя функции $t^{-s(x)} \overset{j}{p}_{1\sigma}(t, x, \xi)$, $t^{-s(x)} r_{1\sigma}^{k,\, j-k}(t, x, \xi)$ по соответствующим переменным, получим

$$|D_t^l D_x^\alpha D_\xi^\beta t^{-s(x)} \overset{j}{p}_{1\sigma}(t, x, \xi)| \leqslant c(1+|\xi|)^{m(\sigma)-|\beta|+\varepsilon}(|\xi|^{-1}+t)^{m(\sigma)+j-l+\varepsilon},$$

$$|D_t^l D_x^\alpha D_\xi^\beta t^{-s(x)} r_{1\sigma}^{k,\, j-k}(t, x, \xi)| \leqslant c(1+|\xi|)^{m(\sigma)-3-|\beta|+\varepsilon}(|\xi|^{-1}+t)^{m(\sigma)+j-1-l+\varepsilon}$$

Отсюда, согласно определению 1.1, следует (3.4). Аналогичным образом доказывается (3.5).

Следующий результат доказывается по стандартной схеме [8], [9].

Предложение 3.2. *Пусть $p_j \in S^{m,k+j}$, $j=0, 1, \cdots$. Тогда существует символ $p \in S^{m,k}$ такой, что для любого целого положительного числа N*

$$p - \sum_{j=0}^{N-1} p_j \in S^{m,k+N}. \tag{3.9}$$

Два таких символа отличаются на символ порядка m, который вместе со своими производными любого порядка по t при $t=0$ принадлежит пространству $S^{-\infty}$.

Следствие 3.1. *Существуют символы*

$$p_{1\sigma} \in S^{m(\sigma)+\varepsilon,\, m(\sigma)+\varepsilon},$$

$$p_{2\sigma} \in S^{m(\sigma)+\varepsilon+\gamma-1,\, m(\sigma)+\varepsilon},$$

такие, что для любого целого $N > 0$

$$p_{1\sigma} - \sum_{j<N} p^j_{1\sigma} \in S^{m(\sigma)+\varepsilon,\, m(\sigma)+\varepsilon+N},$$

$$p_{2\sigma} - \sum_{j<N} p^j_{2\sigma} \in S^{m(\sigma)+\varepsilon+\gamma-1,\, m(\sigma)+\varepsilon+N}.$$

Доказательство непосредственно следует из предложений 3.1 и 3.2.

Следствие 3.2.

$$t^{-s(x)} E_1(f_1)(t, x)|_{t=0} = f_1(x) + (R_1 f_1)(x),$$

$$t^{\beta(x)} D_t(t^{-s(x)} E_1(f_1)(t, x))|_{t=0} = (\widehat{R}_1 f_1)(x),$$

$$t^{-s(x)} E_2(f_2)(t, x)|_{t=0} = (R_2 f_2)(x),$$

$$t^{\beta(x)} D_t(t^{-s(x)} E_2(f_2)(t, x))|_{t=0} = f_2(x) + (\widehat{R}_2 f_2)(x),$$

где интегральные операторы R_1, $\widehat{R}_1$ R_2, $\widehat{R}_2$ имею гладкие ядра.

Доказательство следует из следствия 3.1 и способа определения функций $p^j_{l\sigma}(t, x, \xi)$, $j=0, 1, \cdots$; $l=1, 2$; $\sigma^2=1$.

Предложение 3.3. *Пусть*

$$r_{l\sigma}(t, x, \xi) = \widehat{P}_\sigma\, p_{l\sigma}(t, x, \xi). \tag{3.10}$$

Тогда

$$r_{1\sigma} \in S^{m(\sigma)+1+\varepsilon,\, \infty} = \bigcap_{N=0}^{\infty} S^{m(\sigma)+1+\varepsilon,\, m(\sigma)+N+\varepsilon}, \tag{3.11}$$

$$r_{2\sigma} \in S^{m(\sigma)+\gamma+\varepsilon,\, \infty} = \bigcap_{N=0}^{\infty} S^{m(\sigma)+\gamma+\varepsilon,\, m(\sigma)+N+\varepsilon}. \tag{3.12}$$

Доказательство. Пусть $N>0$—произвольное целое число. Обозначим

$$\begin{gathered} \tilde{p}_{1\sigma}^{N+2} = p_{1\sigma} - \sum_{j=0}^{N+1} p^j_{1\sigma} \in S^{m(\sigma)+\varepsilon,\, m(\sigma)+\varepsilon+N+2}, \\ \bar{r}_{1\sigma}^{N+2} = \widehat{P}_\sigma\, \bar{p}_{1\sigma}^{N+2} \in S^{m(\sigma)+\varepsilon+1,\, m(\sigma)+\varepsilon+N}. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Разлагая коэффициенты оператора $\widehat{P}_\sigma$ по формуле Тейлора по переменной t, представим его в виде

$$\widehat{P}_\sigma=\sum_{j=0}^{N+1}\widehat{P}_\sigma^j+\widehat{P}_{\sigma,N+2},$$

