ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XX, № 2, 1985 Математика

УДК 517.53

А. Г. БАЛАКЯН

МЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ЕДИНСТВЕННОСТИ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В БЕСКОНЕЧНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ ТИПА L

1. Впервые Лузиным и Приваловым [1] были построены примеры мероморфных в единичном круге функций, равномерно стремящихся к нулю на единичной окружности по области D, которая получается из единичного круга удалением внутренностей некоторой счетной системы внешних друг к другу контуров, заключающих внутри себя все полюсы. Далее, А. А. Гончар [2] обобщил эти примеры Лузина—Привалова, рассмотрев области типа L, которые получаются из единичного круга удалением счетного множества непересекающихся кружков. Им был получен метрический критерий единственности аналитических функций в областях типа L.

В настоящей работе с разных точек зрения изучается вопрос единственности в областях типа L. При изучении этого вопроса основным фактором является связь свойства единственности области D типа L с гармонической мерой $\omega = \omega(z, \Gamma_0, D)$ единичной окружности Γ_0 относительно D: если $\omega > 0$, то область D обладает свойством единственности (это сразу вытекает из теоремы о двух константах). Отметим, что вышеуказанный критерий единственности Гончара также основывается на условии $\omega > 0$.

Итак, все случаи неединственности относятся к таким областям типа L, для которых $\omega = 0$.

Естественно возникает вопрос: существуют ли такие области типа L с условием $\omega = 0$, которые обладали бы свойством единственности.

В этой связи укажем на работу Н. У. Аракеляна и П. М. Готье [3], где приведено описание примера А. А. Гончара области типа L, для которой $\omega = 0$, но тем не менее область обладает свойством единственности.

Этот пример наталкивает на задачу получения метрических критериев единственности для областей типа L при условии $\omega = 0$.

Настоящая работа посвящена изучению этой задачи. Основным результатом является теорема 2.1, изложенная в параграфе 2, где приведены достаточно обозримые метрические критерии единственности.

Основная трудность получения таких критериев связана с необходимостью установления двусторонних оценок гармонических мер единичной окружности относительно конечносвязанных областей, аппроксимирующих область D, с учетом того, что указанные гармонические меры стремятся к нулю.

Отметим еще, что метод доказательства теоремы 2.1 принципиально отличается от метода построения вышеуказанного примера единственности Гончара, основанного на понятии квазианалитичности Данжуа-Карлемана и опирается на другую идею «предельного» использования теоремы о двух константах*.

Для полноты изложения в параграфе 1 настоящей работы мы приводим подробное доказательство некоторых результатов о единственности, относящихся к случаю $\omega > 0$, которые были без доказательства сформулированы А. А. Гончаром в работе [2]. Они естественным образом предшествуют результатам § 2.

2°. Введем обозначения: $K(a, r) = \{z;\ |z-a| < r\}$,

$$\Gamma(a, r) = \{z;\ |z-a| = r\},\quad K(a, r_1, r_2) = \{z;\ r_1 < |z-a| < r_2\}$$

и

$$K_0 = K(0, 1),\quad \Gamma_0 = \Gamma(0, 1).$$

Пусть $\{z_j\}_1^\infty$ — некоторая последовательность точек из K_0, такая, что $|z_j| \to 1$, при $j \to \infty$ и $\{z_j\}' = \Gamma_0$. Пусть, далее, $\{\rho_j\}_1^\infty$ — последовательность положительных чисел, таких, что замкнутые кружки $\overline{K}(z_j, \rho_j)$ лежат в K_0 и попарно не пересекаются. Обозначим $K_j = K(z_j, \rho_j)$ и $\Gamma_j = \Gamma(z_j, \rho_j)$.

Определение 1. Областью типа L называется бесконечносвязная область вида

$$D(\{z_j, \rho_j\}_1^\infty) = K_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{K}_j.$$

Кружки K_j, $j = 1, 2, \ldots$, назовем *исключительными* кружками области D.

В течение всего изложения нам понадобится понятие гармонической меры $\omega(z, E, D)$ некоторого граничного множества E относительно области D в точке z.

Пусть $H(D)$ — класс голоморфных в D функций, а $H_B(D)$ — класс голоморфных и ограниченных в D функций. Очевидно $H_B(D) \subset H(D)$.

Евклидово расстояние между точкой z и множеством E обозначим через $d(z, E)$.

Определение 2. Пусть $D \subset \mathbf{C}$ — область, $E \subset \partial D$. Скажем, что D обладает свойством H-единственности (соответственно H_B-единственности) относительно множества E, если из условий $f \in H(D)$ (соответственно, $f \in H_B(D)$) и

$$\lim_{d(z, E) \to 0} f(z) = 0 \qquad (*)$$

следует, что $f \equiv 0$.

Очевидно, свойство H-единственности D относительно E более сильное, чем свойство H_B-единственности D относительно E.

Впредь, рассматривая H-(или H_B)-единственность области D типа L, будем предполагать, что $E = \Gamma_0$, поэтому слова «относительно Γ_0» будем опускать.

