ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XX, № 5, 1985 Математика

УДК 517.518.3

Г. Г. ГЕВОРКЯН

ОБ U_p^*-МНОЖЕСТВАХ СИСТЕМ ХААРА, УОЛША И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Дадим одно определение.

Определение (см. [1], опр. 2). Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная система функций на отрезке $[a, b]$. Скажем, что $E\subset [a, b]$ является U_p^*-множеством для системы $\{\varphi_n(x)\}$, если из того, что $\sum\limits_n |a_n|^p < +\infty$ и $\sum\limits_n a_n \varphi_n(x) = 0$ всюду на E следует, что все a_n равны нулю.

Очевидно, что если E является U_p^*-множеством для системы $\{\varphi_n(x)\}$, то оно является также $U_{p'}^*$-множеством при любом $p'<p$.

Если система $\{\varphi_n(x)\}$ полна и является системой сходимости, то U_2^*-множествами являются только и только множества полной меры.

Из одной теоремы работы [2]—[4] (см. [2], теорема 1, [3], [4]), вытекает следующая

Теорема А. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$—полная в $L_2[0,1]$ ортонормированная система функций. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует множество $E\subset[0,1]$, $\mu E<\varepsilon$, которое является U_p^*-множеством системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ при любом $p<2$.*

В работе [5] доказано существование множеств меры нуль, которые являются U_p^*-множествами для тригонометрической системы при любом $p<2$. Аналогичные теоремы для систем Хаара и Уолша получены в работе [6].

Вышеуказанные результаты являются частными случаями теорем работы [1]. Пусть $\{\psi_n(x)\}$ — одна из следующих систем: система Хаара, система Уолша, тригонометрическая система $\{e^{2\pi inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$. В работе [1] доказаны следующие теоремы.

Теорема Б. *Для любого p, $1<p\leqslant 2$, существует множество $E\subset[0, 1]$, $\mu E=0$, которое не является U_p^*-множеством для $\{\psi_n(x)\}$ и является $U_{p'}^*$-множеством при любом $p'<p$.*

Теорема В. *Для любого p, $1\leqslant p<2$, существует множество $E\subset[0, 1]$, $\mu E=0$, которое является U_p^*-множеством для системы $\{\psi_n(x)\}$ и не является $U_{p'}^*$-множеством для всех $p'>p$.*

В настоящей работе доказываются теоремы, аналогичные теоремам Б и В для $p>2$. Однако, очевидно, что в таких теоремах для $p>2$ множество E должно иметь полную меру. Вообще, если система $\{\varphi_n(x)\}$ обладает свойством локализации, то U_p^*-множества системы $\{\varphi_n(x)\}$ при $p\geqslant 2$ должны иметь полную меру.

Если объединить теоремы, доказанные в настоящей работе, то их можно сформулировать следующим образом. Пусть $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — одна из следующих систем:

1. система Хаара — $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$,
2. система Уолша—Пели—$\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$,
3. тригонометрическая система в следующей нумерации:

$$\psi_0(x)=1,\ \psi_{2n-1}(x)=e^{2\pi inx},\ \psi_{2n}(x)=e^{-2\pi inx}\ \text{при}\ n\geqslant 1.$$

Тогда верны следующие теоремы.

Теорема Г. *Для любого* p, $2<p\leqslant\infty$, *существует множество* $E\subset[0,1]$, $\mu E=1$, *которое не является* U_p^*-*множеством для системы* $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *и является* $U_{p'}^*$-*множеством при любом* $p'<p$.

Теорема Д. *Для любого* p, $2\leqslant p<\infty$ *существует множество* $E\subset[0,1]$, $\mu E=1$, *которое является* U_p^*-*множеством для системы* $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *и не является* $U_{p'}^*$-*множеством при всех* $p'>p$.

Теоремы *Г* и *Д* для каждой из вышеуказанных систем доказываются в отдельности.

В дальнейшем через C будут обозначаться константы, вообще говоря. зависящие от p, причем $C_i=C_i(p)$ ограничены. если $p\in[a,b]\subset(2,+\infty)$ Учитывая это обстоятельство константы C_i можно считать абсолютными константами (см. доказательства теорем 1—6).

Теорема 1. *Для любого* p, $2<p\leqslant\infty$ *существует множество* $E\subset[0,1]$, $\mu E=1$, *которое не является* U_p^*-*множеством для системы Хаара, но является* $U_{p'}^*$-*множеством при любом* $p'<p$.

Теорема 2. *Для любого* p, $2\leqslant p<\infty$ *существует множество* $E\subset[0,1]$, $\mu E=1$, *которое является* U_p^*-*множеством системы Хаара, но не является* $U_{p'}^*$-*множеством при всех* $p'>p$.

Мы докажем только теорему 1. Теорема 2 доказывается аналогично.

Доказательство теоремы 1. Для заданного $p<\infty$ выберем натуральные числа m_j и k_j, $j=1,2,\ldots$, удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$k_{j-1}+m_{j-1}<k_j, \tag{1}$$

$$m_j<-j\frac{2}{p}+k_j\left(-\frac{2}{p}+1\right)-\left(\sum_{\alpha=1}^{j-1}m_\alpha\right)\left(2-\frac{2}{p}\right), \tag{2}$$

$$j\frac{2}{q_j}-\frac{2}{q_j}\sum_{\alpha=1}^{j-1}m_\alpha+k_j\left(\frac{2}{q_j}-1\right)<m_j, \tag{3}$$

где

$$q_j=\frac{p-\dfrac{p-2}{j}}{p-1-\dfrac{p-2}{j}},\ \text{т. е. сопряженное к}\ p_j=p-\frac{p-2}{j}. \tag{4}$$

Выбор таких m_j и k_j возможен в силу того, что $1-\dfrac{2}{p}>\dfrac{2}{q_j}-1$. Обозначим

$$A_j=\bigcup_{x=0}^{2^{k_j}-1}\left(\frac{x}{2^{k_j}},\ \frac{x}{2^{k_j}}+\frac{1}{2^{k_j+m_j}}\right). \tag{5}$$

Покажем, что множество $E=[0,1]\setminus\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}A_j$ является требуемым. Обозначим

$$E_j=\bigcap_{\alpha=1}^{j}A_\alpha. \tag{6}$$

Мера множества A_j равна 2^{-m_j}. Условие (1) обеспечивает независимость множеств A_j. Поэтому $\mu E_j=2^{-\sum\limits_{\alpha=1}^{j}m_\alpha}$. Докажем, что множество E, являющееся дополнением пересечения вложенных множеств E_j, является $U_{p'}^*$-множеством для системы Хаара при любом $p'<p$. Пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\chi_n(x)$ сходится к нулю всюду на E и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^{p'}<+\infty$ для некоторого $p'<p$. Допустим, что для некоторого n коэффициент a_n не равен нулю. Пусть Δ — носитель функции $\chi_n(x)$, $\Delta^+=\{x\in[0,1]:\chi_n(x)>0\}$, $\Delta^-=\{x\in[0,1]:\chi_n(x)<0\}$. Возьмем полиномы $\varphi_j(x)$ по системе Хаара со следующими свойствами:

1. если $\left(\frac{\varkappa}{2^{k_j}},\ \frac{\varkappa}{2^{k_j}}+\frac{1}{2^{k_j+m_j}}\right)\subset E_l\cap\Delta$, то

$$\varphi_j(x)=\operatorname{sign}\left(\chi_n\left(\frac{\varkappa}{2^{k_j}}+\frac{1}{2^{k_j+m_j+1}}\right)\right)(\mu\Delta)^{-1/2}\ \text{на}\ \left(\frac{\varkappa}{2^{k_j}},\ \frac{\varkappa}{2^{k_j}}+\frac{1}{2^{k_j+m_j}}\right)$$

и

$$\varphi_j(x)=-\operatorname{sign}\left(\chi_n\left(\frac{\varkappa}{2^{k_j}}+\frac{1}{2^{k_j+m_j+1}}\right)\right)\cdot(\mu\Delta)^{-1/2}\ \text{на}$$

$$\left(\frac{\varkappa}{2^{k_j}}+\frac{1}{2^{k_j+m_j}},\ \frac{\varkappa}{2^{k_j}}+\frac{2}{2^{k_j+m_j}}\right).$$

2. $\varphi_j(x)=0$ — в остальных случаях.