где $\widehat{P}_\sigma^j$, $j=0, 1,\cdots, N+1$ — те же операторы, что и в (1.17), а $\widehat{P}_{\sigma,N+2}$ — — остаточный оператор. Тогда

$$\sum_{k=0}^{N+1}\widehat{P}_\sigma^k\sum_{j=0}^{N+1}p_{1\sigma}^j=\sum_{k+j\leq N+1}\widehat{P}_\sigma^k p_{1\sigma}^j+\sum_{k+j\geq N+2}\widehat{P}_\sigma^k p_{1\sigma}^j.$$

Первая сумма равна нулю в силу выбора функций $p_{1\sigma}^j$. Вторую сумму можно представить в виде

$$\sum_{k+j\geq N+2}\widehat{P}_\sigma^k p_{1\sigma}^j=\sum_{j>N+2}\sum_{k=0}^{j}\widehat{P}_\sigma^k p_{1\sigma}^{j-k}=\sum_{j>N+2}\sum_{k=0}^{j}r_{1\sigma}^{k,j-k}\equiv\bar{r}_{1\sigma}^{N+2}.$$

В силу предложения 3.1

$$\bar{r}_{1\sigma}^{N+2}\in S^{m(\sigma)-3+s,\ m(\sigma)+N+1+s}. \tag{3.14}$$

Наконец, обозначим

$$\tilde{r}_{1\sigma}^{N+2}=\widehat{P}_{\sigma N+2}\left(\sum_{j=0}^{N+2}p_{1\sigma}^j\right).$$

Из определения оператора $\widehat{P}_{\sigma N+2}$ и (3.4) следует, что

$$\tilde{r}_{1\sigma}^{N+2}\in S^{m(\sigma)+s+1,\ m(\sigma)+s+N}. \tag{3.15}$$

Учитывая, что

$$r_{1\sigma}=\bar{r}_{1\sigma}^{N+2}+\tilde{r}_{1\sigma}^{N+2}+\tilde{r}_{1\sigma}^{N+2},$$

из (3.13), (3.14), (3.15) получим (3.11).

Аналогичным образом доказывается (3.12).

Обозначим

$$T_l(f_l)(t, x)=\sum_{\sigma=\pm1}(2\pi)^{-n}\int\limits_{R^n\times R^n}e^{i[\varphi_\sigma-\langle y,\xi\rangle]}r_{l\sigma}(t, x, \xi)f_l(y)\,dy\,d\xi. \tag{3.16}$$

Из определения 1.1 следует, что пространство

$$S^{m,\infty}=\bigcap_{q=0}^{\infty}S^{m,q}$$

состоит из символов пространства S^m, обращающихся в нуль по модулю $S^{-\infty}$ при $t=0$ вместе со всеми производными по t. В этом смысле будем в дальнейшем говорить, что символы пространства $S^{m,\infty}$ принадлежат пространству S^m и имеют нуль бесконечного порядка при $t=0$.

Из предложения 3.3, (1.14) и (3.16) следует

Предложение 3.4.

$$PE_l(f_l)(t, x)=T_l(f_l)(t, x)+K_l(f_l)(t, x),\ l=1, 2, \tag{3.17}$$

где K — интегральные операторы с гладкими символами.

§ 4. Построение символов $\tilde{p}_{l\sigma}(t, x, \xi)$ $(l=1, 2;\ \sigma^2=1)$

Для построения символов $\tilde{p}_{l\sigma}$ (t, x, ξ) нам понадобится следующий легко доказываемый результат [8].

Предложение 4.1. *Пусть $a(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция при $t\geqslant 0$, а функция $f(t)$ вместе со всеми производными обращается в нуль при $t=0$. Тогда уравнение*

$$\left(\frac{d}{dt}+\frac{1}{t}a(t)\right)y(t)=f(t)$$

имеет решение $y(t)$, которое обращается в нуль вместе со всеми производными при $t=0$.