Лемма 1. *Пусть D и D_1 являются областями типа L с конечным числом несовпадающих исключительных кружков. Тогда эти области об-*

---

* А. А. Гончар любезно сообщил автору, что эта общая идея была высказана Л. Карлесоном во время их научной беседы.

ладают (не обладают) свойством H-(или H_B) -единственности одновременно.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда D_1 получается из D удалением одного кружка из множества исключительных кружков, т. е. если $D=D(\{z_j, \rho_j\}_1^\infty)$, то $D_1=D(\{z_j, \rho_j\}_2^\infty)$ и доказать, что свойство H-(или H_B)-единственности области D_1 влечет это же свойство для области D.

Для этого, в свою очередь, достаточно доказать следующее утверждение: всякую функцию $f\in H(D)$ можно представить в виде

$$f(z)=f_1(z)\cdot f_2(z), \text{ для } z\in D, \tag{1}$$

где $f_1\in H(D_1)$, $f_2\in H(\mathbf{C}\setminus K_1)$ и f_2 не имеет нулей вне некоторой окрестности кружка K_1.

Действительно, предположим, что область D_1 обладает свойством H-единственности, и пусть функция $f\in H(D)$ удовлетворяет условию (*). Тогда из представления (1) следует, что функция $f_1\in H(D_1)$ также удовлетворяет условию (*). Следовательно, имеем, что $f_1(z)\equiv 0$, для $z\in D_1$, поэтому ввиду (1) получим, $f(z)\equiv 0$ для $z\in D_1$, откуда $f\equiv 0$, т. е. область D обладает свойством H-единственности.

Если в факторизации (1) дополнительно предположить, что $f\in H_B(D)$, то ввиду отсутствия нулей у функции f_2 вне некоторой окрестности K_1, мы сразу получаем, что $f_1\in H_B(D)$, что приводит к доказательству леммы в случае H_B-единственности.

Переходя к доказательству сформулированного утверждения, выберем окружность $\gamma=\Gamma(z_1, \rho)$, $\rho>\rho_1$, отделяющую кружок K_1 от остальных кружков K_j, $j=2, 3,\cdots$ и так, чтобы функция f не имела нулей на γ

Пусть $\mathrm{Ind}_{f(\gamma)}(0)=m$. Тогда в достаточно малой окрестности γ—в кольце вида $K(z_1, \tau_1, \tau_2)$ $(\rho_1<\tau_1<\rho<\tau_2)$, можно выделить однозначную ветвь аналитической функции

$$\Phi(z)=\log[f(z)(z-z_1)^{-m}].$$

Из лоранового разложения функции Φ в $K(z_1, \tau_1, \tau_2)$ имеем представление $\Phi(z)=\varphi_1(z)+\varphi_2(z)$ для $z\in K(z_1, \tau_1, \tau_2)$, где $\varphi_1\in H(K(z_1, \tau_2))$ и $\varphi_2\in H(\mathbf{C}\setminus K(z_1, \tau_1))$.

Отсюда следует, что

$$f(z)=f_1(z)\cdot f_2(z),\ z\in K(z_1, \tau_1, \tau_2), \tag{2}$$

где положено $f_1=\exp\{\varphi_1(z)\}$, для $z\in K(z_1, \tau_2)$ и $f_2(z)=(z-z_1)^m\times$ $\times\exp\{\varphi_2(z)\}$, для $z\in\mathbf{C}\setminus K(z_1, \tau_1)$.

Записав представление (2) в виде $f_2(z)=\dfrac{f(z)}{f_1(z)}$ для $z\in K(z_1, \tau_1, \tau_2)$ и учитывая, что обе функции f и f_1 голоморфны в кольце $K(z_1, \rho_1, \tau_2)$ и f_1 не имеет там нулей, заключаем, что функция f_2 допускает аналитическое продолжение из области $\mathbf{C}\setminus K(z_1, \tau_1)$ в область $\mathbf{C}\setminus K_1$, т. е. можно считать, что $f_2\in H(\mathbf{C}\setminus K_1)$.

При этом возможные нули функции f_2, очевидно, расположены в кольце $K(z_1, \rho_1 \tau_1)$.

Аналогичным рассуждением показываем, что функция f_1 допускает аналитическое продолжение из круга $K(z_1, \tau_2)$ в область D_1, т. е. $f_1 \in H(D_1)$.

Поскольку все три функции f, f_1, f_2 голоморфны в области D, то из внутренней теоремы единственности следует, что представление (2) верно во всей области D. Лемма доказана.

§ 1. Метрические критерии единственности для областей типа L, основанные на положительности гармонической меры

Следующая теорема в существенном совпадает с признаком единственности А. А. Гончара, сформулированном им в работе [2] без доказательства.

Теорема 1.1. *Пусть $D = D(\{z_j, \rho_j\}_1^\infty)$ — область типа L. Если*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-|z_j|}{\log \frac{1-|z_j|^2}{\rho_j}} < \infty, \tag{1.1}$$

то область D обладает свойством H-единственности.

Доказательство. Ввиду лемы 1, не ограничивая общности, можно считать, что удовлетворяются условия

$$|z_j| \geqslant \frac{1}{2}, \ j = 1, 2, \cdots \tag{1.2}$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-|z_j|}{\log \frac{1-|z_j|^2}{\rho_j}} \leqslant \theta < \frac{1}{4}. \tag{1.3}$$

Пусть функция $f \in H(D)$ удовлетворяет условию (*).