Учитывая (3) нетрудно видеть, что $\left(\hat{g}_\chi(n)=\int\limits_0^1 g(x)\chi_n(x)\,dx\right)$

$$\sum_n|\hat{\varphi}_{j,\chi}(n)|^{q_j}\leqslant\left(\frac{(\mu\Delta)^{-1/2}}{2^{\frac{k_j+m_j-1}{2}}}\right)^{q_j}\frac{2^{-\sum\limits_{\alpha=1}^{j}m_\alpha}}{2^{-k_j-m_j+1}}\leqslant$$

$$\leqslant(\mu\Delta)^{-\frac{q_j}{2}}\cdot 2^{k_j\left(1-\frac{q_j}{2}\right)-m_j\frac{q_j}{2}-1+\frac{q_j}{2}-\sum\limits_{\alpha=1}^{j-1}m_\alpha}\leqslant(\mu\Delta)^{-1}\cdot 2^{-j}.$$

Для функций $\psi_j(x)=\chi_n(x)-\varphi_j(x)$ имеем

$$\hat{\psi}_{j,\chi}(n)=1,\ \sum_{k\neq n}|\hat{\psi}_{j,\chi}(k)|^{q_j}\leqslant(\mu\Delta)^{-1}\cdot 2^{-j}, \tag{7}$$

$$\psi_j(x)=0\ \text{на}\ E_j. \tag{8}$$

Из того, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ сходится к нулю вне $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$ и дополнение каждого E_j является объединением конечного числа отрезков типа Хаара (см. [7], [8]), следует, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ вне каждого E_j равномерно сходится к нулю. Поэтому из (8) следует

$$0=\lim_{m\to\infty}\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{m} a_k \chi_k(x)\right)\psi_j(x)\,dx=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \widehat{\psi}_{j,\chi}(k). \tag{9}$$

Из (7) и (9) для достаточно больших j (для которых $q_j > q'$) получим

$$|a_n| \leqslant \sum_{k\neq n} |a_k|\,|\widehat{\psi}_{j,\chi}(k)| \leqslant \left\{\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^{p'}\right\}^{1/p'}\left\{\sum_{k\neq n}|\widehat{\psi}_{j,\chi}(k)|^{q'}\right\}^{1/q'} \leqslant \tag{10}$$

$$\leqslant \left\{\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^{p'}\right\}^{1/p'} \{(\mu\Delta)^{-1}\,2^{-j}\}^{1/q_j}.$$

Правая часть неравенства (10) стремится к нулю при $j\to\infty$. Это противоречит тому, что $a_n\neq 0$. Этим доказано, что E является $U^*_{p'}$-множеством для системы Хаара при любом $p'<p$.

Теперь построим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \chi_n(x)$, который сходится к нулю на E и $\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^p < +\infty$. Для этого достаточно построить полиномы по системе Хаара $f_j(x)$, которые обладают следующими свойствами:

1. $f_0(x)\equiv 1$,

2. $\widehat{f}_{j,\chi}(n)=0$, когда $n\leqslant 2^{k_j}$ или $n>2^{k_j+m_j}$, $j=1, 2,\cdots$,

3. $\sum_{j=0}^{m} f_j(x)=0$ вне E_m и $\sum_{j=1}^{m} f_j(x)=2^{\sum_{\alpha=1}^{m} m_\alpha}$ на E_m, $m=1, 2,\cdots$,

4. $\sum_{n=0}^{\infty}|\widehat{f}_{j,\chi}(n)|^p<2^{1-j}$, $j=1, 2,\cdots$.

В качестве функций $f_j(x)$ при $j\geqslant 1$ возьмем

$$f_j(x)=\begin{cases} -2^{\sum_{\alpha=1}^{j-1} m_\alpha}, & \text{когда } x\in E_{j-1}\setminus E_j\\ 2^{\sum_{\alpha=1}^{j} m_\alpha}-2^{\sum_{\alpha=1}^{j-1} m_\alpha}, & \text{когда } x\in E_j\\ 0, & \text{когда } x\overline{\in} E_{j-1}.\end{cases} \tag{11}$$

Свойства 2 и 3 очевидны. Проверим выполнение свойства 4. Очевидно, что

$$\|f_j\|_2^2 < 2^{2\sum\limits_{\alpha=1}^{j-1} m_\alpha} \cdot \mu E_{j-1} + 2^{2\sum\limits_{\alpha=1}^{j} m_\alpha} \cdot \mu E_j < 2 \cdot 2^{\sum\limits_{\alpha=1}^{j} m_\alpha} . \tag{12}$$

Коэффициенты Фурье-Хаара функции $f_j(x)$ для $n \overline{\in} (2^{k_j}, 2^{k_j+m_j}]$ равны нулю. Пусть $n \in (2^{k_j}, 2^{k_j+m_j}]$, тогда для некоторого натурального $\varkappa$ имеем

$$\hat{f}_{j,\varkappa}(n) = \int\limits_{\frac{\varkappa}{2^{k_j}}}^{\frac{\varkappa+1}{2^{k_j}}} f_j(x)\, \chi_n(x)\, dx. \tag{13}$$

Из условия (1) следует, что $\left[\frac{\varkappa}{2^{k_j}}, \frac{\varkappa+1}{2^{k_j}}\right] \subset E_j$. Поэтому (см. (5))

$$\hat{f}_{j,\varkappa}(n) = 2^{\sum\limits_{\alpha=1}^{j} m_\alpha} \int\limits_{\left[\frac{\varkappa}{2^{k_j}}, \frac{\varkappa+1}{2^{k_j}}\right] \cap E_j} \chi_n(x)\, dx = 2^{\sum\limits_{\alpha=1}^{j} m_\alpha} \int\limits_{\frac{\varkappa}{2^{k_j}}}^{\frac{\varkappa}{2^{k_j}} + \frac{1}{2^{k_j+m_j}}} \chi_n(x)\, dx.$$

Следовательно

$$|\hat{f}_{j,\varkappa}(n)| \leqslant 2^{\sum\limits_{\alpha=1}^{j} m_\alpha} \cdot \|\chi_n\|_\infty \cdot 2^{-k_j-m_j} \leqslant 2^{\sum\limits_{\alpha=1}^{j} m_\alpha - \frac{k_j+m_j}{2}} . \tag{14}$$

Из (12), (14) и (2) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}_{j,\chi}(n)|^p = \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}_{j,\chi}(n)|^2\, |\hat{f}_{j,\chi}(n)|^{p-2} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cdot 2^{\sum\limits_{\alpha=1}^{j} m_\alpha} \cdot 2^{\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{j} m_\alpha - \frac{k_j+m_j}{2}\right)(p-2)} =$$

$$= 2 \cdot 2^{\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{j-1} m_\alpha\right)(p-1) - k_j\left(\frac{p}{2}-1\right) + \frac{p}{2} m_j} \leqslant 2^{1-j}.$$

В случае $p < \infty$ теорема доказана.

В случае $p = \infty$ числа k_j и m_j нужно выбрать следующим образом:

$$k_{j-1} + m_{j-1} < k_j$$

$$m_j < k_j - 2\sum_{\alpha=1}^{j-1} m_\alpha ,$$

$$2(j-1) - 2\left(1 - \frac{1}{j}\right)\sum_{\alpha=1}^{j-1} m_\alpha + k_j\left(1 - \frac{2}{j}\right) < m_j .$$

В остальном доказывается аналогично. Теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 числа k_j и m_j нужно взять такими, чтобы удовлетворялись условия

$$m_{j-1}+k_{j-1}<k_j,$$

$$k_j\left(\frac{p-2}{p}\right)+\left(\sum_{\alpha=1}^{j-1}m_\alpha\right)^{\frac{2(p-1)}{p}}+j\,\frac{2(p-1)}{p}<m_j,$$

$$m_j<-j\,\frac{2}{p+\frac{1}{j}}+k_j\left(1-\frac{2}{p+\frac{1}{j}}\right)-\left(\sum_{\alpha=1}^{j-1}m_\alpha\right)\left(2-\frac{2}{p+\frac{1}{j}}\right).$$

Пусть I — некоторый отрезок типа Хаара, т. е. $I=\left[\frac{x}{2^k},\frac{x+1}{2^k}\right]$.

Разделим I на 2^ν равных частей: $\Delta_j=\left[\frac{x}{2^k}+\frac{j-1}{2^{k+\nu}},\frac{x}{2^k}+\frac{j}{2^{k+\nu}}\right]$, $j=1, 2,\cdots,2^\nu$. Обозначим $\delta_j=\left[\frac{x}{2^k}+\frac{j-1}{2^{k+\nu}},\frac{x}{2^k}+\frac{j-1}{2^{k+\nu}}+\frac{1}{2^{k+\nu+m}}\right]$, т. е. левый конец δ_j совпадает с левым концом Δ_j и $\mu\Delta_j/\mu\delta_j=2^m$. Положим

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{на } \bigcup_{j=1}^{2^\nu}(\Delta_j\setminus\delta_j)\\ 1-2^m & \text{на } \bigcup_{j=1}^{2^\nu}\delta_j\\ 0 & \text{на } [0,1]\setminus I,\end{cases}\tag{15}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 \text{ на } \bigcup_{j=1}^{2^\nu}\delta_j=\bigcup_j\left[\frac{x}{2^k}+\frac{j-1}{2^{k+\nu}},\frac{x}{2^k}+\frac{j-1}{2^{k+\nu}}+\frac{1}{2^{k+m+\nu}}\right]\\ -1 \text{ на } \bigcup_{j=1}^{2^\nu}\left[\frac{x}{2^k}+\frac{j-1}{2^{k+\nu}}+\frac{1}{2^{k+m+\nu}},\frac{x}{2^k}+\frac{j-1}{2^{k+\nu}}+\frac{2}{2^{k+m+\nu}}\right]\\ 0 \text{ в остальных случаях.}\end{cases}\tag{16}$$

Легко заметить, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ полиномы по системе Уолша.

Обозначим $\hat{\psi}_W(n)=\int_0^1\psi(t)\,W_n(t)\,dt$, $n=0,1,2,\cdots$, где $\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — система Уолша в нумерации Пели.

Верна следующая (см. [1], лемма 2)

Лемма 1. *Для любого p, $2<p<\infty$ и любого ν верны следующие неравенства:*

$$1^\circ\ \sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}_W(n)|^p<C_1\cdot 2^{m-k(p-1)},$$

$$2^\circ\ \sum_{n=0}^{\infty}|\hat{\varphi}_W(n)|^q<C_1\cdot 2^{(k+m)/(1-p)},$$

где q — сопряженное к p, т. е. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Применяя эту лемму можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Для любого p, $2 < p \leqslant \infty$, существует множество $E \subset [0, 1]$, $\mu E = 1$, которое не является U_p^*-множеством для системы Уолша и является $U_{p'}^*$-множеством при любом $p' < p$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $p < \infty$. Построим ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ из полиномов $f_j(x)$ по системе Уолша, у которого коэффициенты суммируются со степенью p и множество, где этот ряд по системе Уолша сходится к нулю является $U_{p'}^*$-множеством при любом $p' < p$.

