ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 5, 1985 Математика

УДК 517.946

Ф. О. МАМИКОНЯН

О НЕКОТОРЫХ МНОГОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

В основе многих известных аналитических методов классической теории уравнений лежат различные способы оценки решений. При этом существенную роль играют так называемые теоремы об операторных неравенствах, под которыми понимают утверждения, в которых указывается оценка решений неравенства $z \leqslant Vz$, где V — некоторый оператор в полуупорядоченном пространстве (в частности, дифференциальный или интегральный).

Такие теоремы являются удобным техническим аппаратом при изучении свойств решений дифференциальных, интегральных, интегродифференциальных и разностных уравнений, при исследовании различных задач прикладного характера и поэтому им всегда посвящается большое число работ.

Если изучение одномерных интегральных и дифференциальных неравенств восходит, по существу, еще к Peano [1], то многомерные неравенства оказались в центре внимания только в последнее время, начиная, по-видимому, с Wendroff [2], который анонсировал несколько результатов в этом направлении. Из работ, близких по духу к предлагаемой, хотелось бы отметить работы G. Butler и T. Rogers [7], B. G. Pachpatte [6, 8. 9, 10], Lu—San Chen и Cheh—Chih Jeh [11], B. G. Pachpatte и S. M. Singare [12] и многие другие, в которых не только рассматриваются вопросы обращения таких неравенств, но и приводятся некоторые приложения.

Целью настоящей работы является дальнейшее изучение некоторых классов многомерных нелинейных операторных неравенств. В п. 1° сформулированы основные результаты, в п. 2° приводятся их доказательства.

1°. Пусть R_n — n-мерное вещественное эвклидово пространство, в котором введено обычное покоординатное полуупорядочение. Для некоторого неотрицательного r обозначим $I_r^n \equiv \{x=(x_1 \cdot x_n), 0 \leqslant x \leqslant r\}$ и $I^n \equiv \bigcup_{r>0} I_r^n$.

Обозначим также $D_i \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $D_1 \cdots D_i \equiv D_i (D_1 \cdots D_{i-1}) (i=2, 3, \cdots, n)$.

Пусть, далее, P — множество всех целых неотрицательных чисел и $P_k \equiv \{0, 1, \cdots, k\}$. Обозначим через P_k^n n-кратное прямое произведение P_k с самим собой и $P^n \equiv \bigcup_{k \in P} P_k^n$. Для определенной на множестве P^n функции $u(x)$ обозначим $\Delta_i u \equiv u(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i+1, x_{i+1}, \cdots, x_n) - u(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ и $\Delta_1 \cdots \Delta_i \equiv \Delta_i (\Delta_1 \cdots \Delta_{i-1}) (i=2, 3, \cdots, n)$.

Положим

$$\max_{0<t<y} a(t) \equiv \max_{t\in I^n_y} a(t) \quad (y\in I^n);\quad \max_{0<t<y} p(t) \equiv \max_{t\in P^n_y} p(t) \quad (y\in P^n)$$

для любых определенных соответственно на I^n и P^n функций $a(x)$ и $p(x)$. Будем также полагать некоторую сумму равной нулю, если суммирование ведется по пустому множеству индексов.

Рассматривается дифференциальное неравенство

$$D_1\cdots D_n u(x) \leqslant a(x)\, H[u(x)],\quad x\in I^n, \tag{1.1}$$

которое играет важную роль при изучении многих классов многомерных нелинейных интегральных и интегродифференциальных неравенств.

Теорема 1. *Пусть функция $a(x)$ непрерывна и неотрицательна на I^n, а $H(u)$ непрерывна, неотрицательна и не убывает на I.*

Пусть, далее, неотрицательная на I^n функция $u(x)$ такова, что

$$(D_1\cdots D_k u)\cdot D_{k+1} u \geqslant 0 \quad (k=1, 2,\cdots, n-1), \tag{1.2}$$

$$D_1\cdots D_k u|_{x_{k+1}=0} = 0 \quad (k=1, 2,\cdots, n-1). \tag{1.3}$$

Тогда, если для функции $u(x)$ имеет место неравенство (1.1), то имеет место и неравенство

$$G[u(x)] \leqslant G[u(x)]|_{x_1=0} + \int_0^x a(t)\,dt,\quad x\in I^n, \tag{1.4}$$

где

$$G(u) \equiv \int_{u_0}^{u} \frac{ds}{H(s)} \quad (u\geqslant 0,\ u_0>0). \tag{1.5}$$

В частности

$$u(x) \leqslant G^{-1}\left\{ G[u(x)]|_{x_1=0} + \int_0^x a(t)\,dt \right\} \tag{1.6}$$

по крайней мере для тех $x\in I^n$, для которых

$$G(u)|_{x_1=0} + \int_0^x a(t)\,dt \in \mathrm{Dom}\,(G^{-1}). \tag{1.7}$$

Рассмотрим теперь разностное неравенство

$$\Delta_1\cdots\Delta_n u(x) \leqslant p(x)\, H[u(x)],\quad x\in P^n, \tag{1.8}$$

которое является дискретным аналогом неравенства (1.1). Имеет место

Теорема 2. *Пусть функция $p(x)$ определена и неотрицательна на P^n, а $H(u)$ непрерывна, неотрицательна и не убывает на I.*

Пусть, далее, неотрицательная на P^n функция $u(x)$ такова, что

$$\Delta_i u(x) \geqslant 0 \quad (i=1, 2,\cdots, n), \tag{1.9}$$

$$\Delta_1\cdots\Delta_i u(x)|_{x_{i+1}=0}=0 \quad (i=1, 2,\cdots, n-1). \tag{1.10}$$

Тогда, если для функции $u(x)$ имеет место оценка (1.8), *то имеет место и оценка*

$$G[u(x)]\leqslant G[u(x)]_{x_1=0}+\sum_{s_1=0}^{x_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1}p(s_1\cdots s_n),\ x\in P^n, \tag{1.11}$$

где $G(u)$ определяется выражением (1.5). *В частности*

$$u(x)\leqslant G^{-1}\left\{G(u)|_{x_1=0}+\sum_{s_1=0}^{x_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1}p(s)\right\} \tag{1.12}$$