Поскольку из условия (*) и из компактности Γ_0 следует, что f ограничена в некоторой окрестности Γ_0, то отсюда вытекает, что функция f будет ограниченной в некоторой области D' типа L, являющейся подобластью D и отличающейся от D только конечным числом исключительных кружков. Следовательно, из леммы 1 имеем, что D и D' одновременно обладают свойством H_B-единственности, поэтому без ограничения общности можно считать, что $f \in H_B(D)$.

Итак, пусть функция $f \in H_B(D)$ удовлетворяет условию (*), докажем, что $f \equiv 0$. Для этой цели воспользуемся теоремой о двух константах, вернее, следующим следствием из этой теоремы.

Пусть $D \subset \mathbf{C}$ — область, $E \subset \partial D$ — замкнутое множество такое, что $\omega(z, E, D) > 0$, для $z \in D$. Тогда если функция $f \in H_B(D)$ удовлетворяет условию (*), то $f \equiv 0$.

Так как $0 \in D$ (ввиду (1.2)) и положительность гармонической меры не зависит от выбора точки z, то нам будет достаточно показать, что из условия (1.3) следует, что

$$\omega(0, \Gamma_0, D) > 0.$$

Полагая $G_j = K_0 \setminus \overline{K}_j$, $\omega_j(z) = \omega(z, \Gamma_j, G_j)$, при $j=1, 2, \cdots$, рассмотрим функцию $v(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(z)$.

Функция v либо тождественно равна бесконечности, либо гармонична в D (по теореме Гарнака). Во втором случае, очевидно выполняются соотношения

$$\varliminf_{z \to \zeta} v(z) \geqslant 1 \quad \text{для} \quad \zeta \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j, \tag{1.4}$$

$$\varliminf_{z \to \zeta} v(z) \geqslant 0 \quad \text{для} \quad \zeta \in \Gamma_0. \tag{1.5}$$

Если теперь сопоставим функции $\omega\left(z, \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j, D\right)$ и $v(z)$, то учитывая, что первая из них является обобщенным решением задачи Дирихле [5] с предельными значениями 0 на Γ_0 и 1 на $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j$, из (1.4) и (1.5) получаем, что $\omega\left(z, \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j, D\right) \leqslant v(z)$ для $z \in D$, т. е. $\omega(z, \Gamma_0, D) \geqslant 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(z)$ для $z \in D$. В частности, в точке $z=0$ имеем

$$\omega(0, \Gamma_0, D) \geqslant 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(0).$$

Из полученной формулы, ввиду (1.3) заключаем, что теорема будет доказана, если покажем, что имеет место соотношение

$$\omega_j(0) \leqslant 4 \frac{1-|z_j|}{\log \frac{1-|z_j|^2}{\rho_j}}. \tag{1.6}$$

Рассмотрим два случая.

а) Пусть сначала

$$\rho_j \leqslant \frac{1-|z_j|}{2}. \tag{1.7}$$

Область G_j конформно отобразим при помощи функции $w = \frac{z - z_j}{1 - z\bar{z}_j}$ на область G_j', которая представляет единичный круг, с удаленным кружочком, содержащим внутри точку 0. При этом гармоническая мера останется инвариантной.

Далее рассмотрим кольцо $K(0, \rho_j', 1)$, где

$$\rho_j' = \max_{z \in \Gamma_j} \left| \frac{z - z_j}{1 - z\bar{z}_j} \right| = \frac{\rho_j}{1 - |z_j|^2 - |z_j|\rho_j}.$$

Применяя принцип Карлемана расширения области [4] и известную формулу гармонической меры меньшей окружности относительно кольца, получаем

$$\omega_j(z) \leqslant \omega(w, \Gamma(0, \rho_j^*), K(0, \rho_j^*, 1)) = \frac{\log \frac{1}{|w|}}{\log \frac{1}{\rho_j}}.$$

В частности, в точке $z = 0$, с учетом (1.2) имеем

$$\omega_j(0) \leqslant \frac{\log \frac{1}{|z_j|}}{\log \frac{1 - |z_j|^2 - |z_j| \rho_j}{\rho_j}} \leqslant 2 \frac{1 - |z_j|}{\log \frac{1 - |z_j|^2 - |z_j| \rho_j}{\rho_j}}. \tag{1.8}$$

Из (1.7) следует, что

$$\left(\frac{1 - |z_j|^2 - |z_j| \rho_j}{\rho_j}\right)^2 \geqslant \frac{1 - |z_j|^2}{\rho_j}.$$

Отсюда и из (1.8) получаем (1.6).

