ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 4, 1983 Математика

УДК 517.986

Д. И. ГУРЕВИЧ

ОПЕРАТОРЫ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА НА ГРУППАХ ЛИ

Понятие операторов обобщенного сдвига (сокращенно о. о. с.) явилось результатом аксиоматизации свойств оператора обычного сдвига на группе. Обязано это понятие своим происхождением Ж. Дельсарту [1], которому принадлежат и первые результаты по теории о. о. с. Дальнейшее существенное развитие эта теория получила в работах Б. М. Левитана (см., например, [2]—[5]). Уже в этих работах наметилось два естественных подхода к построению теории о.о.с.: глобальный и инфинитезимальный. С точки зрения первого подхода содержательной является задача обобщения на случай о. о. с. глобальных конструкций, заимствованных из теории групп (теория представлений, существование мер Хаара, гармонический анализ и др.). Некоторые аспекты теории представлений о. о. с. в топологических локально выпуклых пространствах рассматривались в работе Г. Л. Литвинова [6]. Обзор части результатов глобальной проблематики теории о. о. с. (фигурирующих в исследованиях зарубежных математиков под названием гипергрупп) содержится в статье К. Росса [7].

Центральное место в теории о. о. с. с инфинитезимальной точки зрения занимает проблема построения о. о. с. по его инфинитезимальному оператору в случае одного переменного или по множеству его инфинитезимальных операторов первого или более высокого порядка в случае нескольких переменных. Эта задача в одномерном случае рассматривалась, в частности, в статьях [8], [9]. В случае многих переменных полностью решена задача восстановления о. о. с. по инфинитезимальным операторам второго порядка в ситуации, когда последние операторы образуют алгебру Ли. Локальное решение этой задачи дано Б. М. Левитаном, глобальное построение осуществлено в работе [10].

В настоящей статье мы предлагаем глобальную конструкцию нового класса о. о. с., называемых нами операторами типа Дельсарта и действующих в пространствах функций на группах Ли. Следует отметить, что формальные аналогии некоторых частных случаев операторов типа Дельсарта рассматривались в работах В. П. Маслова и его учеников (см. [11]). В § 4 мы изучаем структуру коммутационных соотношений между инфинитезимальными операторами (генераторами) операторов типа Дельсарта. Оказывается, что для первых генераторов эти соотношения имеют вид $p(X, X) = l(X)$, где $p(X, X)$ — билинейная, а $l(X)$ — линейная комбинации от данных генераторов. Примером может служить оператор типа Дельсарта, действующий на группе SU (2, C), первые генераторы которого удовлетворяют соотношениям

$$X^2 - Y^2 = Z,\ YZ + ZY = -X,\ ZX + XZ = Y.$$

В последнем параграфе мы реализуем попытку аксиоматического описания алгебраического объекта, соответствующего оператору Дельсарта и порожденного его первыми генераторами.

Автор благодарит И. Л. Кантора, Г. Л. Литвинова и Г. Б. Шпиза за полезные обсуждения.

§ 1. Предварительные сведения. Определения

Пусть Ω — произвольное n-мерное гладкое действительное многообразие. Обозначим через $C^\infty(\Omega)$ пространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на Ω, наделенное стандартной локально выпуклой топологией равномерной сходимости на компактах функций вместе со всеми производными. Говорят, что в пространстве $C^\infty(\Omega)$ действует оператор обобщенного сдвига (сокращенно о. о. с.), если каждому $s \in \Omega$ сопоставлен линейный оператор R^s, действующий в $C^\infty(\Omega)$, такой, что выполнены условия: 1) соответствие $f(t) \to \varphi(s, t) = R^s f(t)$ определяет непрерывное отображение $C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega \times \Omega)$; 2) выделен такой элемент $s_0 \in \Omega$, называемый нейтральным, что оператор R^{s_0} тождественный; 3) $R_s^r R^s f(t) = R_t^s R^r f(t)$ для всех $f \in C^\infty(\Omega)$, t, s, $r \in \Omega$ (индекс внизу указывает на переменную, по которой действует соответствующий оператор).

Если имеется два о. о. с. ${}_1R^s$ и ${}_2R^s$, действующие в пространствах $C^\infty(\Omega_1)$ и $C^\infty(\Omega_2)$ соответственно, то морфизмом о. о. с. ${}_1R^s$ в о. о. с. ${}_2R^s$ назовем непрерывный оператор F: $C^\infty(\Omega_1) \to C^\infty(\Omega_2)$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(\Omega_1) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "{}_1R^s"] & C^\infty(\Omega_2) \arrow[d, "{}_2R^s"] \\
C^\infty(\Omega_1 \times \Omega_1) \arrow[r, "F \hat{\times} F"] & C^\infty(\Omega_2 \times \Omega_2)
\end{tikzcd}$$

коммутативна и $Ff({}_2s_0) = f({}_1s_0)$, где ${}_1s_0 \in \Omega_1$ и ${}_2s_0 \in \Omega_2$ — соответствующие нейтральные элементы. Морфизм F назовем изоморфизмом, если F — изоморфизм $C^\infty(\Omega_1)$ и $C^\infty(\Omega_2)$ в категории локально выпуклых пространств.

Мы будем рассматривать также n-мерные комплексно-аналитические многообразия Ω, снабженные пространствами $H(\Omega)$ голоморфных функций с локально выпуклой топологией покомпактной сходимости. В пространствах $H(\Omega)$ аналогичным образом могут быть определены понятия о. о. с. и морфизма (изоморфизма) двух о. о. с. Пространства, сопряженные к пространствам $C^\infty(\Omega)(H(\Omega))$ мы будем обозначать через $D(\Omega)(A(\Omega))$.