Возьмем $f_1(x) \equiv 1$. Выберем токое натуральное число k_2, чтобы нашлось натуральное число m_2, удовлетворяющее следующим неравенствам:

$$\left(p - \frac{p-2}{2} - 2\right) k_2 + 2\left(p - \frac{p-2}{2} - 1\right) < m_2 < -2 + k_2(p-2). \tag{17}$$

Отрезок [0,1] разделим на 2^{k_2} равных отрезка и в каждом из них построим функции $\varphi_2^{(j)}(x)$ и $f_2^{(j)}(x)$ (см. (15), (16)), которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{\varphi}_{2,W}^{(j)}(n)|^p < C_1 \cdot 2^{m_2 - k_2(p-1)}, \tag{18}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}_{2,W}^{(j)}(n)|^{q_2} < C_1 \cdot 2^{\frac{k_2+m_2}{1-\left(p-\frac{p-2}{2}\right)}}, \tag{19}$$

где q_2 сопряженное к $p - \dfrac{p-2}{2}$.

При этом соответствующие ν при построении $\varphi_2^{(j)}(x)$ и $f_2^{(j)}(x)$ можно взять такими, что если обозначить $\varphi_2(x) = \sum\limits_j \varphi_2^{(j)}(x)$ и $f_2(x) = -\sum\limits_j f_2^{(j)}(x)$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{\varphi}_{2,W}(n)|^p < C_1 \cdot 2^{m_2 - k_2(p-1)} \cdot 2^{k_2} \tag{20}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}_{2,W}(n)|^{q_2} < C_2 \cdot 2^{\frac{k_2+m_2}{1-\left(p-\frac{p-2}{2}\right)}} \cdot 2^{k_2}. \tag{21}$$

Этого можно добиться следующим образом. Для любого j существует такое $n(j)$, что $\widehat{f}_{2,W}^{(j)}(n) = 0$ и $\widehat{\varphi}_{2,W}^{(j)}(n) = 0$ для $n > n(j)$. Необходимо при построении функций $f_2^{(j+1)}(x)$ и $\varphi_2^{(j+1)}(x)$ числа ν взять настолько большими, чтобы первые $n(j)$ коэффициентов Фурье по системе Уолша у функций $f_2^{(j)}(x)$ и $\varphi_2^{(j)}(x)$ были нулями.

Функция $f_1(x) + f_2(x)$ равна нулю там, где $\varphi_2(x)$ не равна единице. Обозначим

$$E_2 = \{x \in [0,1] : f_1(x) + f_2(x) \neq 0\}.$$

Функция $f_1(x) + f_2(x)$ принимает значение 2^{m_2} на E_2 и $\mu E_2 = 2^{-m_2}$. Существует n_2 такое, что $\widehat{f_{2,w}}(n) = 0$ при $n \geqslant 2^{n_2}$.

Множество E_2 является объединением конечного числа отрезков типа Хаара. Выберем число k_3 так, чтобы 2^{-k_3} было меньше чем длина наименьшего составляющего отрезка множества E_2 и нашлось натуральное число m_3 такое, чтобы

$$\left(p - \frac{p-2}{3}\cdot 2\right) k_3 + \left(1 - p + \frac{p-2}{3}\right) m_2 + 3\left(p - \frac{p-2}{3} - 1\right) < m_3 <$$

$$< -3 + k_3(p-2) + (p-1) m_2. \tag{22}$$

Каждый составляющий отрезок множества E_2 разделим на отрезки длины 2^{-k_3} (их всего $2^{k_3 - m_2}$) и в каждом из них построим функции $f_3^{(j)}(x)$ и $\varphi_3^{(j)}(x)$ так, чтобы

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}_{3,w}^{(j)}(n)|^p < C_1 \cdot 2^{m_3 - k_3(p-1)},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}_{3,w}^{(j)}(n)|^{q_3} < C_1 \cdot 2^{\frac{m_3 + k_3}{1 - \left(p - \frac{p-2}{3}\right)}}, \tag{23}$$

где q_3 — сопряженное к $p - \dfrac{p-2}{3}$.

Обозначим $\varphi_3(x) = \sum_j \varphi_3^{(j)}(x)$ и $f_3(x) = -(\sum_j f_3^{(j)}(x)) \cdot 2^{m_2}$. При построении функций $\varphi_3^{(j)}(x)$ и $f_3^{(j)}(x)$ соответствующие ν можно взять такими, чтобы

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{\varphi}_{3,w}(n)|^{q_3} < C_1 \cdot 2^{\frac{m_3 + k_3}{1 - \left(p - \frac{p-2}{3}\right)}} \cdot 2^{k_3 - m_2}, \tag{24}$$

$$\sum_{n=2^{n_2}}^{\infty} |\widehat{f}_{3,w}(n)|^p < C_1 \cdot 2^{m_3 - k_3(p-1)} \cdot 2^{k_3 - m_2} \cdot 2^{p m_2}, \tag{25}$$

$$\widehat{f}_{3,w}(n) = 0, \text{ когда } n \leqslant 2^{n_2}. \tag{26}$$

Пусть уже построены функции $f_i(x)$, $\varphi_i(x)$ и множества E_i $(i < j)$ так, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{\varphi}_{i,w}(n)|^{q_i} < C_1 \cdot 2^{\frac{m_i + k_i}{1 - \left(2 - \frac{p-2}{i}\right)}} \cdot 2^{k_i - \sum_{\alpha=2}^{i-1} m_\alpha}, \tag{27}$$

где q_i — сопряженное к $p - \dfrac{p-2}{i}$,

$$\sum_{n=2^{n_{i-1}}}^{\infty} |\widehat{f}_{i,w}(n)|^p < C_1 \cdot 2^{m_i - k_i(p-2) + (p-1)\sum_{\alpha=2}^{i-1} m_\alpha}, \tag{28}$$

$$\widehat{f}_{l,\,W}(n)=0, \text{ когда } n\leqslant 2^{n_{l-1}} \text{ или } n>2^{n_l}, \tag{29}$$

$$E_l=\left\{x\in[0,1]:\sum_{\alpha=1}^{l} f_\alpha(x)\neq 0\right\},\quad \mu E_l=2^{-\sum\limits_{\alpha=2}^{l} m_\alpha}, \tag{30}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{l} f_\alpha(x)=2^{\sum\limits_{\alpha=2}^{l} m_\alpha} \text{ на } E_l, \tag{31}$$

$E_l\subset E_{l-1}$ является объединением конечного числа отрезков типа (32) Хаара,

$$\left(p-\frac{p-2}{i}-2\right)k_l+\left(1-p+\frac{p-2}{i}\right)\left(\sum_{\alpha=2}^{l-1} m_\alpha-i\right)<m_l<-i+$$
$$+k_l(p-2)+(p-1)\sum_{\alpha=2}^{l-1} m_\alpha. \tag{33}$$

Теперь можно построить функции $f_l(x)$ и $\varphi_l(x)$ и множество E_l которые удовлетворяют соотношениям (27)—(33) (они строятся так же как и $\varphi_3(x)$ и $f_3(x)$, исходя из $f_1(x)$, $f_2(x)$ и E_2).

Напомним, что функции $f_j(x)$ и $\varphi_j(x)$—полиномы по системе Уолша. Из (28), (29) и (33) для коэффициентов ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j(x)=$ $=\sum\limits_{n=}^{\infty} a\ \ W_n(x)$ получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|\widehat{f}_{j,\,W}(n)|^p\right)\leqslant$$

$$\leqslant 1+C_1\sum_{l=2}^{\infty} 2^{m_l-k_l(p-2)+(p-1)\sum\limits_{\alpha=2}^{l-1} m_\alpha}\leqslant 1+C_1\sum_{j=2}^{\infty}2^{-j}<+\infty. \tag{34}$$

Из (30), (32) и (34) следует, что коэффициенты ряда $\sum\limits_{n=0} a_n W_n(x)$ сходятся к нулю и всюду на $E=[0,1]\setminus\bigcap\limits_{l=1}^{\infty} E_l$

$$\lim_{l\to\infty}\sum_{n=0}^{2^{n_l}} a_n W_n(x)=0.$$

Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n W_n(x)$ всюду на E сходится к нулю (см. [9], лемма 1). Из этого и из неравенства (34) следует, что E не является U_p^*-множеством для системы Уолша, так как $a_0=1$.