б) Пусть теперь

$$\rho_j > \frac{1 - |z_j|}{2}. \tag{1.9}$$

Полагая $G_j^* = K_0 \setminus \overline{K}(z_j, 1 - |z_j|)$, из принципа Карлемана расширения области имеем

$$\omega_j(z) \leqslant \omega(z, \Gamma(z_j, 1 - |z_j|), G_j^*). \tag{1.10}$$

Далее, область G_j^* конформно отобразим при помощи функции

$$w = \frac{z+1}{2(z-1)} \quad \text{на полосу} \quad G_j^{**} = \left\{w; -\frac{|z_j|}{2(1 - |z_j|)} \leqslant \operatorname{Re} w \leqslant 0\right\}.$$

При этом окружность $\Gamma(z_j, 1 - |z_j|)$ переходит в прямую l_j: $\operatorname{Re} w = -\frac{|z_j|}{2(1 - |z_j|)}$. Из (1.10) имеем

$$\omega_j(z) \leqslant \omega(w, l_j, G_j^{**}) = -2 \operatorname{Re} w \, \frac{1 - |z_j|}{|z_j|}.$$

В частности, для $z = 0$ получаем оценку

$$\omega_j(0) \leqslant \frac{1 - |z_j|}{|z_j|}. \tag{1.11}$$

Из (1.11) с учетом (1.9) и (1.2) легко получим (1.6).

Теорема доказана.

Учитывая, что $\log \frac{1 - |z_j|^2}{\rho_j} > c > 0$, из теоремы 1.1 вытекает следующая

Теорема 1.2. *Пусть $D=D(\{z_j, \rho_j\}_1^\infty)$—область типа L, такая, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|z_j|)<\infty. \tag{1.12}$$

Тогда D обладает свойством H-единственности. В частности, если f—мероморфная в K_0 функция, такая, что

$$f(z)\to 0 \quad \text{при} \quad |z|\to 1,\ z\in D,\ \text{то}\ f\equiv 0.$$

Последнее утверждение можно доказать и непосредственно, рассмотрев голоморфную и ограниченную в K_0 функцию

$$F(z)=f(z)\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\bar z_j}{|z_j|}\,\frac{z_j-z}{1-z\bar z_j}.$$

Второе утверждение теоремы 1.2 означает: если $\{z_j\}_1^\infty$ стремится к единичной окружности достаточно быстро, а именно, со скоростью (1.12), то любая мероморфная функция не может стремиться к нулю при $|z|\to 1$,

$z\in D(\{z_j, \rho_j\}_1^\infty)$.

Возникает вопрос, существуют ли последовательности $\{z_j\}_1^\infty$, медленнее стремящиеся к K_0, и нетривиальные мероморфные в K_0 функции, удовлетворяющие условию (*) в $D=D(\{z_j, \rho_j\}_1^\infty)$.

Следующая теорема отвечает на этот вопрос.

Теорема 1.3. *Для любого $\alpha>1$ существует область $D=D(\{z_j, \rho_j\}_1^\infty)$, типа L, такая, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|z_j|)^\alpha<\infty \tag{1.13}$$

и нетривиальная мероморфная в K_0 функция f (с полюсами, лежащими внутри исключительных кружков области D), удовлетворяющая условию $f(z)\to 0$ при $|z|\to 1$, $z\in D$.

Доказательство этой теоремы может быть проведено при помощи схемы А. А. Гончара, примененной им при получении критерия неединственности [2], если фигурирующие там параметры Δ_j, δ_j, ρ_j, $j=1, 2,\cdots$ выбирать следующим образом:

для произвольного фиксированного $\alpha>1$ положим

$$0<\varepsilon<\alpha-1,\quad R_j=1-\frac{1}{e^j},\quad \Delta_j=R_{j+1}-R_j=c\,\frac{e-1}{e^{j+1}},$$

$\delta_j=\dfrac{c\,\theta_j}{e^{j(1+\varepsilon)}}$, $\rho_j<\dfrac{\delta_j}{2}$, где c и θ_j определяются из условий $\theta_j\to 1-0$,

при $j\to\infty$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\Delta_j=1-R_0$ и $\dfrac{2\pi R_j}{\delta_j}$ — целое число.

§ 2. Метрические критерии единственности для областей типа L в случае, когда Γ_0—гармоническое нульмножество

В этом параграфе будем рассматривать частный класс областей типа L.

Пусть заданы последовательности $\frac{1}{2}<R_1<R_2<\cdots<R_j<\cdots<1$, $R_j\to 1$ при $j\to\infty$, $n_1, n_2,\cdots n_j,\cdots$, где n_j $(j=1,2,\cdots)$—натуральные числа, $\rho_1>\rho_2>\cdots>\rho_j>0$, $\rho_j<\min\left(\frac{R_j}{n_j}, \frac{R_{j+1}-R_j}{2}\right)$.