Мы будем придерживаться следующих обозначений: ($\alpha = \alpha_1, \cdots, \alpha_n$) — мультииндекс, а $D_s^\alpha = D_{s_1}^{\alpha_1} \cdots D_{s_n}^{\alpha_n}$, где D_{s_i} — производная по i-той переменной в локальной системе координат многообразия Ω. Правым инфинитезимальным оператором (генератором) порядка $|\alpha| =$

$=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ от о. о. с. R^s, действующего на Ω, называется оператор $R_\alpha f(t)=D_s^\alpha R^s f(t)|_{s_0}$.

Известно (см. [5], это можно также непосредственно вывести из определения о. о. с.), что все генераторы R_α данного о.о.с. в следующем смысле перестановочны с действием оператора R^s: $R_{\alpha,s} R^s f(t) = R^s R_{\alpha,t} f(t)$. Отсюда сразу вытекает

Предложение 1.1. 1) *Если* $R_\alpha|_{s_0} = \sum\limits_\beta a_\beta D^\beta|_{s_0}$ (*все суммы в этом предложении конечны*), *то или* $R_\alpha|_{s_0}=D^\alpha|_s$, *или генераторы линейно зависимы*; 2) *если генераторы линейно независимы, то соотношение* $\sum\limits_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} R_\alpha R_\beta = \sum\limits_\gamma c_\gamma R_\gamma$ *эквивалентно своему ограничению в точку* s_0.

Доказательство. В самом деле, если генераторы оператора R^s удовлетворяют первому соотношению, то

$$R_\alpha = R^s R_\alpha|_{s_0} = R_{\alpha,s} R^s|_{s_0} = \sum_\beta a_\beta D_s^\beta R^s|_{s_0} = \sum_\beta a_\beta R_\beta,$$

что доказывает первое утверждение. Второе утверждение аналогичным образом выводится из первого.

Рассмотрим n-мерную действительную (комплексную) группу Ли G с алгеброй Ли g. Группу G мы на протяжении всей статьи будем предполагать связной и односвязной, не оговаривая этого каждый раз. При указанном условии полугруппа эндоморфизмов End G группы G изоморфна полугруппе эндоморфизмов End g алгебры g и является алгебраическим подмногообразием полугруппы End R^n (End C^n). Мы будем рассматривать такие и только такие полугруппы Γ эндоморфизмов группы G, которые являются замкнутыми гладкими аналитическими подмногообразиями многообразия End G.

Пусть фиксированы группа Ли G и полугруппа Γ ее эндоморфизмов. Скажем, что о. о. с. R^s, действующий в пространстве $C^\infty(G)(H(G))$, является оператором типа Дельсарта, если нейтральный элемент s_0 совпадает с единицей e группы G и если оператор R^s определен в соответствии с формулой

$$R^s f(t) = \langle f(tA\cdot sB), \mu_{A,B}\rangle, \quad \mu\in D(\Gamma\times\Gamma)(A(\Gamma\times\Gamma)). \tag{1.1}$$

Под tA мы понимаем результат действия эндоморфизма $A\in\Gamma$ на точку $t\in G$, а скобка $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает операцию спаривания элементов двух сопряженных пространств.

Примеры. 1. Оператор группового сдвига $R^s f(t)=f(t\cdot s)$ является очевидным образом оператором типа Дельсарта. В этом случае функционал $\mu_{A,B}$ просто совпадает с δ-функцией, сосредоточенной в единице полугруппы $\Gamma\times\Gamma$ при любой полугруппе эндоморфизмов Γ группы G.

2. Оператор Дельсарта определяется (см. [5]) так: $R^s f(t) = \langle f(t\cdot sB), \mu_B\rangle$, где $f\in C^\infty(G)(H(G))$, Γ — компактная группа автоморфизмов группы G, а μ_B — мера Хаара на Γ, нормированная условием равенства единице меры всей Γ. Понятие оператора типа Дельсарта является естественным обобщением последней конструкции.

В категории всех операторов типа Дельсарта, действующих на фиксированной группе Ли G по форме (1.1), мы определим морфизмы как такие морфизмы в категории всех о.о.с. на G, которые имеют вид $Ff(t) = \langle f(tA), \nu_A \rangle$, где $\nu_A \in D(\Gamma)(A(\Gamma))$.

На произвольной фиксированной полугруппе Γ рассмотрим линейное (топологическое локально выпуклое) пространство функций Φ. Мы будем говорить, что в пространстве Φ (или просто на полугруппе Γ) задана алгебраическая структура, если в Φ определено ассоциативное (а в топологическом случае и непрерывное по совокупности аргументов) умножение $\Phi \ni f, g \to f \circ g \in \Phi$, инвариантное относительно правого сдвига на полугруппе Γ и если, кроме того, функция, равная тождественной единице на Γ, является правой единицей при этом умножении: $f \circ 1 = f$. Категорию подобных алгебраических структур мы будем обозначать через $\mathbf{A}(\Phi)$. В качестве морфизмов в этой категории мы будем рассматривать такие морфизмы в категории (топологических) алгебр с правой единицей, которые перестановочны с действием правого сдвига на полугруппе Γ.