Теперь докажем, что E является $U_{p'}^*$-множеством при любом $p'<p$. Пусть ряд $\sum\limits^{\infty} b_n W_n(x)$ сходится к нулю всюду на E и

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^{p'}<+\infty \text{ при некотором } p'<p. \tag{35}$$

Рассмотрим функции $\psi_j(x)=1-\varphi_j(x)$. Функции $\psi_j(x)$ обладают следующими свойствами:

$$\psi_j(x)=0 \text{ на } E_j, \tag{36}$$

$$\hat{\psi}_{j,W}(0)=1 \text{ для любого } j, \tag{37}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\hat{\psi}_{j,W}(n)|^{q_j}\leqslant C_1\cdot 2^{\frac{m_j+k_j}{1-\left(p-\frac{p-2}{j}\right)}}\cdot 2^{k_j-\sum\limits_{\alpha=2}^{j-1}m_\alpha}. \tag{38}$$

Так как функции $\psi_j(x)$ являются полиномами по системе Уолша, можно рассмотреть формальные произведения ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ на $\psi_j(x)$. Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(j)} W_n(x) \tag{39}$$

является формальным произведением ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ на $\psi_j(x)$, т. е. коэффициенты $C_n^{(j)}$ определяются по формулам

$$C_n^{(j)}=\sum_{m+\nu=n} b_m\hat{\psi}_j(\nu). \tag{40}$$

Из (36) и из того, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)=0$ на E следует, что ряды (39) всюду сходятся к нулю. Следовательно, все $C_n^{(j)}$ равны нулю. Для достаточно больших j q_j меньше чем q', где q' — сопряженное к p'. Поэтому из

$$0=C_n^{(j)}=\sum_{m+\nu=n} b_m\hat{\psi}_j(\nu)=b_n+\sum_{\substack{m+\nu=n\\ \nu\neq 0}} b_m\hat{\psi}_j(\nu)$$

имеем (см. (38) и (33))

$$|b_n|\leqslant\sum_{m+\nu=n}|b_m|\,|\hat{\psi}_j(\nu)|\leqslant\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^{p'}\right\}^{1/p'}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\hat{\psi}_j(\nu)|^{q'}\right\}^{1/q'}\leqslant$$

$$\leqslant A^{1/p'}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\hat{\psi}_j(\nu)|^{q_j}\right\}^{1/q_j}\leqslant C_1^{1/q_j}A^{1/p'}\left\{2^{\frac{m_j+k_j}{1-\left(p-\frac{p-2}{j}\right)}}\cdot 2^{k_j-\sum\limits_{\alpha=2}^{j-1}m_\alpha}\right\}^{1/q_j}\leqslant$$

$$<C_1^{1/q_j}A^{1/p'}\left\{2^{\frac{\left(p-\frac{p-2}{j}-2\right)k_j+\left(1-p+\frac{p-2}{j}\right)\left(\sum\limits_{\alpha=2}^{j-1}m_\alpha-j\right)+k_j}{1-\left(p-\frac{p-2}{j}\right)}}\right. \times$$

$$\times 2^{\left. k_j - \sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha \right|^{1/q_j}} = C_1^{1/q_j} A^{1/p'} \cdot 2^{-j\frac{1}{q_j}}. \quad (41)$$

Устремляя j к бесконечности из (41) получим, что все b_n равны нулю. В случае $p<\infty$ теорема доказана.

Рассмотрим случай $p=\infty$. Функции $f_j(x)$ и $\varphi_j(x)$ строятся теми же методами, только вместо чисел p и $p-\frac{p-2}{j}$ берутся, соответственно, ∞ и j. Тогда вместо неравенств (27), (28) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{\varphi}_{j,W}(n)|^{q_j} \leqslant C_1 \cdot 2^{\frac{m_j+k_j}{1-j}} 2^{k_j - \sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}, \quad (42)$$

где q_j — сопряженное к j.

$$\|\hat{f}_{j,W}(n)\|_\infty \leqslant C_1 2^{-k_j}, \quad (43)$$

$$\hat{f}_{j,W}(n)=0, \text{ когда } n \leqslant 2^{n_{j-1}} \text{ или } n>2^{n_j}. \quad (44)$$

Неравенство (43) следует из того, что для функции $f(x)$, определяемой формулой (15), $\|f\|_1<2\cdot 2^{-k}$.

Кроме того числа k_j и m_j выбираются так, чтобы

$$k_j>j \quad (45)$$

и

$$m_j>j(j-1)+(j-2)k_j+(1-j)\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha. \quad (46)$$

Как и в случае $p<\infty$ доказывается, что ряд $\sum f_j(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$ сходится к нулю на $E=[0,1]\setminus \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\in[0,1]: \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\neq 0\right\}$, $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ и $a_0=1$. Поэтому E не является U_∞^*-множеством.

Теперь докажем, что E является $U_{p'}^*$-множеством для любого $p'<\infty$. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ сходится к нулю на E и

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^{p'}<+\infty \text{ для некоторого } p'<\infty. \quad (47)$$

Рассмотрим формальные произведения ряда $\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ на полиномы $\psi_j(x)=1-\varphi_j(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(j)} W_n(x), \text{ где } C_n^{(j)}=\sum_{m\dotplus\nu=n} b_m \hat{\psi}_{j,W}(\nu). \quad (48)$$

Ряды $\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(j)} W_n(x)$ всюду сходятся к нулю. Следовательно, все $C_n^{(j)}$ равны нулю.

Поэтому из

$$0=C_n^{(j)}=b_n+\sum_{\substack{m+\nu=n\\ \nu\neq 0}} b_m \hat{\psi}_{j,w}(\nu)$$

для достаточно больших j из (42) и (46) получим (для которых $j>p'$)

$$|b_n|\leqslant \sum_{\substack{m+\nu=n\\ \nu\neq 0}} |b_m|\,|\hat{\psi}_{j,w}(\nu)|<\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|b_m|^{p'}\right\}^{1/p'}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\hat{\varphi}_{j,w}(\nu)|^{q'}\right\}^{1/q'}\leqslant$$

$$\leqslant A^{1/p'}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\hat{\varphi}_{j,w}(\nu)|^{q_j}\right\}^{1/q_j}\leqslant C_1^{1/q_j}A^{1/p'}\left(2^{\frac{m_j+k_j}{1-j}}\,2^{k_j-\sum_{\alpha=2}^{j-1}m_\alpha}\right)^{1/q_j}\leqslant$$

$$\leqslant C_1^{\frac{1}{q_j}}A^{\frac{1}{p'}}\,2^{-\frac{j}{q_j}}. \tag{49}$$

Устремляя j к бесконечности из (49) получим, что все b_n равны нулю. Теорема 3 полностью доказана.

Используя оценки леммы 1, такими же методами как доказывалась теорема 3, можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Для любого p, $2\leqslant p<\infty$, существует U_p^*-множество, которое не является $U_{p'}^*$-множеством при любом $p'>p$ для системы Уолша.*

Для доказательства теоремы 4 в случае $2<p<\infty$ числа m_j и k_j нужно взять такими, чтобы

$$(p-2)\,k_j+j\,(p-1)+(1-p)\sum_{\alpha=2}^{j-1}m_\alpha<m_j<k_j\left(p-2+\frac{p-2}{j}\right)+$$

$$+\left(\sum_{\alpha=2}^{j-1}m_\alpha\right)\left(1-p-\frac{p-2}{j}\right),$$

а в случае $p=2$

$$2\leqslant m_j<\frac{k_j}{j}+\left(\sum_{\alpha=2}^{j-1}m_\alpha\right)\left(1+\frac{1}{j}\right)-j.$$

Технически несколько сложнее доказываются аналогичные теоремы для тригонометрической системы. А именно, верны следующие теоремы.

Теорема 5. *Для любого p, $2<p\leqslant\infty$, существует множество $E\subset[-\pi,\pi]$, $\mu E=2\pi$, которое не является U_p^*-множеством для тригонометрической системы и является $U_{p'}^*$-множеством при любом $p'<p$.*

Теорема 6. *Для любого p, $2\leqslant p<\infty$, существует множество $E\subset[-\pi,\pi]$, $\mu E=2\pi$, которое является U_p^*-множеством для тригонометрической системы и не является $U_{p'}^*$-множеством при всех $p'>p$.*

В случае $p=2$ теорема 6 доказана Ивашев-Мусатовым [10].

Обозначим через

$$\lambda_h(x)=\begin{cases}\dfrac{(9h+x)^2}{6h^2}, & -9h\leqslant x\leqslant -7h\\ 1-\dfrac{(x+6h)^2}{3h^2}, & -7h\leqslant x\leqslant -6h\\ 1, & -6h\leqslant x\leqslant -3h\\ 1-\dfrac{(x+3h)^2}{3h^2}, & -3h\leqslant x\leqslant -2h,\ \lambda_h(-x)=-\lambda_h(x)\\ \dfrac{x^2}{6h^2}, & -2h\leqslant x\leqslant 0\\ 0\ , & -\pi\leqslant x\leqslant -9h\end{cases} \tag{50}$$

при условии $9h<\pi$ и продолжим ее с перидом 2π

Ясно, что $\widehat{\lambda}_h(0)=0\left(\widehat{g}(n)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(x)\,e^{-inx}\,dx\right)$. Подсчитаем остальные коэффициенты Фурье функции $\lambda_h(x)$

$$\widehat{\lambda}_h(n)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-9h}^{9h}\lambda_h(t)\,e^{-int}\,dt=\frac{i}{\pi}\int\limits_{0}^{9h}\lambda_h(t)\sin nt dt=\frac{-i}{n^2\pi}\int\limits_{0}^{9h}\lambda_h^{''}(t)\sin nt dt=$$

$$=\frac{-2i}{n^2h^2\pi}\left\{-\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{2h}\sin nt dt+\frac{2}{3}\int\limits_{3h}^{3h}\sin nt dt+\frac{2}{3}\int\limits_{6h}^{7h}\sin nt dt-\frac{1}{3}\int\limits_{7h}^{9h}\sin nt dt\right\}=$$

$$=\frac{i}{3n^3h^2\pi}(1-3\cos 2nh+2\cos 3nh-2\cos 6nh+3\cos 7nh-\cos 9nh)=$$

$$=\cdots=\frac{'8i}{3n^3h^2\pi}\sin\frac{9}{2}nh\sin\frac{nh}{2}\left(\cos 7nh\cos\frac{nh}{2}-\cos 2nh\right)\cdot \tag{51}$$