Пусть каждая из окружностей $\Gamma(0, R_j)$, $j=1, 2,\cdots$ разбита на n_j равных частей и $\zeta_{j,p}$ $(p=1, 2,\cdots, n_j)$—суть точки деления. Обозначим $K_{j,p}=K(\zeta_{j,p}, \rho_j)$, $\Gamma_{j,p}=\Gamma(\zeta_{j,p}, \rho_j)$ и

$$D(\{R_j, n_j, \rho_j\}_1^\infty)=K_0\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{p=1}^{n_j}\overline{K}_{j,p}.$$

Очевидно, область $D(\{R_j, n_j, \rho_j\}_1^\infty)$ является областью типа L.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 2.1. (*достаточное условие H-единственности*). *Пусть $D=D(\{R_j, n_j, \rho_j\}_1^\infty)$—область типа L, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{R_{j-1}}{R_j}\right)^{n_j}<\infty, \tag{2.1}$$

$$10\, R_j^{n_j\varepsilon_j}<n_j\rho_j=\left(R_j\prod_{k=1}^{j-1}R_k^{n_k}\right)^{A_j}\leqslant\left(\frac{1-R_j}{2}\right)^2, \tag{2.2}$$

где $A_j>1$ и $\varepsilon_j>0$, $j=1, 2,\cdots$, $A_j\uparrow\infty$, $\varepsilon_j\downarrow 0$ при $j\to\infty$. Тогда область D обладает свойством H-единственности.

Отметим, что метрические ограничения, фигурирующие в теореме 2.1, гарантируют выполнение условия $\omega(z, \Gamma_0, D)=0$ (см. лемму 3).

Сначала докажем лемму 2, где рассматриваются конечносвязанные области следующего вида.

Пусть $1/2<R<1$ и n—натуральное число. Окружность $\Gamma(0, R)$ разобьем на n равных частей. Точки деления обозначим через ζ_p, $p=1, 2,\cdots, n$.

Пусть $0<\rho<\frac{R}{n}$, $K_p=K(\zeta_p, \rho)$ и $\Gamma_p=\Gamma(\zeta_p, \rho)$. Рассмотрим область $G=G(R, n, \rho)=K_0\setminus\bigcup_{p=1}^{n}\overline{K}_p$.

Лемма 2. *Пусть $\varepsilon>0$ и $G=G(R, n, \rho)$.*

Если

$$10\, R^{n\varepsilon}\leqslant n\rho\leqslant R, \tag{2.3}$$

то $\omega(0, \Gamma_0, G)<\varepsilon$.

Доказательство. Не ограничивая общности, предположим, что $\zeta_1=R$.

Рассмотрим функцию $u(z)=\log\left|\frac{1-R^n z^n}{z^n-R^n}\right|$, гармоническую в G и удовлетворяющую условию

$$u(z)=0,\ z\in\Gamma_0. \tag{2.4}$$

Если $u\leqslant\Delta$ на $\bigcup_{p=1}^{n}\Gamma_p$, то функция $v=\frac{u}{\Delta}$ будет минорантой для $\omega\left(z,\ \bigcup_{p=1}^{n}\Gamma_p,\ G\right)$. Таким образом, наша ближайшая задача — оценить функцию u сверху на $\bigcup_{p=1}^{n}\Gamma_p$.

Ввиду симметричности функции u относительно окружностей Γ_p, $p=1,2,\cdots,n$, достаточно оценить $u(z)$ на Γ_1, на остальных окружностях Γ_p, $p=2,3,\cdots,n$ будет такая же оценка.

Оценим сначала величину $|z^n-R^n|$ для $z\in\Gamma_1$. Полагая $z=R+w$ имеем, что $|w|=\rho$ и с учетом формулы бинома Ньютона получим:

$$|z^n-R^n|=\left|\sum_{k=1}^{n}C_n^k\,w^kR^{n-k}\right|\geqslant n\rho\,R^{n-1}-\sum_{k=2}^{n}C_n^k\,\rho^k\,R^{n-k}.$$

Отсюда с учетом условия $n\rho\leqslant R$ имеем:

$$|z^n-R^n|\geqslant\left(1-\sum_{k=2}^{n}C_n^k\,n^{-k}\right)n\rho\,R^{n-1}>\left[3-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]n\rho\,R^{n-1}>$$
$$\geqslant(3-e)\,n\rho\,R^{n-1}\geqslant0{,}2\,n\rho\,R^n.$$

Так как $|1-R^n z^n|\leqslant2$ при $|z|\leqslant1$, то окончательно имеем

$$u(z)\leqslant\log\frac{10}{n\rho R^n}\quad\text{для}\quad z\in\bigcup_{p=1}^{n}\Gamma_p. \tag{2.5}$$

Полагая $v(z)=u(z)/\log\frac{10}{n\rho\,R^n}$ с учетом (2.4) и (2.5) получим, что $\omega\left(z,\ \bigcup_{p=1}^{n}\Gamma_p,\ G\right)\geqslant v(z)$ для $z\in G$, откуда

$$\omega(0,\ \Gamma_0,\ G)\leqslant1-v(0)<\log\frac{10}{n\rho}\Big/\log\frac{1}{R^n}<\varepsilon.$$

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Отметим, что условие (2.3) равносильно двум условиям

$$n>\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\log(10R^{-1})}{\log R^{-1}}\quad\text{и}\quad\frac{10R^{n\varepsilon}}{n}<\rho<\frac{R}{n}, \tag{2.6}$$

которые прозрачнее показывают как выбрать n и ρ, при заданных R и ε, чтобы обеспечить условие $\omega(0,\Gamma_0,G)<\varepsilon$.

При помощи доказанной леммы 2 легко установить следующую лемму.