по крайней мере для тех $x\in P^n$, для которых

$$G(u)|_{x_1=0}+\sum_{s_1=0}^{x_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1}p(s)\in \mathrm{Dom}\,(G^{-1}). \tag{1.13}$$

Заметим, что оценки (1.4) и (1.11) (соответственно, (1.6) и (1.12)) не зависят от выбора u_0 в выражении (1.5). Действительно, полагая в (1.5) u_1 вместо u_0, получим

$$\overline{G}(u)\equiv\int\limits_{u_1}^{u}\frac{ds}{H(s)}=G(u)-\delta,\ \text{где}\ \delta=\int\limits_{u_0}^{u_1}\frac{ds}{H(s)},$$

откуда следует независимость (1.4) и (1.11) от выбора u_0. В свою очередь. $\overline{G}^{-1}(x)=G^{-1}(x+\delta)$, поэтому

$$\overline{G}^{-1}\{G(u)|_{x_1=0}+A\}=\overline{G}^{-1}\{G(u)|_{x_1=0}-\delta+A\}=G^{-1}\{G(u)|_{x_1=0}+A\},$$

что обеспечивает независимость (1.6) и (1.12) от выбора u_0.

Наиболее естественно положить $u_0=0$. Однако, как легко видеть, это можно сделать только в том случае, когда $G(u)$ имеет конечный предел при $u\to 0$. В противном случае выбор $u_0=0$ невозможен. В этом случае, кстати, условие $u(0, x_2, \dots, x_n)\equiv 0$ влечет за собой тождество $u(x)\equiv 0$ на всем I_n.

Что касается множеств истинности оценок (1.6) и (1.12), определяемых соответственно условиями (1.7) и (1.13), они существенно зависят от конкретной функции $H(x)$.

Так, например, для дифференциального неравенства

$$D_1\cdots D_n u(x)\leqslant a(x)[u(x)]^{\alpha},\ (0<\alpha<1),\ x\in I^n \tag{1.14}$$

имеем

$$G(u)=\int\limits_{u_0}^{u}\frac{ds}{s^{\alpha}}=\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{u_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}=\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

если положить $u_0=0$. Тогда оценка (1.6) имеет вид

$$u(x)\leqslant\left\{[u(0, x_2\cdots x_n)]^{1-\alpha}+(1-\alpha)\int\limits_0^x a(t)\,dt\right\}^{1/1-\alpha}, \tag{1.15}$$

причем имеет место для всех $x \in I^n$, так как $G(x)\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ и, следовательно, $G^{-1}(x)$ определена для всех неотрицательных x.

Если же рассматривать дифференциальное неравенство

$$D_1 \cdots D_n u(x) \leqslant a(x) \cdot e^{u(x)}, \quad x \in I^n, \tag{1.16}$$

то имеем

$$G(u) = \int_{u_0}^{u} e^{-s} ds = \frac{e^u - e^{u_0}}{e^u \cdot e^{u_0}} = 1 - e^{-u},$$

если взять $u_0 = 0$. В этом случае $G(x)\colon [0, +\infty) \to [0,1)$ и область определения $G^{-1}(x)$ ограничена. Оценка (1.6) в данном случае принимает вид

$$u(x) \leqslant -\ln\left[e^{-u(0, x_2, \ldots, x_n)} - \int_0^x a(t)\, dt\right] \tag{1.17}$$

и имеет место только для тех $x \in I^n$, для которых

$$0 < e^{-u(0, x_2 \ldots x_n)} - \int_0^x a(t)\, dt < 1.$$

Частные случаи предложенных здесь формул обращения (1.6) и (1.12) известны по многим работам (см., например, [10], [11], [12]), где они играют вспомогательную роль.

Учитывая тесную связь между различными операторными неравенствами, полученные результаты можно применить для эффективного обращения широкого класса многомерных нелинейных интегральных, интегродифференциальных и разностных неравенств.

Рассмотрим, например, интегральное неравенство

$$F[u(x)] \leqslant f(x) + a(x) \int_0^x b(t)\, H[u(t)]\, dt, \quad x \in I^n. \tag{1.18}$$

Теорема 3. *Пусть функции $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ непрерывны и неотрицательны на I^n. Пусть, далее, функции $F(x)$ и $H(x)$ непрерывны и неотрицательны на I, причем $F(x)$ возрастает, а $H(x)$ не убывает на I.*

Тогда для любой удовлетворяющей неравенству (1.18) непрерывной и неотрицательной на I^n функции $u(x)$ имеет место оценка

$$\Omega \circ F[u(x)] \leqslant \Omega\,[\sup_{0<s<x} f(s)] + \sup_{0<s<x} a(s) \cdot \int_0^x b(t)\, dt, \quad x \in I^n, \tag{1.19}$$

где $\Omega \circ F$ означает композицию функций Ω и F, а

$$\Omega(u) \equiv \int_{u_0}^{u} \frac{ds}{H \circ F^{-1}(s)} \quad (u > 0,\ u_0 > 0). \tag{1.20}$$

В частности

$$u(x) \leqslant F^{-1} \circ \Omega^{-1} \left\{ \Omega \left[\sup_{0<s<x} f(s) \right] + \sup_{0<s<x} a(s) \cdot \int_0^x b(t)\, dt \right\} \tag{1.21}$$

по крайней мере для тех $x \in I^n$, *для которых*

$$\Omega \left[\sup_{0<s<x} f(s) \right] + \sup_{0<s<x} a(s) \cdot \int_0^x b(t)\, dt \in \mathrm{Dom}\,(F^{-1} \circ \Omega^{-1}).$$

Заметим, что если $H(0)=0$, $F(0)=0$, причем функция $\Omega(u)$ не имеет конечного предела при $u \to 0$, то условие $f(x) \equiv 0$ влечет за собой $u(x) \equiv 0$. Действительно, в этом случае получаем $F(u) \equiv 0$, а следовательно и $u(x) \equiv 0$ на всем I^n. Отсюда, в частности, следует, что интегральное уравнение

$$u(x) = \int_0^x a(t)\, H[u(t)]\, dt, \quad x \in I^n \tag{1.22}$$

имеет единственное решение $u(x) \equiv 0$, если только $H(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 3 и

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^a \frac{ds}{H(s)} = +\infty \quad (a > 0). \tag{1.23}$$

Полученная выше оценка (1.21) является непосредственным многомерным обобщением основополагающего результата I. Bihari [3], который рассматривал случай $n=1$, $F(u)=u$, $f(x)=\mathrm{const}$, $a(x) \equiv 1$. Отметим что оценка (1.21) содержит в себе результаты работ G. Butler и T. Rogers [7] (случай $n=1$), B. K. Bonge и B. G. Pachpatte [10] (случай $n=2$, $F(u)=u$, $f(x)=f_1(x_1)+f_2(x_2)$, $a(x) \equiv 1$) и некоторых других.