§ 2. Основная теорема

Пусть имеется действительная (комплексная) группа Ли G и полугруппа Γ ее эндоморфизмов, и пусть в пространстве $\Phi = C^\infty(\Gamma)(H(\Gamma))$ фиксирована алгебраическая структура $B \in \mathbf{A}(\Phi)$. Определим на пространстве $\Phi \hat{\times} \Phi$ функционал $\mu_{A,B}$, действующий на произведении элементов $f(A)\, g(B)$, $f, g \in \Phi$ по формуле

$$\langle f(A)\, g(B), \mu_{A,B} \rangle = f \circ g\,(E), \tag{2.1}$$

где E — единица полугруппы Γ. Посредством функционала $\mu_{A,B}$ зададим в соответствии с формулой (1.1) оператор в пространстве $C^\infty(G)(H(G))$.

Теорема основная. 1) *Определенный таким образом оператор есть о.о.с. типа Дельсарта и, следовательно, при фиксированных G и Γ имеется отображение, ставящее в соответствие алгебре $B \in \mathbf{A}(\Phi)$ оператор типа Дельсарта, который мы будем обозначать через ${}_BR^s$.*

2) *Указанное отображение является контравариантным функтором: каждому морфизму (изоморфизму) $B_1 \to B_2$ в категории $\mathbf{A}(\Phi)$ оно ставит в соответствие морфизм (изоморфизм) ${}_{B_1}R^s \leftarrow {}_{B_2}R^s$ в категории операторов типа Дельсарта.*

Доказательство. Посредством функционала $\mu_{A,B}$, определенного выше, закон умножения в алгебре B может быть записан в следующем виде:

$$f \circ g\,(C) = \langle f(AC)\, g(BC), \mu_{A,B} \rangle. \tag{2.2}$$

Тогда условие ассоциативности умножения в алгебре B принимает форму

$$(f\circ(g\circ h))(M)=\langle f(AM)\,g(CBM)\,h(DBM),\ \mu_{C,D}\,\mu_{A,B}\rangle=$$

$$=((f\circ g)\circ h)(M)=\langle f(CAM)\,g(DAM)\,h(BM),\ \mu_{A,B}\,\mu_{C,D}\rangle f,\ g,\ h\in B. \tag{2.3}$$

Ограничив последнее равенство в единицу полугруппы Г, получим, что

$$\langle f(A)\,g(CB)\,h(DB),\ \mu_{C,D}\,\mu_{A,B}\rangle=\langle f(CA)\,g(DA)\ h(B)\,\mu_{A,B}\,\mu_{C,D}\rangle. \tag{2.4}$$

Заметим, что из-за инвариантности умножения в B относительно правого сдвига на полугруппе Г равенство (2.4) эквивалентно (2.3).

Раскрывая содержание аксиомы 3 для о.о.с. применительно к оператору типа Дельсарта ${}_BR^s$, определенному в пространстве $C^\infty(G)$ $(H(G))$, получим, что

$$R_s^r\,R^s f(t)=\langle f(tA\cdot sCB\cdot rDB),\ \mu_{A,B}\,\mu_{C,D}\rangle=$$

$$=R_t^s\,R^r f(t)=\langle tCA\cdot s\,DA\cdot rB),\ \mu_{A,B}\,\mu_{C,D}\rangle. \tag{2.5}$$

Последнее соотношение вытекает из равенства (2.4).

Легко видеть, что аксиома 2 из определения о.о.с. эквивалентна для оператора типа Дельсарта условию на единичную функцию в алгебре B. Тем самым установлено соответствие между алгебрами $B\in$ $\in A(\Phi)$ и операторами типа Дельсарта. Осталось установить соответствие между морфизмами. Пусть имеется морфизм $F\colon B_1\to B_2$ Рассмотрим функционал ν, определенный на пространстве Φ соотношением $\langle f,\nu\rangle=(Ff)(E)$. Тогда, используя перестановочность морфизма F с операцией правого сдвига на Г, действие морфизма F на элементы пространства Φ можно представить в виде $Ff(C)=\langle f(AC),\nu_A\rangle$. Определив морфизм ${}_{B_1}R^s\leftarrow{}_{B_1}R^s$ следующим образом: $\langle f(tA),\nu_A\rangle\leftarrow f$, мы удовлетворим всем требуемым условиям. Теорема доказана.

Отметим, что если функция $f=1$ является двусторонней единицей в алгебре B, то единица e группы B является двусторонним нейтральным элементом: $R^s f(t)|_{t=e}=f(s)$.

Замечание. Все предыдущие конструкции и утверждения естественным образом переносятся на случай локальных и формальных групп Ли и супермногообразий. Кроме того, основная теорема допускает следующее обобщение. Пусть на гладком действительном (комплексном) многообразии Ω задан о.о.с. R^s и имеется полугруппа Г (являющаяся многообразием) его эндоморфизмов. Пусть $\mu_{A,B}$— некоторый функционал на пространстве $\Phi=C^\infty(\Gamma\times\Gamma)(H(\Gamma\times\Gamma))$ такой, что определен оператор

$${}_1R^s f(t)=\langle R^s f(t)A_t\,\widehat{\times}\,B_s,\ \mu_{A,B}\rangle.$$

Тогда, если бинарная операция (2.1) наделяет пространство Φ структурой алгебры $B\in A(\Phi)$, то последний оператор является о.о.с.

§ 3. Примеры

1. Оператору группового сдвига соответствует при любой полугруппе эндоморфизмов Γ алгебра B функций на Γ с обычным поточечным умножением.

2. Оператор Дельсарта, фигурировавший в примере 2 из § 1, получается описанным в теореме способом из алгебры $B \in \mathbf{A}(\Phi)$, $\Phi = C^\infty(\Gamma)(H(\Gamma))$, в которой умножение задается формулой $f \circ g(C) = f(C) \langle g(BC), \mu_B \rangle$, где μ_B — мера Хаара на компактной группе автоморфизмов группы G такая, что $\langle 1, \mu_B \rangle = 1$.