Л е м м а 3. *Пусть $D=D(\{R_j,\ n_j,\ \rho_j\}_1^\infty)$—область типа L. Если R_j, n_j, ρ_j удовлетворяют условию*

$$10\, R_j^{n_j \varepsilon_j} \leqslant n_j \rho_j \leqslant R_j, \quad j=1, 2, \cdots, \tag{2.7}$$

где $\varepsilon_j > 0$, $j=1, 2, \cdots$. *и* $\varepsilon_j \downarrow 0$ *при* $j \to \infty$

$$\omega(0, \Gamma_0, D)=0. \tag{2.8}$$

Доказательство. Полагая $G_j = G(R_j, n_j, \rho_j)$, с учетом леммы 2, для любого $j=1, 2, \cdots$ имеем оценку

$$\omega(0, \Gamma_0, D) \leqslant \omega(0, \Gamma_0, G_j) < \varepsilon_j,$$

откуда ввиду условия $\varepsilon_j \downarrow 0$ при $j \to \infty$ получим (2.8).

Теперь приступим к доказательству теоремы 2.1. Пусть функция $f \in H(D)$ удовлетворяет условию (*), надо доказать, что $f \equiv 0$. Достаточно показать, что $f(0) = 0$. Как было замечено при доказательстве теоремы 1.1, без ограничения общности можно считать, что $f \in H_B(D)$, т. е. положить $|f(z)| \leqslant 1$, $z \in D$.

Заметим, что из теоремы Фату и из факта возможности факторизации (в доказательстве леммы 1) следует, что функция f почти везде на $\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{p=1}^{n_j} \Gamma_{j,p}$ имеет угловые предельные значения, которые обозначим через $f(\zeta)$, $\zeta \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{p=1}^{n_j} \Gamma_{j,p}$, и убедимся, что функция имеет следующее интегральное представление:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{n_j} \int_{\Gamma_{j,p}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in D. \tag{2.9}$$

Действительно, пусть z—произвольная фиксированная точка области D. Выберем последовательность конечносвязанных, содержащих точку z областей G_k, таких что $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset D$, G_k аппроксимируют D, при $k \to \infty$ и $\partial G_k = \bigcup_{(k)} \Gamma_{j,p} \cup l_k$, где $l_k \subset D\ (k=1, 2, \cdots)$ — концентрические окружности с центром в точке $z=0$, которые стремятся к Γ_0 при $k \to \infty$.

Представляя функцию f в области G_k (в частности в точке z) интегралом Коши и переходя к пределу, при $k \to \infty$, получаем (2.9), поскольку в этом представлении интеграл по l_k стремится к нулю при $k \to \infty$ (последнее легко получить, учитывая, что из условия (*) имеем $\max_{\zeta \in l_k} |f(\zeta)| \to 0$, при $k \to \infty$ и дл. l_k ограничены).

В силу произвольности выбора точки z заключаем, что представление (2.9) справедливо во всей области D.

Обозначим теперь

$$f_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{m} \sum_{p=1}^{n_j} \int_{\Gamma_{j,p}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in D, \tag{2.10}$$

$$\varphi_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{p=1}^{n_j} \int_{\Gamma_{j,p}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in D. \tag{2.11}$$

Имеем

$$f(z)=f_m(z)+\varphi_m(z),\quad z\in D. \tag{2.12}$$

Доопределив функцию f на Γ_0: $f(z)=0$, $z\in\Gamma_0$, с учетом (2.12) получаем

$$|f_m(z)|=|\varphi_m(z)|,\quad z\in\Gamma_0. \tag{2.13}$$

Оценим $|\varphi_m(z)|$ на Γ_0. Имеем

$$|\varphi_m(z)|\leqslant\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{n_j\rho_j}{1-R_j-\rho_j}\leqslant 2\sum_{j=m+1}^{\infty}(n_j\rho_j)^{1/2}, \tag{2.14}$$

поскольку, согласно (2.2) имеем, что

$$1-R_j-\rho_j>\frac{1-R_j}{2}>(n_j\rho_j)^{1/2}.$$

Чтобы оценить последний ряд, сопоставим два последующих члена ряда. Сначала заметим, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}R_j^{n_j}<\infty, \tag{2.15}$$

так как ввиду (2.2) имеем

$$10\,R_j^{n_j}\leqslant 10R_j^{n_j A_j}\leqslant\left(R_j\prod_{k=1}^{j-1}R_k^{n_k}\right)^{A_j}\leqslant R_{j-1}^{n_{j-1}},\qquad \text{следовательно}$$

$$R_j^{n_j}\leqslant\frac{1}{10}R_{j-1}^{n_{j-1}}\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{1}{10}\right)^{j-1}R_1^{n_1}.$$

Имеем

$$n_{j+1}\rho_{j+1}=\left(R_{j+1}\prod_{k=1}^{j}R_k^{n_k}\right)^{A_{j+1}}\leqslant R_j^{n_j-1}\left(R_j\prod_{k=1}^{j-1}R_k^{n_k}\right)^{A_j}=R_j^{n_j-1}\cdot n_j\rho_j\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\,n_j\rho_j, \tag{2.16}$$

поскольку из (2.15) и леммы 1 вытекает, что без ограничения общности можно считать $R_j^{n_j}<\frac{1}{8}$, $j=1,2,\cdots$, следовательно $R_j^{n_j-1}<\frac{1}{4}$, $j=1,2,\cdots$