В качестве примера рассмотрим важное с точки зрения приложений интегральное неравенство

$$u^m(x) \leqslant C + \int_0^x b(t)\, u^k(t)\, dt \quad (C=\mathrm{const},\ k>0,\ m>0), \quad x \in I^n. \tag{1.24}$$

В этом случае $F(u)=u^m$, $H(u)=u^k$ и, согласно (1.20)

$$\Omega(u) = \int_{u_0}^u \frac{ds}{H \circ F^{-1}(s)} = \int_{u_0}^u s^{-\frac{k}{m}}\, ds = \frac{u^{1-\frac{k}{m}}}{1-\frac{k}{m}} - \frac{u_0^{1-\frac{k}{m}}}{1-\frac{k}{m}}.$$

Пусть $m > k$. Тогда можно взять $u_0=0$ и получить $\Omega(u) = \dfrac{u^p}{p}$, где $p = \dfrac{m-k}{m}$. Тогда из (1.21) получаем

$$u(x) \leqslant \left\{ C^p + p \int_0^x b(t)\,dt \right\}^{\frac{1}{m-k}}, \quad x \in I^n. \tag{1.25}$$

В частности, если $m = 2$ и $k = 1$ имеет место оценка

$$u(x) \leqslant \sqrt{C} + \frac{1}{2}\int_0^x b(t)\,dt, \quad x \in I^n, \tag{1.26}$$

полученная для случая $n = 1$ в работе [4].

Если же $k > m$, u_0 нельзя выбрать равным нулю. Положим $u_0 = 1$. Тогда оценка (1.21) примет вид

$$\frac{u^{qm} - 1}{q \cdot u^{qm}} \leqslant \frac{C^q - 1}{q \cdot C^q} + \int_0^x b(t)\,dt, \quad x \in I^n, \tag{1.27}$$

где $q = \dfrac{k-m}{m}$. Отсюда непосредственно следует оценка

$$u(x) \leqslant \left| \frac{C^q}{1 - q \cdot C^q \cdot \int_0^x b(t)\,dt} \right|^{1/(k-m)} \tag{1.28}$$

по крайней мере для тех $x \in I^n$, для которых

$$\int_0^x b(t)\,dt < \frac{1}{q \cdot C^q}.$$

Отметим, что если $C = 0$, из (1.28) следует $u(x) \equiv 0$ на всем I^n.

Отметим также, что более общий чем (1.18) класс интегральных неравенств

$$F[u(x)] \leqslant f(x) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(x) \int_0^x \beta_i(t)\, H_i[u(t)]\,dt, \quad x \in I^n \tag{1.29}$$

может быть сведен к интегральному неравенству типа (1.18), если, например, положить

$$\alpha(x) \equiv \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |\alpha_i(x)|, \quad \beta(x) \equiv \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \{\beta_i(x)\}$$

и

$$H(u) \equiv \sum_{i=1}^{k} H_i(u) \quad \text{или} \quad H(u) \equiv \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \{H_i(u)\}.$$

Наряду с интегральными неравенствами (1.18) интерес с точки зрения приложений представляет интегральное неравенство

$$u(x) \leqslant f(x) + \alpha(x) \int_0^x a(t)\, u(t)\,dt + \beta(x) \int_0^x b(t) \times$$

$$\times \left(\int_0^t c(s) H[u(s)]\, ds \right) dt, \ x \in I^n, \tag{1.30}$$

частные случаи которого рассмотрены во многих работах (см., например, [6], [9] или [10] и приведенную там литературу).

Теорема 4. *Пусть функции* $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ *и* $f(x)$ *непрерывны и неотрицательны на* I^n. *Пусть, далее, функция* $H(x)$ *непрерывна, неотрицательна и возрастает на* I. *Обозначим*

$$\gamma(x) \equiv \max_{0<s<x} \{\alpha(s), \beta(s), 1\}, \ l(x) \equiv \max_{0<s<x} \{a(s), b(s), c(s)\}. \tag{1.31}$$

Тогда для любой удовлетворяющей неравенству (1.30) *непрерывной и неотрицательной на* I^n *функции* $u(x)$ *имеет место оценка*

$$u(x) \leqslant \sup_{0<s<x} f(s) + \int_0^x \gamma(t)\, l(t)\, Q^{-1} \left\{ Q[\sup_{0<s<t} f(s)] + \gamma(t) \int_0^t l(\tau)\, d\tau \right\} dt \tag{1.32}$$

на множестве $0 \leqslant x \geqslant r$, где

$$Q(u) \equiv \int_{u_0}^{u} \frac{ds}{s+H(s)} \quad (u \geqslant 0, \ u_0 > 0), \tag{1.33}$$

а r *таково, что*

$$Q[\sup_{0<s<x} f(s)] + \gamma(x) \int_0^x l(\tau)\, d\tau \in \mathrm{Dom}\,(Q^{-1}). \tag{1.34}$$

Отметим, что приведенная здесь формула обращения (1.32) обобщает ряд известных ранее результатов. Например, для случая $a(x) \equiv b(x) \equiv c(x)$ и $\alpha(x) \equiv \beta(x) \equiv 1$ аналогичные оценки получены в работе [6] при $n=1$ для некоторого частного класса функций $H(x)$ и в работе [9] при $n=2$, $f(x)=f_1(x_1)+f_2(x_2)$.