3. Пусть $G = R^1$, $\Gamma = \{E, 0\}$, где E — тождественный, а 0 — нулевой эндоморфизм. Положим $\chi_0(E) = \chi_0(0) = 1$, $\chi_1(E) = -\chi_1(0) = 1$. В двумерном пространстве функций на Γ определим структуру алгебры $B \in \mathbf{A}(\Phi)$ с двусторонней единицей χ_0, положив $\chi_1 \circ \chi_1 = a\chi_0 + b\chi_1$ где $a - b = 1$. При $a = 0$, $b = 1$ соответствующий оператпр типа Дельсарта имеет вид

$$R^s f(t) = \frac{1}{2}\left(f(t+s) + f(t) + f(s) - f(0)\right).$$

4. Пусть теперь Γ — группа: $\Gamma = \{E, A, B, AB = BA\}$, причем $A^2 = B^2 = E$. Пространство Φ функций на Γ в этом случае порождается базисом из характеров $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3$ группы Γ. Здесь у нас $\chi_0 = 1$, $\chi_3 = \chi_1\chi_2$, а характеры χ_1 и χ_2 таковы, что $\chi_1(A) = \chi(B) = -1$. $\chi_1(B) = \chi_2(A) = 1$. Нетрудно описать с точностью до изоморфизма все алгебраические структуры, которые могут быть определены в пространстве Φ. Если в алгебре B отсутствуют делители нуля, то она изоморфна или алгебре B_1 с обычным умножением функций на Γ или алгебре B_2, в которой является двусторонней единицей и имеют место соотношения

$$\chi_1 \circ \chi_1 = \chi_2 \circ \chi_2 = \chi_0, \ \chi_1 \circ \chi_2 = -\chi_2 \circ \chi_1 = \chi_3.$$

Среди алгебраических структур в Φ с делителями нуля укажем в качестве иллюстрации только на две. Умножение по типу примера 2 приводит нас к алгебре B_3 со следующей таблицей умножения: $\chi_i \circ \chi_j = \chi_i \delta_j^0$, где δ_j^0 — символ Кронекера. В алгебре B_4 с двусторонней единицей закон умножения зададим следующим образом: $\chi_1 \circ \chi_1 = \chi_2 \circ \chi_2 = 0$, $k\chi_1 \circ \chi_2 = l\chi_2 \circ \chi_1 = \chi_3$, $kl \neq 0$.

Рассмотрим группу $G = SU(2, R)$. Пусть A и B — два автоморфизма группы G, которые в ее алгебре g с базисом X, Y, Z таким, что $[X, Y] = Z$, $[Y, Z] = X$, $[Z, X] = Y$, индуцируют соответственно автоморфизмы $(X, Y, Z) \to (-X, Y, -Z)$ и $(X, Y, Z) \to (X, -Y, -Z)$. Группа $\Gamma = \{E, A, B, AB\}$ как раз такова, как рассмотренная выше. Опишем, какие операторы типа Дельсарта соответствуют по основной теореме алгебраическим структурам B_2 и B_4 (случай алгебр B_1 и B_3 охвачен примерами 1 и 2):

$${}_{B_2}R^s f(t) = \frac{1}{2}\left(f(t \cdot s) + f(tB \cdot s) + f(t \cdot sA) - f(tB \cdot sA)\right),$$

$$_{B_4}R^s f(t) = ({}_0P_t + {}_0P_s - {}_0P_t\, {}_0P_s + k\, {}_1P_t\, {}_2P_s + l\, {}_2P_t\, {}_1P_s) f(t\cdot s),$$

где ${}_iP_t = \frac{1}{4}\sum_{C\in\Gamma} f(tC)\,\chi_i(C)$. Непосредственным вычислением проверяется, что первые инфинитезимальные операторы этих о.о.с. удовлетворяют соотношениям $XY + YX = -Z$, $YZ + ZY = X$, $ZX + XZ = Y$ в первом случае и $kXY - lYX = klZ$, $YZ = ZY = ZX = XZ = X^2 = Y^2 = Z^2 = 0$—во втором.

5. Пусть фиксирована действительная (комплексная) n-мерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и имеется разбиение пространства этой алгебры в прямую сумму подпространств $V_1, \cdots, V_m$, задающее градуировку алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в том смысле, что для любых i и j существует $k = k(i, j) = k(j, i)$ такое, что $[V_i, V_j] \subseteq v_k$. Выберем в алгебре $\mathfrak{g}$ базис $X_1, \cdots, X_n$, согласованный с заданным разбиением: первые dim V_1 векторов этого базиса принадлежат V_1, следующие dim V_2 векторов принадлежат V_2 и т. д.