Возьмем какой-нибудь отрезок $\left[\frac{\varkappa-1}{2^k}\pi,\ \frac{\varkappa}{2^k}\pi\right]$, где $k\in\mathbf{N}$, $\varkappa\in$ $\in[-2^k+1,\ 2^k]\cap\mathbf{N}$. Разделим этот отрезок на 2^ν равных частей: $\left[\frac{\varkappa-1}{2^k}\pi+\frac{j-1}{2^{k+\nu}}\pi,\ \frac{\varkappa-1}{2^k}\pi+\frac{j}{2^{k+\nu}}\pi\right]$, $j=1,2,\cdots,2^\nu$ и положим

$$\varphi(x)=\sum_{j=1}^{2^\nu}\lambda_h(x-\gamma_{k,\nu}^{\varkappa,j}), \tag{52}$$

где $\gamma_{k,\nu}^{\varkappa,j}=\frac{\varkappa-1}{2^k}\pi+\frac{j-\frac{1}{2}}{2^{k+\nu}}\pi$ и $h=\frac{\pi}{2^{k+\nu+m}}$. Функция $\varphi(x)$ на множестве $\bigcup\limits_{j=1}^{2^\nu}[\gamma_{k,\nu}^{\varkappa,j}-6h,\gamma_{k,\nu}^{\varkappa,j}-3h]$ принимает значение 1. Положим

$$f(x)=\begin{cases} 2^m-1 & \text{на } \bigcup\limits_{j=1}^{2^\nu}\left[\gamma_{k,\nu}^{\varkappa,j}-5h,\ \gamma_{k,\nu}^{\varkappa,j}-4h\right] \\ -1 & \text{на } \left[\frac{\varkappa-1}{2^k}\pi,\ \frac{\varkappa}{2^k}\pi\right]\setminus\left(\bigcup\limits_{j=1}^{2^\nu}\left[\gamma_{k,\nu}^{\varkappa,j}-5h,\ \gamma_{k,\nu}^{\varkappa,j}-4h\right]\right) \\ 0 & \text{вне } \left[\frac{\varkappa-1}{2^k}\pi,\ \frac{\varkappa}{2^k}\pi\right]. \end{cases} \tag{53}$$

Лемма 2. *Пусть $2<p<\infty$, N и ε — любые положительные числа. Тогда существует некоторая константа C_2, такая, что при достаточно больших ν имеют место следующие неравенства:*

1°. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(n)|^p\leqslant C_2\cdot 2^{(1-p)k+m}$,

2°. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{\varphi}(n)|^q\leqslant C_2\cdot 2^{k+m/1-p}$, *где q—сопряженное к p;*

3°. $|\hat{f}(n)|<\varepsilon$, $|\hat{\varphi}(n)|<\varepsilon$ *при* $|n|\leqslant N$.

Доказательство. Нетрудно подсчитать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx\leqslant 2^{-k+1}\cdot\pi \tag{54}$$

и

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx<\pi\cdot 2^{m+1-k}. \tag{55}$$

Из (54) и (55) получим

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(n)|^p=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(n)|^2|\hat{f}(n)|^{p-2}<\sup_n|\hat{f}(n)|^{p-2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(n)|^2\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx\right\}^{p-2}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\leqslant C_3\cdot 2^{(1-p)k+m}. \tag{56}$$

Теперь докажем неравенство 2°. Ясно, что

$$\hat{\varphi}(n)=\hat{\lambda}(n)\sum_{j=1}^{2^\nu}e^{-in\gamma_{k,\nu}^{\varkappa,j}}=\lambda_h(n)\sum_{j=1}^{2^\nu}e^{-in\left[\frac{\varkappa-1}{2^k}\pi+\frac{j-\frac{1}{2}}{2^{k-\nu}}\pi\right]}=$$

$$=\hat{\lambda}(n)\frac{\sin\frac{\pi n}{2^{k+1}}}{\sin\frac{\pi n}{2^{k+\nu+1}}}e^{-in\pi\frac{\varkappa-\frac{1}{2}}{2^k}}=\frac{8i}{3n^3\pi}\sin\frac{9}{2}nh\sin\frac{nh}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi n}{2^{k+1}}}{\sin\frac{\pi n}{2^{k+\nu+1}}}\times$$

$$\times\left(\cos 7hn\cos\frac{hn}{2}-\cos 2hn\right)e^{-in\pi\frac{\varkappa-\frac{1}{2}}{2^k}}=\frac{8in\cdot 2^{\nu(k+\nu+m)}}{3n^3\pi^3}\times$$

$$\times \sin\frac{9\pi n}{2^{k+\nu+m+1}}\cdot\sin\frac{\pi n}{2^{k+\nu+m+1}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi n}{2^{k+1}}}{\sin\frac{\pi n}{2^{k+\nu+1}}}\times \tag{57}$$

$$\times\left(\cos\frac{7\pi n}{2^{k+m+\nu}}\cdot\cos\frac{\pi n}{2^{k+m+\nu+1}}-\sin\frac{2\pi n}{2^{k+m+\nu}}\right)e^{-ln\pi\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{2^k}\right)}.$$

Используя тождество

$$\cos 14x\cos x-\cos 4x=\sin\frac{9}{2}x\sin\frac{17}{2}x-\sin\frac{9}{2}x\sin\frac{19}{2}x$$

и неравенство $|\sin \alpha x|\leqslant C(\alpha)\,|\sin x|$, где $C(\alpha)$ — постоянная, зависящая только от целого числа α, получим

$$|\widehat{\varphi}(n)|\leqslant C_4\frac{2^{2(k+\nu+m)}}{|n|^3}\left|\sin\frac{\pi n}{2^{k+\nu+m+2}}\right|^3\left|\frac{\sin\frac{\pi n}{2^{k+1}}}{\sin\frac{\pi n}{2^{k+\nu+1}}}\right| \text{ для } n\neq 0. \tag{58}$$

Если $\sin\frac{\pi n}{2^{k+\nu+1}}=0$, то значением дроби $\left|\sin\frac{\pi n}{2^{k+1}}\right|\cdot\left|\sin\frac{\pi n}{2^{k+\nu+1}}\right|^{-1}$ в формулах (57) и (58) считается 2^ν.

Достаточно оценить $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\widehat{\varphi}(n)|^p$. При этом неоднократно пользуемся следующими соотношениями: $\frac{2}{\pi}x\leqslant\sin x\leqslant x$, когда $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}(\pi-x)\leqslant\sin x\leqslant\pi-x$, когда $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, $\sum\limits_{q=1}^{\mu}\alpha^q\approx\mu^{q+1}$.

$$\sum_{n=2^{k+m+\nu+2}}^{\infty}|\widehat{\varphi}(n)|^p\leqslant C_4^p\cdot 2^{(k+\nu+m)2p}\sum_{n=2^{k+\nu+m+2}}^{\infty}\frac{1}{n^{3p}}\left|\sin\frac{\pi n}{2^{k+\nu+m+2}}\right|^{3p}\times$$

$$\times\left|\frac{\sin\frac{\pi n}{2^{k+1}}}{\sin\frac{\pi n}{2^{k+\nu+1}}}\right|^p=C_4^p\cdot 2^{(k+m+\nu)2p}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\beta=0}^{2^{m+1}-1}\sum_{\gamma=0}^{2^\nu-1}\sum_{\delta=0}^{2^{k+1}-1}$$

$$\left(\frac{1}{(\alpha\cdot 2^{k+\nu+m+2}+\beta\cdot 2^{k+\nu+1}+\gamma\cdot 2^{k+1}+\delta)^{3p}}\right.$$

$$\left.\left|\sin\frac{(\beta\cdot 2^{k+\nu+1}+\gamma\cdot 2^{k+1}+\delta)\pi}{2^{k+\nu+m+1}}\right|^{3p}\left|\frac{\sin\frac{\delta\pi}{2^{k+1}}}{\sin\frac{(\gamma\cdot 2^{k+1}+\delta)\pi}{2^{k+\nu+1}}}\right|^p\right)\leqslant$$

$$\leqslant C_5\cdot 2^{(k+\nu+m)2p}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{3p}\cdot 2^{(k+m+\nu+1)3p}}\sum_{\beta=0}^{\infty}\left(\frac{\beta+1}{2^m}\right)^{3p}\sum_{\gamma=1}^{2^\nu-1}\sum_{\delta=0}^{2^{k+1}-1}\left|\frac{\sin\frac{\delta\pi}{2^{k+1}}}{\sin\frac{\gamma\pi}{2^\nu}}\right|^p\leqslant$$

$$C_6\cdot 2^{-(k+m+\nu)p}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{3p}}\times\sum_{\beta=1}^{2^{m+1}}\frac{\beta^{3p}}{2^{3mp}}\times\sum_{\gamma=1}^{2^{\nu}}\frac{2^{\nu p}}{\gamma^{p}}\sum_{\delta=0}^{2^{k+l}}\frac{\delta^{p}}{2^{kp}}\leqslant$$

$$\leqslant C_7\cdot 2^{-(k+m+\nu)p}\cdot\frac{2^{m(3p+1)}}{2^{3mp}}\cdot 2^{\nu p}\cdot\frac{2^{k(p+1)}}{2^{kp}}=C_7\cdot 2^{(1-p)(k+m)}. \tag{59}$$

Из (58) для $0<n<2^{k+\nu+m+2}$ имеем

$$|\widehat{\varphi}(n)|\leqslant C_8\,\frac{1}{2^{k+\nu+m+2}}\left|\frac{\sin\dfrac{\pi n}{2^{k+1}}}{\sin\dfrac{\pi n}{2^{k+\nu+1}}}\right|,$$