В последнее время, в связи с многочисленными приложениями, повышенный интерес вызывают вопросы обращения различных классов интегродифференциальных неравенств. Заметим, однако, что некоторые из рассматриваемых в литературе таких неравенств непосредственно сводятся к интегральным неравенствам и поэтому вопросы их обращения не представляют самостоятельного интереса. Так, рассматриваемые в некоторых работах (см., например, [10] или [11]) частные случаи неравенства

$$D_1 \cdots D_n u(x) \leqslant f(x) + a(x) u(x) + b(x) \int_0^x c(t) H[D_1 \cdots D_n u(t)]\, dt, \quad x \in I^n \tag{1.35}$$

при приведенных там предположениях заменой $v(x) = D_1 \dots D_n u(x)$ сводятся непосредственно к интегральному неравенству вида (1.29). Получающаяся при этом формула обращения содержит в себе результаты, приведенные в работе [10] для случая $n=2$, $f(x)=f_1(x_1)+f_2(x_2)$, $a(x)\equiv\equiv b(x)=\text{const}$ и в работе [11] для случая $f(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$, $a(x)\equiv\equiv b(x)=\text{const}$, $H(x)=x$. Поэтому интерес представляют такие неравенства, для которых такое сведение нетривиально.

Рассмотрим, например, интегродифференциальное неравенство

$$D_1\cdots D_n u(x)\leqslant f(x)+a(x)\int_0^x b(t)\,H[u(t)+D_1\cdots D_n u(t)]\,dt,\ x\in I^n. \tag{1.36}$$

Имеет место

Теорема 5. *Пусть функции $a(x)$, $b(x)$ и $f(x)$ непрерывны и неотрицательны на I^n, а $H(x)$ непрерывна, неотрицательна и не убывает на I. Положим*

$$\mu(x)\equiv\sup_{0<s<x}\{a(s),1\},\quad \nu(x)\equiv\sup_{0<s<x}\{b(s),1\}. \tag{1.37}$$

Пусть, далее, неотрицательная на I^n функция $u(x)$ такова, что

$$u(x)|_{x_k\to 0}=0\quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{1.38}$$

и имеет непрерывную и неотрицательную на I^n производную $D_1\ldots D_n u$.

Тогда, если для функции $u(x)$ имеет место оценка (1.36), то имеет место и оценка

$$Q(D_1\cdots D_n u)\leqslant Q[\sup_{0<s<x} f(s)]+\mu(x)\int_0^x \nu(t)\,dt,\ x\in I^n, \tag{1.39}$$

где $Q(x)$ определяется выражением (1.33). В частности

$$u(x)\leqslant\int_0^x Q^{-1}\left\{Q[\sup_{0<s<t} f(s)]+\mu(t)\int_0^t \nu(s)\,ds\right\}dt. \tag{1.40}$$

на множестве $0\leqslant x\leqslant r$, где r выбрано так, что

$$Q[\sup_{0<s<x} f(s)]+\mu(x)\int_0^x \nu(s)\,ds\in \operatorname{Dom}(Q^{-1}). \tag{1.41}$$

Например, для интегродифференциального неравенства

$$D_1\cdots D_n u(x)\leqslant C+\int_0^x b(t)\,[u(t)+D_1\cdots D_n u(t)]^2\,dt,\ x\in I^n \tag{1.42}$$

имеем, что

$$Q(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{ds}{s+s^2}=\ln\frac{u}{1+u}+\ln\frac{1+u_0}{u_0}=\ln\frac{u}{1+u}+\ln 2,$$

если положить $u_0=1$. Пусть $u(x)=0$ при $x_i=0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ $b(x)\geqslant 1$. Тогда оценка (1.40) примет вид

$$u(x)\leqslant C\cdot\int_0^x \exp\left(\int_0^t b(s)\,ds\right)\cdot\frac{dt}{1+C\left[1-\exp\left(\int_0^t b(s)\,ds\right)\right]} \qquad (1.43)$$

и имеет место для таких $x\in I^n$, что

$$\int_0^x b(t)\,dt\leqslant \ln\left[1+\frac{1}{C}\right].$$

Приведенная здесь оценка (1.39) при $n=2$, $f(x)=f_1(x_1)+f_2(x_2)$, $a(x)\equiv 1$ совпадает с оценками, предложенными в работе [9] для случая $H(x)=x$ и [10] для случая произвольного $H(x)$, а при $f(x)=\sum_{i=1}^n f_i(x_i)$, $a(x)\equiv 1$, $H(x)=x$ — с полученной в [10] оценкой.

Хорошо известна роль, которую играют дискретные аналоги дифференциальных и интегральных неравенств в теории разностных уравнений и численном анализе. Поэтому неслучаен интерес к вопросам обращения таких неравенств. Хорошую сводку результатов по этому вопросу можно найти, например, в обзоре [5] или работе [12].

Здесь рассматривается дискретное неравенство

$$u(x)\leqslant f(x)+a(x)\cdot\sum_{s_1=0}^{x_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1} b(s)\cdot H[u(s)],\quad x\in P^n, \qquad (1.44)$$

которое является многомерным дискретным обобщением нелинейного неравенства I. Bihari [3].

Теорема 6. *Пусть функции $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ неотрицательны на P^n, а $H(x)$ непрерывна, неотрицательна и не убывает на I.*

Тогда для любой удовлетворяющей неравенству (1.44) неотрицательной на P^n функции $u(x)$ имеет место оценка

$$G[u(x)]\leqslant G[\max_{0<t<x} f(t)]+\max_{0<t<x} a(t)\cdot\sum_{s_1=0}^{x_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1} p(s),\quad x\in P^n, \qquad (1.45)$$

где $G(u)$ *определяется выражением* (15). *В частности,*

$$u(x)\leqslant G^{-1}\left\{G[\max_{0<t<x} f(t)]+\max_{0<t<x} a(t)\cdot\sum_{s_1=0}^{x_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1} p(s)\right\} \qquad (1.46)$$

по крайней мере для тех $x\in P^n$, для которых

$$G[\max_{0<t<x} f(t)]+\max_{0<t<x} a(t)\cdot\sum_{s_1=0}^{x_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1} p(s)\in \mathrm{Dom}\,(G^{-1}).$$

Приведенная здесь оценка (1.46) может быть полезна во многих приложениях и для случая $f(x)=\sum_{i=1}^n f_i(x_i)$, $a(x)\equiv 1$ анонсирована в работе [12].