Пусть каждому подпространству V_i (и тем самым каждому вектору из него) поставлен в соответствие некоторый автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$. Автоморфизм, отвечающий вектору $X \in \mathfrak{g}$, будем обозначать через M_X (или M_i, если $X = X_i$). Предположим, что для любых i и j существует $l = l(i, j)$ такое, что $V_i M_j^* \subseteq V_l$, где M_j^* — автоморфизм, сопряженный к M_j, и что выполнено условие

$$M_i\, M_{X_j M_i^*} = M_j\, M_{X_i M_j^*} = M_{[X_i, X_j]}.$$

Рассмотрим матричные функции $a_j^i(A)$, $A \in \Gamma$ представления полугруппы $\Gamma = \mathrm{End}\, \mathfrak{g}$ в выбранном базисе: $X_j A = \sum_i X_i\, a_j^i(A)$. Определим умножение в алгебре $B \in \mathrm{A}(\Phi)$, $\Phi = C^\infty(\Gamma)(H(\Gamma))$ между матричной функцией $a_j^i(A)$ и произвольной функцией из Φ на основе следующего соотношения: $a_j^i(A)\, p(A) = a_j^i(A) \circ p(M_i A)$, из которого вытекает равенство

$$a_j^i(A) \circ a_l^k(M_i A) = a_l^k(A) \circ a_j^i(M_k A). \tag{3.1}$$

В соответствии с указанным определением моном любой степени от матричных элементов с обычным умножением можно по индукции представить в виде полинома от тех же образующих с умножением $\circ$ и наоборот. Например,

$$a_j^i(A)\, a_l^k(A)\, a_n^m(A) = a_j^i(A) \circ a_l^k(M_i A)\, a_n^m(M_i A) =$$
$$= a_j^i(A) \circ a_l^k(M_i A) \circ a_n^m(M_i\, M_{X_k M_i^*} A).$$

Теперь легко определить произведение $p(A) \circ q(A)$ любых двух полиномов от матричных функций, представив сначала p и q (достаточно только p) в виде полиномов с умножением $\circ$, а затем преобразовав результат к полиному с обычным умножением. Доказательство ассоциативности сформулированного умножения сводится фактически к проверке того факта, что домножив справа равенство (3.1) на произвольный полином, мы не нарушим его справедливости. Эта проверка, также как и доказательство того, что определенная операция не нарушает тождественных соотношений, которым удовлетворяют матричные функции на полугруппе $\Gamma = \mathrm{End}\,\mathfrak{g}$, оставляется читателю.

Теперь заметим, что пространство P_Γ полиномов от матричных функций плотно в Ф, и, если это возможно, продолжим указанный закон умножения по непрерывности на все Ф. Для осуществимости этой операции достаточно (но не необходимо), чтобы автоморфизмы $M_1, \cdots, M_n$ были ортогональны (унитарны).

Сформулированная структура на $\mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ изоморфно (поскольку $\mathrm{End}\,\mathfrak{g} \cong \mathrm{End}\,G$) переносится на полугруппу End G, где G — связная односвязная группа Ли с алгеброй $\mathfrak{g}$.

Отметим, что функция $f \equiv 1$ в построенной алгебре B является двусторонней единицей. Отметим также один важный частный случай описанной выше структуры, когда для любых i и j $l(i, j) = i$, т.е. $V_i M_j \subseteq V_i$. В этом случае все автоморфизмы M_i коммутируют между собой.

6. Рассмотрим один частный случай предыдущего примера. Пусть $G = C^3$. Положим $(X, Y, Z)\, M_1 = (Y, X, aZ)$, $(X, Y, Z)\, M_2 = (Y, X, bZ)$, $M_3 = E$, $|a| = |b| = 1$. Условия предыдущего примера выполнены тогда и только тогда, когда $a^2 = b^2$. Коммутационные соотношения для первых генераторов соответствующего оператора типа Дельсарта (см. ниже формулы (4.6)), выглядят так:

$$X^2 - Y^2 = 0, \quad aXZ - ZX = 0, \quad bYZ - ZY = 0.$$

Заметим, что при $a = b$ можно, а при $a = -b$ нельзя посредством замены базиса осуществить „диагонализацию" этой системы соотношений, т. е. все ее уравнения привести к виду $X_i X_j - \sigma_{i,j} X_j X_i = 0$.

§ 4. Соотношения для генераторов операторов типа Дельсарта

В предыдущем параграфе нами были в конкретном примере вычислены соотношения для первых генераторов оператора типа Дельсарта. В настоящем параграфе мы рассмотрим, каким соотношениям, аналогичным коммутационным формулам Ли, удовлетворяют генераторы о.о.с. типа Дельсарта в общем случае.

Пусть опять фиксированы группа Ли G и полугруппа Г ее эндоморфизмов. Будем обозначать через R_α и $\tilde{R}_\alpha$ соответственно генераторы оператора правого сдвига на группе G и оператора типа Дельсарта (1.1). Вычисляя от последнего оператора производную D^α по s и полагая $s = e$, будем иметь

$$\tilde{R}_\beta f(t) = \left\langle \sum_\sigma R_\sigma\, a^\sigma_\beta(B)\, f(t, A),\ \mu_{A,B} \right\rangle,$$

где $a^\sigma_\beta(B)$ — матричные элементы представления полупруппы Г в базисе R_β.

Предположим, что генераторы $\overline{R}_\alpha$ линейно независимы. В этом случае согласно предложению 1.1 $\widetilde{R}_\alpha|_e^\alpha = R_\alpha|_e = D^\alpha|_e$ и следовательно,

$$\widetilde{R}_\alpha \widetilde{R}_\beta f|_e = \sum_{\gamma, \sigma} < (D^\gamma a_\alpha^\gamma (A))(R_\sigma a_\beta^\sigma (B)) f(t), \mu_{A,B} >|_e =$$

$$= \sum_{\gamma,\sigma} D^\gamma R_\sigma < a_\alpha^\gamma (A)\, a_\beta^\sigma (B), \mu_{A,B} > f|_e = \sum_{\gamma,\sigma} D^\gamma R_\sigma (a_\alpha^\gamma \circ a_\beta^\sigma)(E) f|_e =$$

$$= \sum_{\gamma,\sigma} R_\gamma R_\sigma (a_\alpha^\gamma \circ a_\beta^\sigma)(E) f|_e. \tag{4.1}$$