поэтому

$$\sum_{n=1}^{2^{k+\nu+m+2}-1}|\widehat{\varphi}(n)|^{p}\leqslant C_9\sum_{\beta=0}^{2^{m+1}-1}\sum_{\gamma=0}^{2^{\nu}-1}\sum_{\delta=0}^{2^{k+1}-1}|\widehat{\varphi}(\beta\cdot 2^{k+\nu+1}+\gamma\cdot 2^{k+1}+\delta+1)|^{p}\leqslant$$

$$\leqslant C_9\cdot 2^{-(k+\nu+m)p}\sum_{\beta=0}^{2^{m+1}-1}\sum_{\gamma=0}^{2^{\nu}-1}\sum_{\delta=0}^{2^{k+1}-1}\left|\frac{\sin\dfrac{(\delta+1)\pi}{2^{k+1}}}{\sin\dfrac{(\gamma\cdot 2^{k+1}+\delta+1)\pi}{2^{k+\nu+1}}}\right|^{p}\leqslant$$

$$\leqslant C_{10}\cdot 2^{-(k+\nu+m)p}\sum_{\beta=0}^{2^{m+1}-1}\sum_{\gamma=1}^{2^{\nu}-1}\sum_{\delta=0}^{2^{k+1}-1}\frac{2^{\nu p}}{\gamma^{p}}\cdot\frac{\delta^{p}}{2^{kp}}\leqslant \tag{60}$$

$$\leqslant C_{11}\cdot 2^{-(k+m+\nu)p}\cdot 2^{m}\cdot 2^{\nu p}\cdot\frac{2^{k(p+1)}}{2^{kp}}=C_{11}\cdot 2^{(k+m)(1-p)}.$$

Из (59) и (60) следует неравенство 2°. Неравенства 3° легко доказываются прямым подсчетом, однако они следуют и из известных теорем (см., напр., [11], стр. 86, [12], стр. 167, [13], стр. 77).

Доказательство теоремы 5. Сначала рассмотрим случай $p<\infty$. Для доказательства теоремы по индукции построим функции $f_j(x)$, $\varphi_j(x)$, множества E_j и G_j, натуральные числа n_j, k_j и m_j, которые обладают следующими свойствами:

1) $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_j\supset\cdots$ и каждое E_j является объединением конечного числа интервалов вида $\left(\frac{\varkappa}{2^k}\pi,\ \frac{\varkappa+3}{2^k}\pi,\right)$. Если $\left(\frac{\varkappa}{2^k}\pi,\ \frac{\varkappa+3}{2^k}\pi\right)$ —составляющий интервал множества E_j, $j\geqslant 2$, то $\left(\frac{\varkappa+1}{2^k}\pi,\ \frac{\varkappa+2}{2^k}\pi\right)$ — составляющий интервал множества G_j и наоборот;

2) $\varphi_j(x)=1$ на E_j и $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|\widehat{\varphi}_j(n)|\,|n|<+\infty$, $j\geqslant 2$;

3) $\sum\limits_{\alpha=1}^{j}f_\alpha(x)=2^{\sum\limits_{\alpha=2}^{j}m_\alpha}$ на G_j и $\sum\limits_{\alpha=1}^{j}f_\alpha(x)=0$ на $[-\pi,\pi]\setminus G_j$, причем $\mu G_j=2\pi\cdot 2^{-\sum\limits_{\alpha=2}^{j}m_\alpha}$;

4) $\hat{\varphi}_j(0)=0,\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{\varphi}_j(n)|^{q_j}<C_{12}\cdot 2^{\frac{m_j+k_j}{1-p_j}+k_j-\sum_{\alpha=2}^{j-1}m_\alpha}$, где q_j — сопряженное к $p_j=p-\dfrac{p-2}{j}$,

5) $f_1(x)\equiv 1,\ \hat{f}_j(0)=0$ для $j\geqslant 2$ и

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}_j(n)|^p<C_{12}\cdot 2^{m_j-k_j(p-2)+(p-1)\sum_{\alpha=2}^{j-1}m_\alpha},$$

6) $\sum_{|n|<n_{j-1}}|\hat{f}_j(n)|^p<2^{-j}$,

7) $\sum_{|n|>n_j}\left|\sum_{\alpha=1}^{j}\hat{f}_\alpha(n)\right|^p<2^{-j}$,

8) Если обозначим через $S_n(f_j, x)$ частичные суммы ряда Фурье функции $f_j(x)$, то

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{j}S_n(f_\alpha, x)\cdot\right|<2^{-j} \text{ для } n>n_j \text{ и всех } x\overline{\in}E_j,$$

9) $|S_n(f_j, x)|<2^{-j}$ для всех n и $x\overline{\in}E_{j-1}$,

10) $\left(p-\dfrac{p-2}{j}-2\right)k_j+\left(1-p+\dfrac{p-2}{j}\right)\left(\sum_{\alpha=2}^{j-1}m_\alpha-1\right)<m_j$,

11) $m_j<-j+k_j(p-2)-(p-1)\sum_{\alpha=2}^{j-1}m_\alpha$.

Допустим, что такие функции $f_j(x)$, $\varphi_j(x)$, множества E_j и G_j, натуральные числа n_j, k_j и m_j уже построены. Докажем, что в этом случае множество $E=[-\pi, \pi]\setminus\bigcap_{l=1}^{\infty}E_l$ является требуемым.

Из свойства 6) следует, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty}|\hat{f}_j(n)|$ сходится при любом n. Поэтому можно рассмотреть ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_j e^{inx},\quad \text{где}\quad a_n=\sum_{j=1}^{\infty}\hat{f}_j(n).$$

Оценим ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|a_n|^p$.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|a_n|^p=1+\sum_{|n|>}|a_n|^p=1+\sum_{n|>0}\left|\sum_{\alpha=1}^{\infty}\hat{f}_\alpha(n)\right|^p=1+\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{n_{j-1}<|n|<n_j}$$

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{\infty}\hat{f}_\alpha(n)\right|^p=1+\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{n_{j-1}<|n|<n_j}\left|\sum_{\alpha=1}^{j-1}\hat{f}(n)+\hat{f}_j(n)+\sum_{\alpha=j+1}^{\infty}\hat{f}_\alpha(n)\right|^p\leqslant$$

$$\leqslant 1+C_{13}\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{n_{j-1}<|n|<n_j}\left[\left|\sum_{\alpha=1}^{j-1}\hat{f}_\alpha(n)\right|^p+|\hat{f}_j(n)|^p+\left|\sum_{\alpha=j+1}^{\infty}\hat{f}_\alpha(n)\right|^p\right]\leqslant$$

$$\leqslant 1+C_{13}\left(\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{n_{j-1}<|n|<n_j}\left|\sum_{\alpha=1}^{j-1}\widehat{f}_\alpha(n)\right|^p+\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{n_{j-1}<|n|<n_j}|\widehat{f}_j(n)|^p+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{n_{j-1}<|n|<n_j}\left|\sum_{\alpha=j+1}^{\infty}\widehat{f}_\alpha(n)\right|^p\right)=1+C_{13}(I_1+I_2+I_3). \tag{61}$$

Отдельно оценим суммы I_1, I_2, I_3. Из свойства 7) имеем

$$I_1\leqslant\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{n_{j-1}<|n|}\left|\sum_{\alpha=1}^{j-1}\widehat{f}_\alpha(n)\right|^p\leqslant\sum_{j=2}^{\infty}2^{-j}<1. \tag{62}$$

Применив свойства 5), 11), для I_2 получим

$$I_2\leqslant\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}_j(n)|^p\leqslant C_{12}\sum_{j=2}^{\infty}2^{m_j-k_j(p-2)+(p-1)\sum_{\alpha=2}^{j-1}m_\alpha}<$$

$$<C_{12}\sum_{j=2}^{\infty}2^{-j}<C_{12}. \tag{63}$$

Для оценки суммы I_3 применим неравенство Гельдера к сумме $\sum_{n_{j-1}<|n|<n_j}\left|\sum_{\alpha=j+1}^{\infty}f_\alpha(n)\right|^p$. Получим (см. свойство 6))

$$\sum_{n_{j-1}<|n|<n_j}\left|\sum_{\alpha=j+1}^{\infty}\widehat{f}_\alpha(n)\right|^p\leqslant\left\{\sum_{\alpha=j+1}^{\infty}\left\{\sum_{n_{j-1}<|n|<n_j}|\widehat{f}_\alpha(n)|^p\right\}^{1/p}\right\}^p\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{\alpha=j+1}^{\infty}\left\{\sum_{|n|<n_{\alpha-1}}|\widehat{f}_\alpha(n)|^p\right\}^{1/p}\right\}^p\leqslant\left\{\sum_{\alpha=j+1}^{\infty}2^{-\frac{\alpha}{p}}\right\}^p\leqslant C_{14}2^{-j}. \tag{64}$$

Из (61) — (64) следует, что $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|a_n|^p<+\infty$, причем $a_0=1\neq 0$. Теперь докажем, что ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_n e^{inx}$ всюду на E сходится к нулю. Пусть x принадлежит множеству E. Тогда начиная с некоторого j_0 (см. 1)) $x\in E_j$, $j>j_0$. Обозначим через $S_n(x)$ частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_n e^{inx}$. Тогда из 8) и 9) для $n\geqslant n_j$, $j>j_0$ получим

$$|S_n(x)|=\left|\sum_{\alpha=1}^{\infty}S_n(f_\alpha,x)\right|\leqslant\left|\sum_{\alpha=1}^{j}S_n(f_\alpha,x)\right|+\sum_{\alpha=j+1}^{\infty}|S_n(f_\alpha,x)|\leqslant$$

$$\leqslant 2^{-j}+\sum_{n=j+1}^{\infty}2^{-\alpha}=2^{1-j}. \tag{65}$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_n e^{inx}$ всюду на E сходится к нулю. Этим доказано, что E не является U_p^*-множеством для тригонометрической системы.