2°. Здесь приведены доказательства сформулированных в п. 1 утверждений.

Докажем утверждение теоремы 1. Предположим сначала, что удовлетворяющая неравенству (1.1) функции $u(x) > 0$ на I^n. Перепишем тождество (1.1) в виде

$$\frac{D_1 \cdots D_n u(x)}{H(u)} \leqslant a(x), \quad x \in I^n. \tag{2.1}$$

В силу условия (1.2) $D_1 \cdots D_{n-1} u \cdot D_n u \geqslant 0$ и, следовательно

$$\frac{D_1 \cdots D_n u \cdot H(u)}{H^2(u)} \leqslant a(x) + \frac{D_1 \cdots D_{n-1} u \cdot H'_{x_n}}{H^2(u)},$$

так как $H'_{x_n} = H'_u \cdot D_n u$ и $H(u)$ не убывает на I. Тогда

$$D_n \left(\frac{D_1 \cdots D_{n-1} u}{H(u)} \right) \leqslant a(x),$$

откуда непосредственно получаем, учитывая условие (1.3), что

$$\frac{D_1 \cdots D_{n-1} u(x)}{H(u)} \leqslant \int_0^{x_n} a(x_1, \cdots, x_{n-1}, s_n)\, ds_n,$$

то есть неравенство вида (2.1). Используя приведенную схему по переменным $x_{n-1} \ldots x_2$ получаем, с учетом условий (1.2) и (1.3), что

$$\frac{D_1 u}{H(u)} \leqslant \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_n} a(x_1, s_2, \cdots, s_n)\, ds_2 \cdots ds_n. \tag{2.2}$$

В силу определения функции $G(u)$ (1.5) имеем

$$D_1 G(u) = \frac{1}{H(u)} \cdot D_1 u$$

и неравенство (2.2) перепишется в виде

$$D_1 G(u) \leqslant \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_n} a(x_1, s_2 \cdots s_n)\, ds_2 \cdots ds_n,$$

откуда

$$G[u(x)] \leqslant G[u(x)]|_{x_1=0} + \int_0^x a(t)\, dt,$$

то есть получаем искомую оценку (1.4).

Пусть теперь функция $u(x)$ удовлетворяет неравенству (1.1) и $u(x) \geqslant 0$. Пусть $v(x) \equiv u(x) + \varepsilon$, где ε — некоторое положительное число. Тогда

$$D_1 \cdots D_n v(x) = D_1 \cdots D_n u(x) \leqslant a(x) H[u(x)] \leqslant a(x) H[v(x)],$$

так как $u \leqslant v$. Функция $v(x)$ удовлетворяет, таким образом, неравенству (1.1) и $v(x) > 0$. Согласно предыдущему

$$G[u(x_1 \cdots x_n) + \varepsilon] \leqslant G[u(0, x_2 \cdots x_n) + \varepsilon] + \int_0^{\varepsilon} a(t)\, dt$$

и имеет место для любого положительного ε. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем искомую оценку (1.4) для неотрицательной на I^n функции $u(x)$. Оценка (1.6) есть непосредственное следствие оценки (1.4). Теорема 1 доказана.

Для доказательства утверждения теоремы 2 предположим, что удовлетворяющая неравенству (1.8) функция $u(x) > 0$ на P^n и заметим, что

$$\Delta_1 \cdots \Delta_n u(x) \leqslant p(x_1, \cdots, x_n) H[u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n+1)],$$

если учесть (1.9) и монотонность $H(x)$. Так как

$$\Delta_1 \cdots \Delta_n u(x) \equiv \Delta_1 \cdots \Delta_{n-1} u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n+1) - \\ - \Delta_1 \cdots \Delta_{n-1} u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$$

имеем, что

$$\frac{\Delta_1 \cdots \Delta_{n-1} u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n+1)}{H[u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n+1)]} - \frac{\Delta_1 \cdots \Delta_{n-1} u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)]}{H[u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n+1]} \leqslant \\ \leqslant p(x_1 \cdots x_n)$$

или, с учетом (1.9),

$$\frac{\Delta_1 \cdots \Delta_{n-1} u(x_1 \cdots x_{n-1}, x_n+1)}{H[u(x_1, \cdots, x_{n-1} x_n+1)]} - \frac{\Delta_1 \cdots \Delta_{n-1} u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)}{H[u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)]} \leqslant \\ \leqslant p(x_1 \cdots x_n).$$

Зафиксируем $x_1, \cdots, x_{n-1}$, положим $x_n = s_n$ и просуммируем по $s_n = 0, 1, \cdots, x_n - 1$. Получим

$$\frac{\Delta_1 \cdots \Delta_{n-1} u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)}{H[u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)]} \leqslant \sum_{s_n=0}^{x_n-1} p(x_1, \cdots, x_{n-1}, s_n),$$

если учесть (1.10).

Повторяя приведенную процедуру по переменным $x_{n-1}, \ldots, x_2$, получим, с учетом (1.9) и (1.10), что

$$\frac{\Delta_1 u(x_1 \cdots, x_n)}{H[u(x_1 \cdots, x_n)]} \leqslant \sum_{s_2=0}^{x_2-1} \cdots \sum_{s_n=0}^{x_n-1} p(x_1, s_2, \cdots, s_n).$$

Согласно определению функции $G(u)$ (1.5) имеем

$$G[u(x_1+1, x_2, \cdots, x_n)] - G[u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)] = \int_{u(x_1, x_2 \cdots x_n)}^{u(x_1+1, x_2 \cdots x_n)} \frac{ds}{H(s)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{u(x_1+1, x_2, \cdots, x_n) - u(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{H[u(x_1, x_2 \cdots x_n)]} \leqslant \sum_{s_2=0}^{x_2-1} \cdots \sum_{s_n=0}^{x_n-1} p(x_1, s_2, \cdots, s_n).$$

Зафиксируем $x_2, \cdots, x_n$, обозначим $x_1 = s_1$ и просуммируем обе части по $s_1=0, 1, \cdots, x_1-1$. Получим

$$G[u(x_1, x_2, \cdots, x_n)] \leqslant G[u(0, x_2, \cdots, x_n)] + \sum_{s_1=0}^{x_1-1} \cdots \sum_{s_n=0}^{x_n-1} p(s_1, \cdots, s_n),$$

то есть искомую оценку (1.11).