Допустим теперь, что генераторы оператора типа Дельсарта (1.1) удовлетворяют некоторому соотношению вида

$$\sum_{\alpha,\beta} b^{\alpha,\beta} \widetilde{R}_\alpha \widetilde{R}_\beta = \sum_\gamma c^\gamma \widetilde{R}_\gamma. \tag{4.2}$$

Как следствие получаем, что для генераторов R_α оператора сдвига справедливо следующее равенство:

$$\sum_{\alpha,\beta} b^{\alpha,\beta} \sum_{\gamma,\sigma} R_\gamma R_\sigma (a_\alpha^\gamma \circ a_\beta^\sigma)(E) f|_e = \sum_\gamma c^\gamma R_\gamma|_e.$$

Заметим, что исходя из предложения 1.1, в последней формуле мы можем убрать ограничение $t = e$. Таким образом мы получаем соотношение для генераторов R_γ. Сказанное позволяет нам сформулировать следующий порядок действий в целях определения соотношений для генераторов $\overline{R}_\sigma$.

Теорема. 4.1. *Предположим, что генераторы $\overline{R}_\alpha$ оператора типа Дельсарта* (1.1) *линейно независимы. Рассмотрим формальное равенство*

$$\widetilde{R}_\alpha = \sum_\beta R_\beta a_\alpha^\beta (A), \tag{4.3}$$

предполагающее, что генераторы $\widetilde{R}_\alpha$ выражаются линейным образом через генераторы R_α с коэффициентами из алгебры $B \in \mathbf{A}\,(\Phi)$, где $\Phi = C^\infty\,(\Gamma)(H\,(\Gamma))$. Тогда из любого соотношения вида (4.2) *для генераторов $\overline{R}_\alpha$ можно получить соответствующее соотношение для генераторов R_α, подставив в* (4.2) *выражения* (4.3), *перемножив коэффициенты в соответствии с законом умножения в алгебре B и ограничив полученные коэффициенты в единицу полугруппы Γ. Если равенства* (4.1) *можно обратить, т. е. если можно выразить значения $R_\alpha R_\beta|_e$ через $\widetilde{R}_\alpha \widetilde{R}_\beta|_e$, то аналогичным образом можно перейти от соотношений для генераторов R_α к соотношениям для генераторов $\widetilde{R}_\alpha$.*

Рассмотрим в алгебре B произведение $a_\beta^\alpha \circ a_\delta^\gamma$ матричных элементов представлений, действующих соответственно в пространствах, натянутых на базисы R_α, $|\alpha| = m$ и R_γ, $|\gamma| = m$. Поскольку умножение в алгебре B инвариантно относительно правого сдвига на полугруппе Г, то существует такая матрица $(d^{\mu\nu}_{\beta\lambda})$, что

$$a^{\alpha}_{\beta} \circ a^{\gamma}_{\delta} = d^{\alpha\gamma}_{\mu\nu}\, a^{\mu}_{\beta}\, a^{\nu}_{\delta}, \quad |\mu| = |\beta| = m, \quad |\nu| = |\delta| = n. \tag{4.4}$$

Здесь и в дальнейшем мы придерживаемся тензорной формы записи, опуская знак суммирования по одинаковым индексам, стоящим вверху и внизу.

В согласии с теоремой 4.1 переход от соотношений вида (4.2) для генераторов оператора типа Дельсарта (если они независимы) к соотношениям для генераторов правого сдвига на группе Ли следует производить исходя из равенства

$$\tilde{R}_\beta\, \tilde{R}_\delta = R_\alpha R_\gamma\, a^{\alpha}_{\beta} \circ a^{\gamma}_{\delta}(E) = R_\alpha\, R_\gamma\, d^{\alpha\gamma}_{\mu\nu}\, a^{\mu}_{\beta}\, a^{\nu}_{\delta}(E) = R_\alpha R_\gamma\, d^{\alpha\gamma}_{\beta\lambda}.$$

В частности, для первых генераторов оператора типа Дельсарта, которые мы для простоты будем обозначать также $\tilde{X}_i$ $(\tilde{X}_i f = D_{s_i} R^s f|_{s=e})$, это равенство принимает вид $\tilde{X}_i \tilde{X}_j = d^{ke}_{ij}\, X_k X_e$.

Если матрица (d^{ke}_{ij}) обратима, то коммутационные соотношения для первых генераторов операторов правого сдвига на группе G, или что то же самое, соотношения для образующих алгебры Ли $\mathfrak{g}$, записанные в ее обертывающей алгебре, приводят нас в согласии с теоремой 4.1 к следующим соотношениям для первых генераторов оператора типа Дельсарта:

$$d^{-1ij}_{ke}\, \tilde{X}_i \tilde{X}_j - d^{-1pq}_{lk}\, \tilde{X}_p \tilde{X}_q = c^{m}_{kl}\, \tilde{X}_m, \tag{4.5}$$

где (d^{-1ij}_{kl}) — матрица обратная к (d^{kl}_{ij}), а c^{m}_{ke} — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в базисе $x_1, \cdots, x_n$.

В частном случае оператора типа Дельсарта, отвечающего алгебраической конструкции, описанной в примере 5 предыдущего параграфа, последнее соотношение принимает вид

$$\tilde{X}_i(\tilde{X}_j M_i) - X_j(\tilde{X}_i M_j) = c^{m}_{ij}\, \tilde{X}_m. \tag{4.6}$$

Легко указать явный вид первых генераторов $\tilde{X}_i$ этого оператора типа Дельсарта: на функцию $f(t)$, заданную на группе G, генератор $\tilde{X}_i$ действует следующим образом: $(\tilde{X}_i f)(t) = (X_i f)(tM_i)$, где под M_i уже понимается соответствующий автоморфизм группы G.