Докажем, что E является $U_{p'}^*$-множеством при любом $p'<p$. Пусть ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}b_n e^{inx}$ всюду на E сходится к нулю и

$$\beta=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|b_n|^{p'}<+\infty. \tag{66}$$

Рассмотрим функции $\psi_j(x)=1-\varphi_j(x)$. Функции $\psi_j(x)$ удовлетворяют следующим соотношениям (см. 2), 4)):

$$\psi_j(x)=0 \text{ на } E_j, \tag{67}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\widehat{\psi}_j(n)|\,|n|<+\infty, \tag{68}$$

$$\sum_{|n|>1}|\widehat{\psi}_j(n)|^{q_j}<C_{12}\cdot 2^{\frac{m_j+k_j}{1-p_j}+k_j-\sum\limits_{\alpha=1}^{j-1}m_\alpha}. \tag{69}$$

Обозначим через

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n^{(j)}e^{inx},\ j=1,\ 2,\ 3,\cdots \tag{70}$$

формальное произведение ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}b_n e^{inx}$ на ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{\psi}_j(n)\,e^{inx}$, т. е.

$$C_n^{(j)}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{\psi}_j(k)\,b_{n-k}.$$

Из (67), (68) и из того что $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}b_n e^{inx}=0$ на E (см. [14], стр. 520) следует, что все ряды (70) всюду сходятся к нулю. Следовательно, все $C_n^{(j)}$ равны нулю. Поэтому

$$0=C_n^{(j)}=b_n+\sum_{|k|>1}\widehat{\psi}_j(k)\,b_{n-k}. \tag{71}$$

Пусть q' — сопряженное к p' и $q_j<q'$. Тогда для $j<j_0$ получим (см. (71). (66), 4), 11))

$$|b_n|\leqslant\sum_{|k|>1}|\widehat{\psi}_j(k)\,b_{n-k}|\leqslant\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\widehat{\varphi}_j(k)|^{q'}\right\}^{1/q'}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|b_n|^{p'}\right\}^{1/p'}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\widehat{\varphi}_j(k)|^{q_j}\right\}^{1/q_j}\beta^{1/p'}\leqslant C_{13}\,\beta^{1/p'}\,[2^{\frac{m_j+k_j}{1-p_j}+k_j-\sum\limits_{\alpha=2}^{j-1}m_\alpha}]^{1/q_j}\leqslant$$

$$<C_{13}\cdot\beta^{1/p'}\cdot 2^{-\frac{j}{q_j}}. \tag{72}$$

Устремляя j к ∞ из (72) получим, что все b_n равны нулю.

Теперь перейдем к построению функций $f_j(x)$, $\varphi_j(x)$, множеств E_j и G_j, натуральных чисел n_j, k_j и m_j, которые удовлетворяют условиям 1)—11).

Возьмем такие натуральные числа m_2 и k_2, которые удовлетворяют неравенствам 10) и 11). Разделим отрезок $[-\pi, \pi]$ на 2^{k_2+1} равных по длине отрезков: Δ_1, $\Delta_2\cdots$, $\Delta_{2^{k_2+1}}$. В каждом из отрезков Δ_j построим функции $f_2^{(j)}(x)$ и $\varphi_2^{(j)}(x)$, определяемые формулами (53) и (52), которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}_2^{(j)}(n)|^p \leqslant C_2 \cdot 2^{(1-p)k_2+m_2}, \tag{73}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}_2^{(j)}(n)|^{q_2} \leqslant C_2 \cdot 2^{\frac{k_2+m_2}{1-p_2}}. \tag{74}$$

Учитывая пункт 3° леммы 2 соответствующие ν при определении функций $\varphi_2^{(j)}(x)$, $f_2^{(j)}(x)$ можно взять такими, чтобы

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}_2(n)|^p \leqslant 4C_2 \cdot 2^{(1-p)k_2+m_2} \cdot 2^{k_2} \tag{75}$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}_2(n)|^{q_2} \leqslant 4 \cdot C_2 \cdot 2^{\frac{k_2+m_2}{1-p_2}} \cdot 2^{k_2}, \tag{76}$$

где $f_2(x) = \sum_j f_2^{(j)}(x)$, $\varphi_2(x) = \sum_j \varphi_2^{(j)}(x)$.
Для этого нужно при построении функций $f_2^{(j)}(x)$ и $\varphi_2^{(j)}(x)$ взять $n_2^{(j)}$ такое, чтобы $\sum_{|n|>n_2^{(j)}} |\widehat{f}_2^{(1)}(n) + \cdots + \widehat{f}_2^{(j-1)}(n)|^p < \varepsilon_1^{(j)}$ и $\sum_{|n|>n_2^{(j)}} |\widehat{\varphi}_2^{(1)}(n) + \cdots + \widehat{\varphi}_2^{(j-1)}(n)|^{q_2} < \varepsilon_2^{(j)}$ и взять ν в функциях $f_2^{(j)}(x)$ и $\varphi_2^{(j)}(x)$ такое, чтобы $|\widehat{\varphi}_2^{(j)}(n)| < \delta_2^{(j)}$ и $|\widehat{f}_2^{(j)}(n)| < \delta_2^{(j)}$, когда $|n| < n_2^{(j)}$. Если выбрать $\varepsilon_1^{(j)}$ и $\delta_2^{(j)}$ достаточно малыми, тогда выполняется (75) и (76).

Обозначим $E_1 = [-\pi, \pi]$.

$G_2 = \{x \in [-\pi, \pi]: 1 + f_2(x) \neq 0\}$, $E_2 = \{x \in [-\pi, \pi]: \varphi_2(x) = 1\}$.

Возьмем $n_1 = 1$ и выберем n_2 такое, чтобы

$$\sum_{|n|>n_2} |\sum_{\alpha=1}^{2} \widehat{f}_\alpha(n)|^p < 2^{-2}$$

и

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{2} S_n(f_\alpha, x)\right| = |S_n(1+f_2, x)| < 2^{-2} \text{ для } n > n_2 \text{ и } x \overline{\in} E_2.$$

Построенные функции $f_2(x)$, $\varphi_2(x)$, множества E_2 и G_2, числа n_2, m_2 и k_2 удовлетворяют всем условиям 1)—11).

Допустим, что функции $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha=1}^{j-1}$ и $\{\varphi_\alpha(x)\}_{\alpha=2}^{j-1}$, множества $\{E_\alpha\}_{\alpha=1}^{j-1}$ и $\{G_\alpha\}_{\alpha=2}^{j-1}$, числа $\{n_\alpha\}_{\alpha=1}^{j-1}$, $\{m_\alpha\}_{\alpha=2}^{j-1}$ и $\{k_\alpha\}_{\alpha=2}^{j-1}$ уже построены и удовлетворяют условиям 1)—11). Построим функции $f_j(x)$, $\varphi_j(x)$, множества E_j и G_j, числа n_j, k_j и m_j.

Из 1) следует, что

$$\gamma_j = \rho(G_{j-1}, E_{j-1}^c) = \inf_{\substack{x \in G_{j-1} \\ y \overline{\in} E_{j-1}}} |x - y| > 0.$$

Возьмем $k_j > k_{j-1}$ такое, чтобы существовало m_j, удовлетворяющее условиям 10), 11), $2^{-k_j}\pi$ было меньше чем длина наименьшего составляющего интервала множества G_{j-1} и

$$\frac{2^{-k_j} 2 \cdot 2^{\sum\limits_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}}{\gamma_j} < 2^{-j-4}. \tag{77}$$

Составляющие интервалы множества G_{j-1} разделим на отрезки длины $\pi 2^{-k_j}$: $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_\beta$, где $\beta = 2^{k_j+1-\sum\limits_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}$, так как $\mu G_{j-1} = 2\pi \times 2^{-\sum\limits_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}$. Возьмем произвольные положительные числа $\{\varepsilon_j^{(\gamma)}, \delta_j^{(\gamma)}\}_{\gamma=1}^{\beta}$. На отрезке Δ_1 построим функции $f_j^{(1)}(x)$ и $\varphi_j^{(1)}(x)$ такие, что

$$\sum_{|n|<n_{j-1}} |\widehat{f}_j^{(1)}(n)|^p < 2^{-j-2} \cdot 2^{-p\sum\limits_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}, \tag{78}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}_j^{(1)}(n)|^p < C_2 \cdot 2^{(1-p)k_j+m_j}, \tag{79}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}_j^{(1)}(n)|^{q_j} < C_3 \cdot 2^{\frac{k_j+m_j}{1-p_j}}. \tag{80}$$

Выберем $n_j^{(1)}$ так, чтобы

$$\sum_{|n|>n_j^{(1)}} |\widehat{f}_j^{(1)}(n)|^p < \varepsilon_j^{(1)}, \tag{81}$$

$$\sum_{|n|>n_j^{(1)}} |\widehat{\varphi}_j^{(1)}(n)|^{q_j} < \varepsilon_j^{(1)} \tag{82}$$

и

$$|S_n(f_j^{(1)}, x)| < 2^{-j-2} \cdot 2^{-\sum\limits_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha} \quad \text{для } n \geqslant n_j^{(1)} \text{ и } x \overline{\in} E_{j-1}. \tag{83}$$