Если удовлетворяющая неравенству (1.8) функция $u(x)$ обращается в нуль в некоторых точках множества P^n, положим $v(x) \equiv u(x) + \varepsilon$ и так же, как и при доказательстве теоремы 1 покажем, что оценка (1.11) имеет место и в этом случае.

Оценка (1.12) непосредственно следует из (1.11). Теорема доказана,

Для доказательства утверждения теоремы 3 обозначим $v(x) \equiv \equiv F[u(x)]$, откуда $u = F^{-1}(v)$. Перепишем неравенство (1.18) в виде

$$v(x) \leqslant f(x) + a(x) \int_0^x b(t) H[F^{-1}(v)]\, dt, \ x \in I^n.$$

Пусть $\tau \in I^n$ — произвольная точка. Тогда

$$v(x) \leqslant \sup_{0<s<\tau} f(s) + \sup_{0<s<\tau} a(s) \cdot \int_0^x b(t) H[F^{-1}(v)]\, dt, \ x \in I^n_\tau. \qquad (2.3)$$

Обозначим через $z(x)$ правую часть этого неравенства. Имеем

$$D_1 \cdots D_n z(x) = \sup_{0<s<\tau} a(s) \cdot b(x) \cdot H \circ F^{-1}(v), \ x \in I^n_\tau.$$

Но $F^{-1}(v) \leqslant F^{-1}(z)$ и $H \circ F^{-1}(v) \leqslant H \circ F^{-1}(z)$, так как $v \leqslant z$ в силу (2.3). Отсюда

$$D_1 \cdots D_n z(x) \leqslant \sup_{0<s<\tau} a(s) \cdot b(x) \cdot H \circ F^{-1}[z(x)], \ x \in I^n_\tau.$$

На основании утверждения теоремы 1, условия которого проверяются непосредственно, имеем

$$\Omega[z(x)] \leqslant \Omega[z(x)]|_{x_1=0} + \sup_{0<s<\tau} a(s) \cdot \int_0^x b(t)\, dt, \quad x \in I^n_\tau,$$

где $\Omega(u)$ определяется выражением (1.20). Тогда

$$\Omega[z(x)] \leqslant \Omega[\sup_{0<s<\tau} f(s)] + \sup_{0<s<\tau} a(s) \cdot \int_0^x b(t)\, dt, \ x \in I^n_\tau.$$

Но $\Omega(v) \leqslant \Omega(z)$, то есть $\Omega \circ F(u) \leqslant \Omega(z)$, откуда

$$\Omega \circ F[u(x)] \leqslant \Omega[\sup_{0<s<\tau} f(s)] + \sup_{0<s<\tau} a(s) \cdot \int_0^x b(t)\, dt, \ x \in I^n_\tau.$$

Тогда, в силу непрерывности функций $a(x)$, $f(x)$, $\Omega(x)$ и $F(x)$ имеем, что

$$\Omega \circ F[u(\tau)] \leqslant \Omega[\sup_{0<s<\tau} f(s)] + \sup_{0<s<\tau} a(s) \cdot \int_0^\tau b(t)\,dt,$$

откуда, в силу произвольности выбора $\tau \in I^n$ и следует искомая оценка (1.19). Оценка (1.21), в свою очередь, является непосредственным следствием оценки (1.19). Теорема доказана.

Для доказательства утверждения теоремы 4 зафиксируем некоторую точку $\tau \in I_r^n$, где r таково, что на I_r^n выполнено условие (1.34). Обозначим

$$z(x,\tau) \equiv \sup_{0<s<\tau} f(s) + \sup_{0<s<\tau} \alpha(s) \cdot \int_0^x a(t)\,u(t)\,dt +$$

$$+ \sup_{0<s<\tau} \beta(s) \cdot \int_0^x b(s)\left(\int_0^s c(t)\,H[u(t)]\,dt\right)ds, \quad x \in I_\tau^n,\ \tau \in I_r^n. \qquad (2.4)$$

Ясно, что $u(x) \leqslant z(x,\tau)$ для $x \in I_\tau^n$. Тогда

$$D_1 \cdots D_n z(x,\tau) = \sup_{0<s<\tau} \alpha(s) \cdot a(x)\,u(x) + \sup_{0<s<\tau} \beta(s) \cdot b(x) \int_0^x c(t)\,H[u(t)]\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \gamma(\tau) \cdot l(x)\left\{u(x) + \int_0^x c(t)\,H[u(t)]\,dt\right\} \leqslant \qquad (2.5)$$

$$\leqslant \gamma(\tau) \cdot l(x)\left\{z(x,\tau) + \int_0^x c(t)\,H[z(t,\tau)]\,dt\right\}, \quad x \in I_\tau^n,\ \tau \in I_r^n,$$

в силу определения функций $\gamma(x)$ и $l(x)$ (1.31) и монотонности $H(x)$. Обозначим

$$v(x,\tau) \equiv z(x,\tau) + \int_0^x c(t)\,H[z(t,\tau)]\,dt, \quad x \in I_\tau^n,\ \tau \in I_r^n. \qquad (2.6)$$

Ясно, что $z(x,\tau) \leqslant v(x,\tau)$. Тогда

$$D_1 \cdots D_n v(x,\tau) = D_1 \cdots D_n z(x,\tau) + c(x)\,H[z(x,\tau)] \leqslant$$
$$\leqslant \gamma(\tau) \cdot l(x) \cdot v(x,\tau) + c(x)\,H[v(x,\tau)] \leqslant \gamma(\tau) \cdot l(x)\{v(x,\tau) +$$
$$+ H[v(x,\tau)]\},$$

если учесть (2.5) и (1.31). Таким образом

$$D_1 \cdots D_n v(x,\tau) \leqslant \gamma(\tau) \cdot l(x) \cdot H_1[v(x,\tau)], \quad x \in I_\tau^n,\ \tau \in I_r^n,$$

где $H_1(v) \equiv v + H(v)$.