Разумеется, все сказанное справедливо, если на пространство Ф (см. пример 5 § 3) продолжается структура, определенная на плотном подпространстве $P_Г$. Правда, и в противном случае можно аналогичным образом определить о.о.с., действующий в пространстве формальных рядов (так сказать, „формальный оператор типа Дельсарта“). Для первых генераторов этого оператора останутся справедливыми коммутационные соотношения (4.6) и утверждение о явном виде.

Вместе с тем, часто бывает возможно, изменив закон умножения, построенный в примере 5 предыдущего параграфа, получить другую, изоморфную исходной, алгебраическую структуру на $P_Г$, уже продолжаемую на все пространство Φ и такую, что первые генераторы соответствующего оператора типа Дельсарта удовлетворяют тем же самым коммутационным соотношениям (4.6).

§ 5. Обобщенные алгебры Ли

Про оператор типа Дельсарта мы будем говорить, что у него невырождена система первых генераторов, если эти генераторы независимы и все матрицы $(d^{\mu\nu}_{\beta\delta})$ из формул (4.4), участвующие в умножении матричных элементов в соответствующей алгебре B обратимы при $|\beta| = |\mu| = 1$. В этом случае по индукции легко доказывается, что вообще все матрицы $(d^{\mu\nu}_{\beta\delta})$ обратимы и что генератор любого порядка исходного оператора Дельсарта представим в виде многочлена от операторов первого порядка.

Систему коммутационных соотношений (4.5) для первых генераторов X_l (в их обозначениях мы опускаем тильду) можно умножением на матрицу (d^{kl}_{ij}) привести к виду

$$X_i X_j - h^{kl}_{ij} X_k X_l = [X_i, X_j], \tag{5.1}$$

где $h^{kl}_{ij} = d^{pq}_{ij}\, d^{-1kl}_{qp}$, а $[X_i, X_j]$ — некоторые линейные комбинации от X_m.

Рассмотрим тензор $H = (h^{kl}_{ij})$. Очевидно, что он удовлетворяет условию 1) $H^2 = E$, т. е. $h^{pq}_{ij}\, h^{kl}_{pq} = \delta^{kl}_{ij}$. Докажем, что для этого тензора выполнено также условие 2) $h^{kl}_{ij}\, h^{pq}_{lm}\, h^{st}_{kp} = h^{uv}_{jm}\, h^{sr}_{iu}\, h^{tq}_{rv}$.

Для этого наряду с алгеброй B рассмотрим алгебру B^* с сопряженным законом умножения

$$a^{\alpha}_{\beta} * a^{\gamma}_{\delta} = d^{\mu\nu}_{\beta\delta}\, a^{\alpha}_{\mu}\, a^{\gamma}_{\nu} \tag{5.2}$$

(это умножение может быть выражено через исходное умножение посредством операции сопряжения: $f * g = (f^* \circ g^*)^*$).

Алгебра B^* ассоциативна, поскольку ассоциативна алгебра B. Воспользовавшись коммутативностью обычного умножения, из (5.2) получаем, что

$$a^{\alpha}_{\beta} * a^{\gamma}_{\delta} = d^{\mu\nu}_{\beta\delta}\, d^{-1\sigma\rho}_{\nu\mu}\, a^{\gamma}_{\sigma} * a^{\alpha}_{\rho}. \tag{5.3}$$

Заметим, что матрица $(d^{\mu\nu}_{\beta\delta}\,(d^{-1\sigma\rho}_{\nu\mu})$ при $|\beta| = |\mu| = |\delta| = |\nu| = |\sigma| = |\rho| = 1$ совпадает с тензором H. Теперь условие 2) для тензора H непосредственно вытекает из того факта, что если три сомножителя $a^{\alpha}_{i} \circ a^{\gamma}_{j} \circ a^{\varphi}_{m}$ прокоммутировать по формулам (5.3) так, чтобы α и φ поменялись местами, то результат не будет зависеть от порядка выполнения операций коммутирования.

Положим $p_{ij} = X_i X_j - h^{kl}_{ij} X_k X_l$. Явно проверяется, что для p_{ij} справедливы соотношения $p_{ij} = -h^{kl}_{ij}\, p_{kl}$ и

$$p_{ij} X_k - h_{lu}^{qr} h_{jk}^{uv} X_q p_{rv} + h_{ij}^{sl} h_{lk}^{mn} (p_{sm} X_n - h_{su}^{qr} h_{mn}^{uv} X_q p_{rv}) +$$
$$+ h_{il}^{sm} h_{jk}^{ln} (p_{sm} X_n - h_{su}^{qr} h_{mn}^{uv} X_q p_{rv})).$$

Отсюда получаем, что правые части равенств (5.1) для первых генераторов оператора типа Дельсарта с невырожденной системой первых генераторов удовлетворяют условиям

а) $[X_i, X_j] = - h_{ij}^{kl} [X_k, X_l]$ („кососимметричность"),

в) $[[X_i, X_j], X_k] + h_{ij}^{sl} h_{lk}^{mn} [[X_s, X_m], X_n] + h_{il}^{sm} h_{jk}^{ln} [[X_s, X_m], X_n]] = 0$

(условие Якоби),

$$c_{ij}^p h_{pq}^{kl} = h_{jq}^{sm} h_{is}^{kl} c_{lm}^l, \text{ где } c_{ij}^p \text{ таковы, что } [X_i, X_j] = c_{ij}^p X_p.$$

Заметим, что условие Якоби может быть переписано в другой, более наглядной, форме:

$$[[X_i, X_j], X_k] = [X_i, [X_j, X_k]] + h_{ij}^{lm} [X_l, [X_m, X_k]].$$

Определение. Пусть задан произвольный тензор $H = (h_{ij}^{kl})$ размерности $n^2 \times n^2$ с коэффициентами из поля k (у нас $k = \mathrm{R}$ или $k = \mathrm{C}$), удовлетворяющий указанным условиям 1) и 2). Алгебру над полем k мы назовем обобщенной алгеброй Ли, если умножение в алгебре $X_i, X_j \to [X_i, X_j]$ удовлетворяет условиям а), в), с).