Обозначим

$$\tilde{E}_l(f_l)(t, x)=\sum_{\sigma=\pm 1}(2\pi)^{-n}\int\limits_{R^n\times R^n} e^{i[\varphi_\sigma-<y, \xi>]}\,\tilde{p}_{l\sigma}(t, x, \xi)f_l(y)\,dy\,d\xi.$$

Формальное применение оператора P к $\tilde{E}_l(f_l)(t, x)$ дает

$$P\tilde{E}_l(f_l)(t, x)=\sum_{\sigma=\pm 1}(2\pi)^{-n}\int\limits_{R^n\times R^n} e^{i[\varphi_\sigma-<y, \xi>]}\,\hat{P}_\sigma\tilde{p}_{l\sigma}(t, x, \xi)f_l(y)\,dy\,d\xi, \tag{4.1}$$

где $\hat{P}_\sigma$ определяется по (1.15). Представим оператор $\hat{P}_\sigma$ в виде

$$\hat{P}_\sigma=P+\hat{P}_{1\sigma}, \tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned}\hat{P}_{1\sigma}={}&2\varphi_{\sigma t}D_t-2\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t, x)\varphi_{\sigma x_i}D_j+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t, x)\varphi_{\sigma x_i x_j}+\\&+\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n}a_i(t, x)\varphi_{\sigma x_i}+\frac{1}{t}b(t, x)\varphi_{\sigma t}-i\varphi_{\sigma tt}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Из предложения 3.4 и (4.1) следует, что

$$E(f_1, f_2)=E_1(f_1)+\tilde{E}_1(f_1)+E_2(f_2)+\tilde{E}_2(f_2) \tag{4.4}$$

является параметриксом уравнения (1.1), если

$$\hat{P}_\sigma\tilde{p}_{l\sigma}+r_{l\sigma}\in S^{-\infty}\quad (l=1, 2;\ \sigma^2=1). \tag{4.5}$$

Функции $\tilde{p}_{l\sigma}$ будем искать в виде формальных сумм

$$\tilde{p}_{l\sigma}(t, x, \xi)=\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{p}^j_{l\sigma}(t, x, \xi). \tag{4.6}$$

Тогда условие (4.5) можно заменить системой уравнений

$$\hat{P}_{1\sigma}\tilde{p}^0_{l\sigma}+r_{l\sigma}=0, \tag{4.7}$$

$$\hat{P}_{1\sigma}\tilde{p}^j_{l\sigma}+P\cdot\tilde{p}^{j-1}_{l\sigma}=0,\ j\geqslant 1. \tag{4.8}$$

П р е д л о ж е н и е 4.2. *Для* $j=0, 1, \ldots$

$$\tilde{p}^j_{1\sigma} \in S^{m(\sigma)+s-j},$$

$$\tilde{p}^j_{2\sigma} \in S^{m(\sigma)+s+\gamma-1-j}$$

и $\tilde{p}^j_{l\sigma}(t, x, \xi)$ *имеют нуль бесконечного порядка при* $t=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим оператор $\hat{P}_{1\sigma}$ в виде

$$\hat{P}_{1\sigma} = |\xi| (\hat{Q}_\sigma + \frac{1}{t} \bar{a}_\sigma(t, x, \xi)),$$

где

$$\hat{Q}_\sigma = |\xi|^{-1}(2\varphi_{\sigma t} D_t - 2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x) \varphi_{\sigma x_i} D_j),$$

$$\bar{a}_\sigma(t, x, \xi) = |\xi|^{-1} (t \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x) \varphi_{\sigma x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t, x) \varphi_{\sigma x_i} +$$

$$+ b(t, x) \varphi_{\sigma t} - i\varphi_{\sigma tt}).$$

Заметим, что из определения функций φ_σ $(\sigma^2=1)$ и гладкости коэффициентов уравнения (1.1) следует гладкость функций $\tilde{a}_\sigma(t, x, \xi)$, которые являются однородными по ξ порядка нуль.

Из (3.11), (4.7) и предложения 4.1 следует, что $\tilde{p}^0_{1\sigma} \in S^{m(\sigma)+s}$ и имеет нуль бесконечного порядка при $t=0$. Поэтому из (4.8) и предложения 4.1 получаем, что $\tilde{p}^j_{1\sigma} \in S^{m(\sigma)+s-j}$ и имеет нуль бесконечного порядка при $t=0$. Для функции $\tilde{p}^j_{2\sigma}$ доказательство аналогичное.

Для прострачств S^m хорошо известен следующий результат [8].