Отсюда, в силу утверждения теоремы 1 имеем, что

$$Q[v(x,\tau)] \leqslant Q[v(x,\tau)]|_{x_1=0} + \gamma(\tau)\int_0^x l(t)\,dt,\ x \in I_\tau^n,$$

где $Q(x)$ определяется выражением (1.33). Выполнение условий (1.2) и (1.3) теоремы 1 проверяется непосредственно, если учесть (2.4) и (2.6). Тогда

$$v(x,\tau) \leqslant Q^{-1}\left\{ Q[v(x,\tau)]|_{x_1=0} + \gamma(\tau)\cdot\int_0^x l(t)\,dt \right\},\ x \in I_\tau^n,\ \tau \in I_r^n.$$

Но в силу (2.5)

$$D_1\cdots D_n z(x,\tau) \leqslant \gamma(\tau)\cdot l(x)\cdot v(x,\tau) \leqslant$$

$$\leqslant \gamma(\tau)\cdot l(x)\cdot Q^{-1}\left\{ Q[v(x,\tau)]_{x_1=0} + \gamma(\tau)\cdot\int_0^x l(t)\,dt \right\},\ x \in I_\tau^n,\ \tau \in I_r^n,$$

откуда, с учетом (2.6) и (2.4) получаем, что

$$D_1\cdots D_n z(x,\tau) \leqslant \gamma(\tau)\cdot l(x)\cdot Q^{-1}\left\{ Q[\sup_{0<s<\tau} f(s)] + \gamma(\tau)\cdot\int_0^x l(t)dt \right\},$$

$$x \in I_\tau^n,\ \tau \in I_r^n.$$

В силу произвольности выбора $\tau \in I^n$ и непрерывности составляющих это неравенство функций отсюда следует, что

$$D_1\cdots D_n z(x,x) \leqslant \gamma(x)\cdot l(x)\cdot Q^{-1}\left\{ Q[\sup_{0<s<x} f(s)] + \gamma(x)\int_0^x l(t)\,dt \right\},\ x \in I_r^n,$$

если перейти к пределу при $x \to \tau$ и подставить $\tau = x$. Отсюда n-кратным интегрированием с учетом (2.4) получаем, что

$$z(x,x) \leqslant \sup_{0<s<x} f(s) + \int_0^x \gamma(t)\,l(t)\,Q^{-1}\left\{ Q[\sup_{0<s<t} f(s)] + \right.$$

$$\left. + \gamma(t)\int_0^t l(s)\,ds \right\} dt,\ x \in I_r^n,$$

откуда следует искомая оценка (1.32), так как $u(x) \leqslant z(x,x)$ для любого $x \in I_r^n$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5 в конечном счете основано на обращении некоторого дифференциального неравенства типа (1.1). Зафиксируем некоторую точку $\tau \in I^n$ и положим

$$z(x) = \sup_{0<s<t} f(s) + \sup_{0<s<\tau} a(s)\cdot\int_0^x b(t)\cdot H[u(t) + D_1\cdots D_n u(t)]\,dt,\ x \in I_\tau^n. \quad (2.7)$$

Имеем

$$D_1\cdots D_n z(x)=\sup_{0<s<\tau} a(s)\cdot b(x)\cdot H[u(x)+D_1\cdots D_n u(x)],\ x\in I^n_\tau,$$

$$z(x)|_{x_k=0}=\sup_{0<s<\tau} f(s)\ (k=1, 2,\cdots, n). \tag{2.8}$$

Так как $D_1\cdots D_n u(x)\leqslant z(x)$ при $x\in I^n_\tau$, получаем, с учетом условия (1.38), что

$$u(x)\leqslant\int\limits_0^x z(s)\,ds,\ x\in I^n_\tau, \tag{2.9}$$

так как из равенства нулю функции на некоторой гиперплоскости следует равенство нулю всех ее внутренних производных.

Отсюда в силу монотонности функции $H(x)$ из первого соотношения (2.8) и (2.9) следует, что

$$D_1\cdots D_n z(x)\leqslant\sup_{0<s<\tau} a(s)\cdot b(x)\cdot H\left[z(x)+\int\limits_0^x z(s)\,ds\right],\ x\in I^n_\tau.$$

Обозначим

$$v(x)\equiv z(x)+\int\limits_0^x z(s)\,ds. \tag{2.10}$$

Тогда

$$D_1\cdots D_n v(x)=D_1\cdots D_n z(x)+z(x)\leqslant\sup_{0<s<\tau} a(s)\cdot b(x)\cdot H(v)+v(x)\leqslant$$

$$\leqslant\mu(\tau)\cdot\nu(x)\cdot[v+H(v)],\ x\in I^n_\tau,$$

где $\mu(x)$ и $\nu(x)$ определяются (1.37). Из (2.7) и (2.10) непосредственно следует, что

$$D_1\cdots D_k v\cdot D_{k+1} v\geqslant 0\ (k=1, 2,\cdots, n-1),$$

$$D_1\cdots D_k v|_{x_{k+1}=0}=0\ (k=1, 2,\cdots, n-1).$$

Тогда из утверждения теоремы 1 следует, что

$$Q(v)\leqslant Q(v)|_{x_1=0}+\mu(\tau)\cdot\int\limits_0^x\nu(s)\,ds,\ x\in I^n_\tau,$$

где $Q(x)$ определяется выражением (1.33). Но так как

$$v(x)\geqslant z(x)\geqslant D_1\cdot\cdots\cdot D_n u(x),\ Q(v)\geqslant Q(D_1\cdots D_n u),\ x\in I^n_\tau$$

с учетом (2.10) и второго соотношения (2.8) имеем, что

$$Q[D_1\cdots D_n u(x)]\leqslant Q[\sup_{0<s<\tau} f(s)]+\gamma(\tau)\cdot\int\limits_0^x\nu(t)\,dt,\ x\in I^n_\tau,$$

откуда, в силу непрерывности составляющих неравенство функций

$$Q[D_1\cdots D_n u(\tau)]\leqslant Q[\sup_{0<s<\tau} f(s)]+\gamma(\tau)\cdot\int_0^\tau \nu(t)\,dt.$$

Отсюда, в силу произвольности выбора $\tau\in I^n$, после замены $\tau=x$ получаем искомую оценку (1.39). Оценка (1.40) является непосредственным следствием оценки (1.39) и условия (1.38). Теорема доказана.