Приведенное определение включает в себя конечномерные градуированные алгебры Ли в смысле М. В. Мосоловой [11] (в том числе и супералгебры Ли), для которых тензор H в некотором базисе имеет вид

$$h_{ij}^{lm} = a_{ij} \delta_{ij}^{ml}, \quad a_{ij} \in k, \ a_{ij} \neq 0.$$

С тензором H естественным образом связаны два проектора $P_0 = \frac{1}{2}(E + H)$ и $P_1 = \frac{1}{2}(E - H)$, действующие в векторном пространстве k^{n^2}. Заметим, что для алгебр Ли $\dim \ker p_1 = \frac{n(n+1)}{2}$, а для супералгебр Ли $\dim \ker p_1 < \frac{n(n+1)}{2}$. Если $\dim \ker p_1 = n^2$, то $H = E$ и соответствующая обобщенная алгебра Ли коммутативна, т. е. для любых i и j $[X_i, X_j] = 0$. Если же $\dim \ker p_1 = 0$, то $H = -E$ и соответствпющая алгебра Ли также коммутативна.

На обобщенные алгебры Ли переносятся многие элементы теории обычных алгебр Ли. В частности каждой обобщенной алгебре Ли можно поставить в соответствие „обобщенную (в общем случае формальную) группу Ли". Мы здесь ограничиваемся рассмотрением обобщенных алгебр Ли, отвечающих операторам типа Дельсарта с невырожденной системой первых генераторов.

Необходимое условие, выделяющее последние алгебры из множества всех обобщенных алгебр Ли состоит в том, что тензор H, отвечающий алгебре, которая соответствует оператору типа Дельсарта, эквивалентен тензору $'H = ('h_{ij}^{kl} = \delta_{ij}^{lk})$, отвечающему обычной алгебре.

В самом деле, тензор H в данном случае представим в виде $h_{ij}^{kl} = d_{ij}^{pq} \times d_{qp}^{-1kl} = d_{ij}^{pq} \delta_{pq}^{sl} d_{ls}^{-1kl}$. Отметим, что указанное условие эквивалентно равенству $\dim \ker p_1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

Гипотеза. Это условие является и достаточным, т. е., если тензоры H обобщенной алгебры Ли и обычной алгебры Ли эквивалентны, другими словами, если у них одинакова кратность единицы (или минус единицы) как собственного числа, то существует (хотя бы формальный) оператор типа Дельсарта, первые генераторы которого порождают обобщенную алгебру Ли, совпадающую с исходной.

Институт Африки АН СССР Поступила 4.VIII.1981

Դ. Ի. ԳՈՒՐԵՎԻՉ. Ընդհանրացված տեղաշարժի օպերատորները Լիի խմբերի վրա. *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկվում է ընդհանրացված տեղաշարժի օպերատորների (հիպերխմբերի) մի նոր դաս և ուսումնասիրվում է համապատասխան հանրահաշվական օբյեկտների կառուցվածքը։

D. I. GUREVICH. *Generalized translation operators on Lie groups* (summary)

The paper deals with a new class of generalized translation operators (on hypergroups) and with appropriately defined "algebraic objects".

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Delsarte.* Sur une extension de la formule de Taylor, Journ. Math. pures et appl., 17, 1938, 213—230.
2. *Б. М. Левитан.* Применение операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка, УМН, 4, № 1, 1949, 3—111.
3. *Б. М. Левитан.* Теоремы Ли для операторов обобщенного сдвига, ДАН СССР, 123, № 1, 1958, 32—35.
4. *Б. М. Левитан.* Обратные теоремы Ли для операторов обобщенного сдвига, ДАН СССР, 23, № 2, 1958, 243—245.
5. *Б. М. Левитан.* Теория операторов обобщенного сдвига, «Наука», М., 1973.
6. *Г. Л. Литвинов.* Об операторах обобщенного сдвига и их представлениях, Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, вып. XVIII, 1977, 345—371.
7. *K. A. Ross.* Hypergroups and centers of measure algebras, Symposia Math. Inst. Naz. Alta Mat., XXII, 1977, 189—203.
8. *В. М. Бухштабер.* Двузначные формальные группы, Изв. АН СССР, сер. матем., 39, № 5, 1975, 1044—1064.
9. *Д. И. Гуревич.* Операторы обобщенного сдвига с правым инфинитезимальным оператором Штурма—Лиувилля, Матем, заметки, 25, № 3, 1979, 393—408.
10. *Р. Я. Грабовская, В. И. Кононенко, В. Б. Осипов.* Об одном семействе операторов обобщенного сдвига, Изв. АН СССР, сер. матем., 41, № 4, 1977, 912—936.
11. *М. В. Мосолова.* О функциях от некоммутирующих операторов, порождающих градуированную алгебру Ли, Матем. заметки, 29, № 1, 1981, 35—44.