Из (2.14) ввиду (2.16) имеем

$$|\varphi_m(z)|\leqslant(n_{m+1}\rho_{m+1})^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\leqslant 2\left(\prod_{k=1}^{m}R_k^{n_k}\right)^{\frac{A_{m+1}}{2}},\quad z\in\Gamma_0,$$

следовательно, учитывая (2.13) имеем

$$|f_m(z)|\leqslant 2\left(\prod_{k=1}^{m}R_k^{n_k}\right)^{\frac{A_{m+1}}{2}},\ z\in\Gamma_0. \tag{2.17}$$

Так как $f_m\in H_B(D_1^m)$, где $D_1^m=D(\{R_j,\,n_j,\,\rho_j\}_1^m)$, (можно положить $|f_m(z)|<1$, $z\in D_1^m$), то учитывая (2.17) и применяя теорему о двух константах, получаем

$$\log|f_m(0)|\leqslant\omega(0,\Gamma_0,D_1^m)\left(\log 2+\frac{A_{m+1}}{2}\log\prod_{k=1}^{m}R_k^{n_k}\right). \qquad (2.18)$$

Для оценки $\omega(0,\Gamma_0,D_1^m)$ снизу рассмотрим гармоническую в D_1^m функцию

$$u(z)=\log\prod_{k=1}^{m}\left|\frac{1-z^{n_k}R_k^{n_k}}{z^{n_k}-R_k^{n_k}}\right|.$$

Очевидно имеем

$$u(z)=0,\ z\in\Gamma_0. \qquad (2.19)$$

Оценим функцию u на $\bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{p=1}^{n_j}\Gamma_{j,p}$. Сначала оценим ее на одной-окружности $\Gamma_{j,p}$. Ввиду симметричности функции u относительно окружностей $\Gamma_{j,p}$, $p=1,2,\cdots,n_j$, достаточно оценить $u(z)$ на $\Gamma_{j,1}$. Из (2.15) вытекает, что произведение $\prod_{k=1}^{\infty}|1-z^{n_k}R_k^{n_k}|$ равномерно сходится при $|z|\leqslant 1$, следовательно, в силу леммы 1, без ограничения общности можно считать, что

$$\prod_{k=j}^{m}|1-z^{n_k}R_k^{n_k}|>\frac{1}{2},\ z\in\Gamma_{j,1}. \qquad (2.20)$$

Теперь оценим произведение $\prod_{k=j}^{m}|z^{n_k}-R_k^{n_k}|$ на $\Gamma_{j,1}$.

Для первого множителя получаем

$$|z^{n_j}-R_j^{n_j}|\leqslant|z-R_j|(|z|^{n_j-1}+R_j|z|^{n_j-2}+\cdots+R_j^{n_j-1})\leqslant n_j\rho_j(R_j+\rho_j)^{n_j-1}\leqslant$$
$$\leqslant n_j\rho_jR_j^{n_j-1}\left(1+\frac{1}{n_j}\right)^{n_j}\leqslant 3\prod_{k=1}^{j}R_k^{n_k}\left(\prod_{k=1}^{j-1}R_k^{n_k}\right)^{A_j-1}.$$

Так как $A_j\uparrow\infty$ при $j\to\infty$, то в силу (2.15), без ограничения общности, можно считать, что $\left(\prod_{k=1}^{j-1}R_k^{n_k}\right)^{A_j-1}\leqslant\frac{1}{48}$, следовательно имеем

$$|z^{n_j}-R_j^{n_j}|\leqslant\frac{1}{16}\prod_{k=1}^{j}R_k^{n_k},\quad z\in\Gamma_{j,1}. \qquad (2.21)$$

Далее

$$|z^{n_{j+1}}-R_{j+1}^{n_{j+1}}|\leqslant(R_j+\rho_j)^{n_{j+1}}+R_{j+1}^{n_{j+1}}\leqslant 2R_{j+1}^{n_{j+1}},\quad z\in\Gamma_{j,1}. \qquad (2.22)$$

И наконец, для множителей $|z^{n_k}-R_k^{n_k}|$, $j+2\leqslant k\leqslant m$, имеем

$$|z^{n_k}-R_k^{n_k}|\leqslant(R_j+\rho_j)^{n_k}+R_k^{n_k}\leqslant R_k^{n_k}\left(1+\left(\frac{R_{k-1}}{R_k}\right)^{n_k}\right),\ z\in\Gamma_{j,1}. \qquad (2.23)$$

Поскольку из (2.1) следует сходимость произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{R_{k-1}}{R_k}\right)^{n_k}\right),$$

то без ограничения общности можно считать, что

$$\prod_{k=j+2}^{m}\left(1+\left(\frac{R_{k-1}}{R_k}\right)^{n_k}\right)<2. \tag{2.24}$$

Учитывая все оценки (2.20)—(2.24) и очевидное неравенство

$$\prod_{k=1}^{j-1}\left|\frac{z^{n_k}-R_k^{n_k}}{1-z^{n_k}R_k^{n_k}}\right|\leqslant 1,$$

для точек $z\in\Gamma_{j,1}$ получаем

$$u(z)\geqslant\log\frac{2}{\prod\limits_{k=1}^{m}R_k^{n_k}}. \tag{2.25}$$

Итак оценка (2.25) справедлива на $\bigcup\limits_{p=1}^{n_j}\Gamma_{j,p}$, и поскольку она не зависит от выбора j, то можно утверждать, что (2.25) справедлива для всех точек $z\in\bigcup\limits_{j=1}^{m}\bigcup\limits_{p=1}^{n_j}\Gamma_{j,p}$.