Для доказательства утверждения теоремы 6 зафиксируем некоторую точку $y=(y_1,\cdots,y_n)\in P^n$ и положим

$$z(x)\equiv\max_{0<t<y} f(t)+\max_{0<t<y} a(t)\cdot\sum_{s_1=0}^{x_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1} b(s)\cdot H[u(s)],\quad x\in P_y^n\cdot$$

Легко видеть, что

$$\Delta_1 z(x)\equiv z(x_1+1,x_2,\cdots,x_n)-z(x_1,x_2,\cdots,x_n)=$$

$$=\max_{0<t<y} a(t)\cdot\sum_{s_2=0}^{x_2-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1} b(x_1,s_2,\cdots,s_n)\,H[u(x_1,s_2,\cdots,s_n)].$$

Аналогично

$$\Delta_1\cdots\Delta_n z(x)\equiv\Delta_1\cdots\Delta_{n-1} z(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n+1)-\Delta_1\cdots\Delta_{n-1} z(x_1,\cdots$$
$$\cdots,x_{n-1},x_n)=\max_{0<t<y} a(t)\cdot b(x)\cdot H[u(x)]\leqslant$$
$$\leqslant\max_{0<t<y} a(t),\ b(x)\cdot H[z(x)],\quad x\in P_y^n,$$

в силу условия $u(x)\leqslant z(x)$ и монотонности $H(x)$.

Из определения функции $z(x)$ следует, что $\Delta_i z(x)\geqslant 0$,

$$\Delta_1\cdots\Delta_{i-1} z(x)|_{x_i=0}=0$$

для любого $i=1,2,\ldots,n$.

Тогда, в силу утверждения теоремы 2, получаем, что

$$G[z(x)]\leqslant G[z(x)]|_{x_1=0}+\max_{0<t<y} a(t)\cdot\sum_{s_1=0}^{x_1-0}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1} p(s)=$$

$$=G[\max_{0<t<y} f(t)]+\max_{0<t<y} a(t)\cdot\sum_{s_1=0}^{x_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1} p(s),\quad x\in P_y^n,$$

где $G(x)$ определяется выражением (1.6). Тогда

$$G[u(x)]\leqslant G[\max_{0<t<y} f(t)]+\max_{0<t<y} a(t)\cdot\sum_{s_1=0}^{x_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{x_n-1} p(s),\quad x\in P_y^n,$$

если учесть, что $z(x)\geqslant u(x)$ и $G[z(x)]\geqslant G[u(x)]$.

Последняя оценка верна для любого $x\in P_y^n$ и, в частности, для $x=y$. Полагая $x=y$ и учитывая произвольность выбора $y\in P^n$, получаем искомую оценку (1.45) на всем множестве P^n. Оценка (1.46) является непосредственным следствием оценки (1.45). Теорема доказана.

В заключение выражаю искреннюю благодарность А. Б. Нерсесяну за внимание к работе и ценные замечания.

Ереванский государственный
университет

Поступила 7. VI. 1984

Ֆ. Հ. ՄԱՄԻԿՈՆՅԱՆ. Որոշ բազմաչափ ոչ գծային օպերատորային անհավասարությունների մասին *(ամփոփում)*

Ներկայացված աշխատանքում ուսումնասիրվում են բազմաչափ ոչ գծային որոշ դասերի դիֆերենցիալ, ինտեգրալ, ինտեգրոդիֆերենցիալ և տարբերական անհավասարությունների շրջ-ման հարցերը։ Նրանց լուծումների համար բերված են որոշակի գնահատականներ։

F. O. MAMIKONIAN. *On some multidimensional nonlinear operator inequalities* (summary)

In this paper some classes of differential, integral, integrodifferential and discrete inequalities are considered. For solutions of these inequalities effective estimates are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Peano.* Sull' integrabilita delle equazione differentiali di primo ordino, Atti R. Acad. Torino, vol. 21, 1885/1886, 667—685.
2. *Э. Ф. Беккенбах, Р. Беллман.* Неравенства, М., «Мир», 1965.
3. *I. Bihari.* A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations, Acta Math. Acad. Sci. Huhg., 7, 1956, 81—93.
4. Ou—Iang—Liang. The boundness of solutions of linear differential equations $y'' + a(t)y = 0$, Шусюэ Цзиньчжань, vol. 3, №3 1957, 409.
5. *P. R. Beesack.* Cranwall inequalities, Carleton Math. Lecture Notes, № 11, 1975.
6. *B. G. Pachpatte.* On some integral inequalities similar to Bellman—Bihari inequalities, J. of Math. Analysis and Applications, vol. 49, 1975, 794—802.
7. *G. Butler., T. Rogers.* A generalization of a lemma of Bihari and applications to pointwise estimates for integral equations, J. of Math. Anal. and Applications, vol. 33, 1971, 71—81.
8. *B. G. Pachpatte* On some fundamental integral inequalities, J. of Math. Analysis and Applications, vol. 73, 1980, № 1, 238—251.
9. *B. G. Pachpatte.* On some new integrodifferential inequalities of the Wendroff type, J. of Math. Analysis and Applications, vol. 73, № 2, 1980, 491—500.
10. *B. K. Bonge, B. G. Pachpatte.* On nonlinear intergal inequalities of the Wendroff type, J. of Math. Analysis and Applications, vol. 70, 1979, 161—169.
11. Lu—San Chen, Cheh—Chih Yeh. Some integrodifferential inequalities in n-independent variables, Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh, vol. 29A, 1981, 347—353.
12. *B. G. Pachpatte, S. M. Singare.* Discrete generalized Granwall inequalities in three independent variables, Pacific Journal of mathematics, vol. 82 № 1, 1979, 197—210.