Соотношение (83) имеет место для больших $n_j^{(1)}$, так как $f_j^{(1)}(x) = 0$ вне E_{j-1}. Так последовательно можно выбрать функции $f_j^{(\gamma)}(x)$, $\varphi_j^{(\gamma)}(x)$ и числа $n_j^{(\gamma)}$, которые будут удовлетворять следующим неравенствам:

$$|\widehat{\varphi}_j^{(\gamma)}(n)| < \delta_j^{(\gamma)}, \text{ когда } |n| < n_j^{(\gamma)}, \tag{84}$$

$$|\widehat{f}_j^{(\gamma)}(n)| < \delta_j^{(\gamma)}, \text{ когда } |n| < n_j^{(\gamma)}, \tag{85}$$

$$\sum_{|n|>n_j^{(\gamma)}} |\widehat{\varphi}_j^{(1)}(n) + \cdots + \widehat{\varphi}_j^{(\gamma-1)}(n)|^p < \varepsilon_j^{(\gamma)}, \tag{86}$$

$$\sum_{|n|>n_j^{(\gamma)}} |\widehat{f}_j^{(1)}(n) + \cdots + \widehat{f}_j^{(\gamma-1)}(n)|^p < \varepsilon_j^{(\gamma)}, \tag{87}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}_j^{(\gamma)}(n)|^{q_j} \leqslant C_3 \cdot 2^{\frac{k_j+m_j}{1-p_j}}, \tag{88}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}_j^{(\gamma)}(n)|^p \leqslant C_2 \cdot 2^{(1-p)k_j+m_j}, \tag{89}$$

$$|S_n(f_j^{(\gamma)}, x)| < 2^{-j-\gamma} \cdot 2^{-\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha} \quad \text{для } n > n_j^{(\gamma)} \text{ и } x \overline{\in} E_{j-1}, \tag{90}$$

$$S_n(f_j^{(\gamma+1)}, x)| < 2^{-j-\gamma} \cdot 2^{-\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha} \quad \text{для } n < n_j^{(\gamma)} \text{ и } x \overline{\in} E_{j-1}. \tag{91}$$

Учитывая (77) и то, что $\int\limits_{\Delta_j} |f_j^{(\gamma)}(x)|\, dx < \pi \cdot 2^{-k_j+1}$ (см. (54) и определение функций $f(x)$), получим

$$|S_n(f_j^{(\gamma)}, x)| < \frac{\pi \cdot 2^{-k_j+1}}{\gamma_j} < 2^{-j-1} \cdot 2^{-\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}. \tag{92}$$

Из (90), (91), (92) легко вытекает, что

$$\left|S_n\left(\sum_{\gamma=1}^{\beta} f_j^{(\gamma)}, x\right)\right| < 2^{-j} \cdot 2^{-\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha} \quad \text{для всех } n \text{ и } x \overline{\in} E_{j-1}, \tag{93}$$

Выбирая $\varepsilon_j^{(\gamma)}$ и $\delta_j^{(\gamma)}$ достаточно малыми из (84), (86) и (88) получим

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\sum_{\gamma=1}^{\beta} \widehat{\varphi}_j^{(\gamma)}(n)\right|^{q_j} \leqslant 2\, C_2 \cdot \beta \cdot 2^{\frac{k_j+m_j}{1-p_j}} = 4 \cdot C_2 \cdot 2^{\frac{k_j+m_j}{1-p_j} + k_j - \sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}. \tag{94}$$

Обозначим $\varphi_j(x) = \sum_{\gamma=1}^{\beta} \varphi_j^{(\gamma)}(x)$, $f_j(x) = 2^{\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha} \sum_{\gamma=1}^{\beta} f_j^{(\gamma)}(x)$ и

$$E_j = \{x \in [-\pi, \pi] : \varphi_j(x) = 1\}.$$

Очевидно

$$\sum_{\alpha=1}^{j} f_\alpha(x) = \begin{cases} 2^{\sum_{\alpha=2}^{j}} & \text{на } G_j \\ 0 & \text{вне } G_j, \end{cases}$$

где G — некоторое множество, удовлетворяющее условию 1). При достаточно малых $\varepsilon_j^{(\gamma)}$ и $\delta_j^{(\gamma)}$ из (85), (87), (89), получим также, что

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}_j(n)|^p < 2\, C_2 \cdot \beta \cdot 2^{p\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}\; 2^{(1-p)k_j+m_j} = 4C_2 \cdot 2^{(2-p)k_j+m_j+(p-1)\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha}$$

и

$$\sum_{|n|<n_{j-1}} |\widehat{f}_j(n)|^p < 2^{-j}.$$

Условие 9) следует из (93). Теперь можно выбрать число $n_j < n_j^{(\beta)}$ так чтобы выполнились условия 7) и 8). Таким образом, последовательности $\{f_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ построены и, тем самым, теорема в случае $p < \infty$ доказана.

В случае $p = \infty$ теорема доказывается аналогично, только числа k_j, m_j и n_j нужно выбрать такими, чтобы

$$m_j < k_j - \sum_{\alpha=1}^{j-1} m_\alpha,$$

$$2(j-1) + 2\left(1 - \frac{1}{j}\right)\sum_{\alpha=1}^{j-1} m_\alpha + k_j\left(1 - \frac{2}{j}\right) < m_j$$

и вместо свойств 4)—7) выполнились следующие условия:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}_j(n)|^{1+\frac{1}{j}} < C_{12}\cdot 2^{\frac{m_j+k_j}{1-j}+k_j-\sum_{\alpha=2}^{j-1} m_\alpha},$$

$$\sup_n |\hat{f}_j(n)| < C_{12},$$

$$\sup_{|n|<n_{j-1}} |\hat{f}_j(n)| < 2^{-j},$$

$$\sup_{|n|>n_j} \left|\sum_{\alpha=1}^{j} \hat{f}_\alpha(n)\right| < 2^{-j}.$$

Теорема доказана.

В случае $p = \infty$ теорему 5 сформулируем в другом виде.

Теорема 7. *Среди M-множеств тригонометрического ряда есть такие, что коэффициенты нуль-ряда, сходящегося к нулю на E, не суммируются ни с какой степенью $p < \infty$.*

Ереванский государственный
университет

Поступила 12. III. 1984

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ. Հաարի, Ուոլշի և եռանկյունաչափական համակարգերի U_p^*-բազմությունների մասին. *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկված են Հաարի, Ուոլշի և եռանկյունաչափական համակարգերի U_p^*-բազմությունները։ Թվարկված համակարգերից ամեն մեկի համար ապացուցված է.

1. Կամայական p-ի համար, $2 < p < \infty$, գոյություն ունի $E \subset [0,1]$ բազմություն, $\mu E = 1$, որը չի հանդիսանում U_p^*-բազմություն, բայց հանդիսանում է $U_{p'}^*$-բազմություն կամայական $p' < p$ դեպքում,

2. Կամայական p-ի համար $2 < p < \infty$ գոյություն ունի U_p^*-բազմություն, որը չի հանդիսանում $U_{p'}^*$-բազմություն $p' > p$ դեպքում։

U_p^* բազմության սահմանումը տրված է [1]-ում։

G. G. GEVORKIAN. *On U_p^*-sets of Haar, Walsh and trigonometric systems*
(summary)

In this paper we consider the U_p^*-sets of Haar, Walsh and trigonometric systems.

For every such system we prove

1. For every $p, 2 < p < \infty$ there exist a set $E \subset [0, 1]$, $\mu E = 1$, which is not U_p^*-set, but is $U_{p'}^*$-set for every $p' < p$.

2. For every $p, 2 < p < \infty$ there exist U_p^*-set, which is not $U_{p'}^*$-set for every $p' > p$.

The definition of U_p^*-set was given in [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Г. Геворкян.* О множествах единственности для некоторых ортогональных рядов. Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XVIII, № 6, 1983, 448—475.
2. *Г. Г. Геворкян.* О множествах единственности для полных ортонормированных систем и интегралов Фурье, ДАН Арм.ССР, LXXII, № 4, 1981, 218—223.
3. *Г. Г. Геворкян.* О множествах единственности для полных ортонормированных систем, Мат. заметки, 32, № 5, 1982, 651—656.
4. *L. Golzani.* Existense of sets of uniqueness of l^p for General orthonormal Systems' Proc. A.M.S., Vol. 83, № 3, 1981, 569—571.
5. *L. Michele, P. M. Soordi.* A Remark of Sets of Uniqueness of l_p, Boll, U.M.I. (4), 11, 1975, 64—65.
6. *Г. Г. Геворкян.* О множествах единственности для рядов по некоторым полным ортонормированным системам, Ученые записки ЕГУ, № 2, 1981, 10—22.
7. *Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян.* О единственности рядов по системе Хаара и Уолша, ИАН СССР, сер. математ., 28, № 6, 1964, 1391—1408.
8. *Г. М. Мушегян.* О множествах единственности для системы *Хаара,* Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 2, № 6, 1967, 350—361.
9. *В. А. Скворцов.* Пример ряда Уолша со всюду сходящейся к нулю подпоследовательностью частичных сумм, Матем. сб., 97, вып. 4, 1975, 517—539.
10. *О. С. Ивашев-Мусатов.* О коэффициентах тригонометрических нуль-рядов, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, 1957, 559—578.
11. *А. А. Талалян.* Представление измеримых функций рядами, УМН, XV, 5 (95), 1960, 77—141.
12. *Г. Алексич.* Проблемы сходимости ортогональных рядов, М., 1963.
13. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, М., 1961.
14. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, т. 1, М., 1965.