Теперь рассмотрим гармоническую в D_1^m функцию

$$v(z)=\log\prod_{k=1}^{m}\left|\frac{1-z^{n_k}R_k^{n_k}}{z^{n_k}-R_k^{n_k}}\right|\Big/\log\frac{2}{\prod\limits_{k=1}^{m}R_k^{n_k}}.$$

Отсюда, на основании (2.19) и (2.25) имеем

$$v(z)=0 \text{ для } z\in\Gamma_0 \text{ и } v(z)\geqslant 1 \text{ для } z\in\bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{p=1}^{n_j}\Gamma_{j,p}.$$

Следовательно получаем оценку

$$\omega\left(z,\bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{p=1}^{n_j}\Gamma_{j,p},D_1^m\right)\leqslant v(z),\quad z\in D_1^m,$$

и равносильную ей другую оценку

$$\omega(z,\Gamma_0,D_1^m)\geqslant 1-v(z),\quad z\in D_1^m.$$

В частности, в точке $z=0$ имеем

$$\omega(0,\Gamma_0,D_1^m)\geqslant\log 2\Big/\log\frac{2}{\prod\limits_{k=1}^{m}R_k^{n_k}}.$$

Подставляя эту оценку в (2.18), получаем

$$\log|f_m(0)|\leqslant\left(\log^2 2+\frac{A_{m+1}}{2}\log 2\log\prod_{k=1}^{m}R_k^{n_k}\right)\Big/\log\frac{2}{\prod\limits_{k=1}^{m}R_k^{n_k}}.$$

Переходя к пределу в этом соотношении при $m\to\infty$, ввиду того, что $f_m(0)$ стремится к $f(0)$, а $A_m\uparrow\infty$, получаем $\log|f(0)|=-\infty$, следовательно $f(0)=0$.

Теорема доказана.

Приведем пример области типа L, удовлетворяющей условиям теоремы 2.1, следовательно являющейся областью H-единственности.

Параметры, фигурирующие в теореме 2.1 выберем следующим образом:

$$R_j = e^{-(1/j)}, \; n_j = j^2 e^{j^2}, \; A_j = \sqrt{j}, \quad \varepsilon_j = \frac{1}{\sqrt{j}} \quad \text{и}$$

$$\rho_j = \frac{1}{n_j}\left(R_j \prod_{k=1}^{j-1} R_k^{n_k} \right)^{A_j}.$$

Легко убедиться, что при таком выборе параметров удовлетворяются условия (2.1) и (2.2), следовательно, соответствующая этим параметрам область $D = D(\{R_j, n_j, \rho_j\}_1^\infty)$ обладает свойством H-единственности. Однако этот факт нельзя усмотреть из теоремы 1.1, так как не выполняется условие (1.1).

В заключение приношу глубокую благодарность Н. У. Аракеляну и А. А. Гончару за ценные советы и обсуждения.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 11. VII. 1984

Հ. Գ. ԲԱԼԱԿՅԱՆ Հոլոմորֆ ֆունկցիաների միակության մետրիկական պայմաններ L տիպի անվերջ-կապանի տիրույթներում (*ամփոփում*)

Այս աշխատանքի հիմնական արդյունքը պարագրաֆ 2-ում շարադրված 2.1 թեորեմն է, որտեղ ստացված են L *տիպի* D *տիրույթի միակության հատկության բավարար պայմաններ, երբ միավոր շրջանագծի հարմոնիկ չափը* D-*ի նկատմամբ* 0 *է։ Պարագրաֆ 1-ում բերված են միակության և ոչմիակության բավարար պայմաններ, հիմնվելով՝ միավոր շրջանագծի՝* D-*ի նկատմամբ հարմոնիկ չափի դրական լինելու վրա։*

H. G. BALAKIAN. *The metric criterions of uniqueness of holomorphic functions in infinitely connected regions of L type* (summary)

The main result of this paper is the theorem 2.1, where we obtain sufficient conditions of characteristic uniqueness in domain D of L type, in case the harmonic measure of unique circumference, against D is zero. In § 1 we give sufficient conditions of characteristic uniqueness and non-uniqueness, basing upon positiveness of harmonic measure of circumference against D.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М. Л. 1950.
2. *А. А. Гончар.* О примерах неединственности аналитических функций, Вестник МГУ, «Математика, механика», 1964, № 1, 37—44.
3. *N. U. Arakelian and P. M. Gauthier.* On tangential approximation by holomorphic functions, Известия АН Арм. ССР, „Математика", XVII, № 6, 1982.
4. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.
5. *М. Брело.* Основы классической теории потенциала, М., 1964.