П р е д л о ж е н и е 4.3. *Существуют символы* $\tilde{p}_{1\sigma} \in S^{m(\sigma)+s}, \tilde{p}_{2\sigma} \in S^{m(\sigma)+s+\gamma-1}$ *такие, что для любого целого* $N>0$

$$\tilde{p}_{1\sigma} - \sum_{j<N} \tilde{p}^j_{1\sigma} \in S^{m(\sigma)+s-N},$$

$$\tilde{p}_{2\sigma} - \sum_{j<N} \tilde{p}^j_{2\sigma} \in S^{m(\sigma)+s+\gamma-1-N}.$$

С л е д с т в и е 4.1.

$$t^{-s(x)} \tilde{E}_l(f_l)(t, x)|_{t=0} = \tilde{R}_l(f_l)(x),$$

$$t^{\beta(x)} D_t (t^{-s(x)} \tilde{E}_l(f_l)(t, x))|_{t=0} = \tilde{Q}_l(f_l)(x),$$

$$P\tilde{E}_l(f_l)(t, x) + T_l(f_l)(t, x) = \tilde{K}_l(f_l)(t, x), \; l=1, 2,$$

где $\tilde{R}_l$, $\tilde{Q}_l$, $\tilde{K}_l$ — интегральные операторы с гладкими ядрами.

Доказательство непосредственно следует из вышеизложенных построений.

Основной результат работы, теорема 1.1, является прямым следсгвием предложения 3.4, следствия 3.2, следствия 4.1 и формулы (4.4).

Замечание 4.1. Изложенным методом можно построить параметрикс задачи Коши с весом для уравнения (1.1) и в случае, когда $\beta(x)$ является целым числом. В частности, к случаю $\beta(x) \equiv 1$ сводятся некоторые классы вырождающихся уравнений с ограниченными коэффициентами.

Замечание 4.2. Аналогичные результаты можно получить для уравнения вида (1.1) с коэффициентами, зависящими от $(\varphi(t), x)$, где $\varphi(t)$—функция с некоторыми заданными свойствами (в частности $\varphi(t) = t^r$, $r > 0$). При этом необходимо требовать, чтобы коэффициенты уравнения разлагались по степеням функции $\varphi(t)$. К таким уравнениям сводятся некоторые классы вырождающихся гиперболических уравнений с неограниченными при $t \to 0$ коэффициентами, для которых задача Коши также ставится с помощью весовых функций.

Ереванский государственный
университет

Поступила 10.VII.1984

Ա. Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Երկրորդ կարգի անսահմանափակ գործակիցներով հիպերբոլական տիպի հավասարումների համար կշռով Կոշու խնդրի պարամետրիքսի կառուցումը (*ամփոփում*)

Աշխատանքում դիտարկվում է կշռով Կոշու խնդիրը երկրորդ կարգի հավասարման համար, որի գլխավոր մասը իրենից ներկայացնում է խիստ հիպերբոլական տիպի օպերատոր, իսկ ցածր կարգի անդամները անսահմանափակ են, երբ $t \to 0$։ Նշվում են կշռային ֆունկցիաներ, որոնց միջոցով դրվում է Կոշու խնդիրը։ Այդպիսի կշռով Կոշու խնդրի դրվածքի դեպքում հնարավորություն է լինում կառուցել նրա պարամետրիքսը։ Պարամետրիքսը կառուցվում է Ֆուրյեի ինտեգրալ օպերատորների գումարի տեսքով։

A. H. HOVHANESIAN. *Construction of a parametrix for the Cauchy problem with weight for second order hyperbolic equations with unbounded coefficients* (summary

The paper deals with the Cauchy problem with weight for an equation, the main part of which represents a strong hyperbolic operator and the low members are unbounded when $t \to 0$. The parametrix is constructed as a sum of Fourier integral operators.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Бицадзе.* Некоторые классы уравнений в частных производных, М., 1981.
2. *С. А. Терсенов.* К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырождения типа, Сиб. мат. журн., 2, № 6, 1961, 913—935.
3. *Ф. Т. Барановский.* О задаче Коши для гиперболического вырождающегося на начальной плоскости уравнения с видоизмененными начальными данными, Сиб. мат. журн., 18, № 4, 1977, 926—933.
4. *Г. Р. Оганесян.* Задача Коши с весом для слабо гиперболических псевдодифференциальных уравнений с данными на гиперплоскости вырождения, Уч. записки ЕГУ, № 1, 1975, 10—16.
5. *К. А. Ягджян.* Задача Коши для некоторых классов слабо гиперболических уравнений с неограниченными коэффициентами, Уч. записки ЕГУ, № 3, 1975, 3—9.
6. *А. Б. Нерсесян.* Задача Коши для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 196, № 2, 1971, 289—292.
7. *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции, т. 1, М., 1973.
8. *A. Yoshikava.* Constraction of a parametrix for the Cauchy problem of some weakly hyperbolic equation 1, Hokk. Math., J., 6, 2, 1977, 313—344.
9. *L. Boutet de Monvel.* Hyperbolic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math., 27, 1974, 585—639.